MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 19 (1981)

RÓWNANIA LINIOWEJ, ZGIĘCIOWEJ TEORII POWŁOK O WOLNO ZMIENNYCH KRZYWIZNACH

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ (WARSZAWA)

Wstęp

Równania teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach były tematem wcześniejszych prac autora [1, 2, 3], w których wyprowadzono podstawowe równania dla tego typu powłok. Niniejsza praca przedstawia wyniki dalszych badań w tym zakresie. W stosunku do prac poprzednich zawiera pełne, formalnie ścisłe i bardziej konsekwentne wyprowadzenie równań podstawowych oraz ocenę ich dokładności. Zostały przeanalizowane dwa warianty równań teorii powłok, oparte na dwu różnych miarach tensora zmiany krzywizny [4], które są uznane obecnie za najlepsze. Wykazano, że w przypadku powłok o wolno zmiennych krzywiznach oba te warianty prowadzą do tej samej postaci równań podstawowych.

1. Założenia podstawowe

Zajmijmy się analizą powłok wyniosłych, których krzywizny są wolno zmiennymi funkcjami współrzędnych Θ^1 i Θ^2. Przez określenie „funkcja wolno zmienna" rozumiemy funkcję, której stosunek jej pierwszej pochodnej do niej samej jest wielkością mniejszą od jedności w całym obszarze, za wyjątkiem otoczenia punktów gdzie ta funkcja jest bliska zeru. Dla tego typu powłok można uzyskać uproszczone równania dobrze nadające się do obliczeń liczbowych. W omawianej klasie powłok znajdują się oczywiście powłoki kuliste i powłoki walcowe, których krzywizny są stałe. Można wykazać, że również powłoki odbiegające od walca i kuli, lecz o łagodnie zmiennych krzywiznach mogą być obliczone w ten sposób. Obecnie wykażemy, że podstawowy układ równań powłok cienkich można sprowadzić do układu dwu równań różniczkowych dla ugięcia normalnego w i funkcji naprężeń Φ. Funkcję tę definiujemy w podobny sposób jak w przypadku płaskiego zagadnienia teorii sprężystości. Staje się to możliwe dzięki dokonaniu pewnych uproszczeń w równaniach podstawowych. Uproszczenia te są dopuszczalne jeżeli przyjmiemy pewne dodatkowe warunki i dokonamy oceny błędów popełnionych przez przyjęcie zależności uproszczonych.

W dalszych rozważaniach będziemy opierać się na założeniach i równaniach teorii powłok cienkich podanych w pracach KOITERA i SIMONDSA [4, 6]. Ponadto przyjmiemy założenie dodatkowe dotyczące zmienności krzywizny powierzchni środkowej. A więc założymy, że powłoka jest na tyle cienka, że możemy pomijać wyrazy rzędu $(h/R)^2$ w porównaniu z jednością. Dalej przyjmiemy, że odkształcenia powierzchni środkowej powłoki są na tyle małe, że możemy pomijać wyrazy rzędu odkształcenia powierzchni środkowej ε w porównaniu z jedności ($\varepsilon \ll 1$).

Powyżej: h — oznacza grubość powłoki, R — mniejszy z głównych promieni krzywizny powierzchni środkowej powłoki. $1/R \equiv \min(b_{\alpha\beta})$.

Na razie zajmiemy się tylko zagadnieniami liniowymi. Aby ocenić wielkość wyrazów zawierających różne pochodne składowych stanu odkształcenia i naprężenia, występujących w równaniach teorii powłok wprowadzimy parametr L charakteryzujący długość półfali przemieszczenia. Przyjmijmy, że stan przemieszczenia powłoki zmienia się zgodnie ze wzorem

$$w = w_0 \sin\frac{\pi\Theta_\alpha}{L}. \qquad v_\alpha = v_{0\alpha}\sin\frac{\pi\Theta_\alpha}{L} \qquad \alpha = 1, 2.$$

gdzie w — jest ugięciem normalnym do powierzchni środkowej,
Q_α — współrzędną krzywoliniową na powierzchni powłoki,
v_α — składową styczną wektora przemieszczenia

wtedy rząd wielkości tych wyrazów wynosi

$$o(w) = w_0, \qquad o(v_\alpha) = v_{\alpha 0},$$

Przyjmujemy, że zajmować się będziemy najczęściej spotykanymi przypadkami, dla których $o(w_0) > o(v_{\alpha 0})$.

Rząd wielkości pochodnej składowej wektora przemieszczenia można ocenić na podstawie zależności

$$\frac{\partial w}{\partial \Theta_\alpha} = w_0 \frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi\Theta_\alpha}{L}, \qquad \text{a wiec} \qquad o\left(\frac{\partial w}{\partial \Theta_\alpha}\right) = \frac{\pi}{L} o(w),$$

oraz $\quad o(w|_\alpha) = \frac{\pi}{L} o(w)$.

Założymy dalej, że podobnie zmiana stanu naprężenia towarzysząca stanowi zgięciowemu może być scharakteryzowana przez tę samą odległość L. Przyjmijmy, że rozpatrywana w tej pracy klasa zagadnień zgięciowej teorii powłok cienkich dotyczy takich przypadków, dla których spełnione są następujące warunki

$$h^2/R^2 \ll 1, \qquad h^2/L^2 \ll 1.$$

Ponadto przyjmijmy, że $L^2/R^2 \leqslant o(1)$ co oznacza, że wyrazy rzędu $(L/R)^2$ nie będą pomijane w porównaniu z jednością. Można się przekonać, że powyższe założenia są spełnione w najczęściej spotykanych przypadkach technicznych, w których występuje zginanie powłok. Dalsze założenie dotyczy zmienności promieni krzywizny powłoki. Aby ocenić wielkość wyrazów zawierających pochodne tensora krzywizny powierzchni środkowej $b_{\alpha\beta}$ przyjmujemy, że tensor ten może być np. przedstawiony w następujący sposób

$$b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta 0}\left(1 + \bar{\varrho}\sin\frac{\pi\Theta_\alpha}{L_R}\right),$$

gdzie $b_{\alpha\beta 0}$ jest wielkością stałą i przedstawia średnie krzywizny powierzchni środkowej powłoki, $\bar{\varrho}$ — jest pewną liczbą bezwymiarową mniejszą od jedności oznaczającą stosunek przyrostu krzywizny do jej wielkości średniej, L_R jest długością charakteryzującą szybkość zmiany składowych tensora krzywizny powierzchni środkowej.

Przyjmijmy, że będziemy rozpatrywali powłoki dla których stosunek $L/L_R < 1$. Z powyższego wynika, że rząd wielkości pochodnej tensora krzywizny można ocenić jako

$$o(b_{\alpha\beta|\gamma}) = o(b^{\alpha}_{\beta|\gamma}) = \bar{\varrho}\frac{\pi}{L_R}o(b_{\alpha\beta}) \approx \bar{\varrho}\frac{\pi}{L_R R}.$$

Opierając się na powyższej ocenie możemy stwierdzić również, że

$$o(K|_{\alpha}) = \bar{\varrho}\frac{\pi}{L_R}o(K) \simeq \bar{\varrho}\frac{\pi}{L_R R^2},$$

gdzie K jest krzywizną Gaussa.

Przyjmijmy dalej, że zmiany krzywizny rozpatrywanych powłok są na tyle niewielkie i odbywają się na tyle powoli, że możemy pomijać wyrazy rzędu

$$\varrho_1 = \frac{\bar{\varrho}hL}{RL_R} \ll 1, \quad \varrho_2 = \frac{\bar{\varrho}L^3}{\pi^2 R^2 L_R} \ll 1, \quad \varrho_3 = \frac{\bar{\varrho}L^2}{\pi L_R R} \ll 1.$$

w porównaniu z jednością. Jeżeli $\varrho = \max(\varrho_{})$, niech $\varrho \ll 1$. Powyższe warunki są najczęściej spełnione w tych problemach technicznych, dla których są słuszne założenia zgięciowej teorii powłok cienkich. Ponieważ $\bar{\varrho} < 1$, $h/R \simeq 0{,}05-0{,}001 < 1$, a długość fali ugięcia L jest rzędu $\sqrt{hR}$, a więc gdy $L/R \sim L/L_R \sim \sqrt{h/R} < 1$, pomijane wyrazy wynoszą kolejno (przy np. $\bar{\varrho} = 0{,}3$, $h/R = 0{,}01$), $0{,}3\cdot 10^{-3}$, $0{,}3\cdot 10^{-4}$, $1\cdot 10^{-3}$.

Podstawowy układ równań liniowej teorii powłok, po wyeliminowaniu sił poprzecznych, przyjmuje następującą postać [4, 6, 7] (przy zmienionych znakach tensora momentów i zmiany krzywizny).

— równania równowagi

$$\begin{aligned}(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta})_{|\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta}|_{\beta}+P^{\alpha} &= 0,\\ M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}+(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta})b_{\alpha\beta}+P^3 &= 0, \qquad \alpha,\beta = 1,2\end{aligned} \tag{1}$$

— równania zgodności odkształceń

$$\begin{aligned}K\varepsilon^{\lambda}_{\lambda}+d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}(\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda}-b_{\alpha\mu}\varkappa_{\beta\lambda}) &= 0,\\ d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}[\varkappa_{\beta\lambda|\mu}+b^{\varrho}_{\lambda}(\varepsilon_{\varrho\beta|\mu}+\varepsilon_{\varrho\mu|\beta}-\varepsilon_{\beta\mu|\varrho})] &= 0.\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $d^{\alpha\beta}$ jest tensorem permutacyjnym,

— równania konstytutywne

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{Eh}[(1+\nu)S_{\alpha\beta}-\nu a_{\alpha\beta}S^{\lambda}_{\lambda}]+o(\varepsilon\Theta^2),\\ M^{\alpha\beta} &= D[(1-\nu)\varkappa^{\alpha\beta}+\nu a^{\alpha\beta}\varkappa^{\lambda}_{\lambda}]+o(Eh^2\varepsilon\Theta^2),\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ jest zgięciową sztywnością powłoki, h — grubością powłoki. $\Theta^2 = \max(h/L, \sqrt{h/R}, \sqrt{\varepsilon})$. W powyższych równaniach $S^{\alpha\beta}$ oznacza składowe tensora sił błonowych, a $M^{\alpha\beta}$ są składowymi tensora momentów gnących, $\varkappa_{\alpha\beta}$ i $\varepsilon_{\alpha\beta}$ przedstawiają tensory zmiany krzywizny oraz tensor odkształcenia powierzchni środkowej. Wszystkie wyżej wymienione wielkości są tensorami symetrycznymi, spełniającymi zasadę prac przygotowanych. Pomiędzy rzeczywistymi, niesymetrycznymi siłami i momentami wewnętrznymi działającymi w przekroju powłoki a ich symetrycznymi reprezentacjami istnieją następujące zależności

(4) $$N^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} - b^{\alpha}_{\gamma} M^{\gamma\beta}, \quad M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}.$$

Tensor zmiany krzywizny $\varkappa_{\alpha\beta}$ dany jest wzorem

(5) $$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} &= -w|_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} w - b^{\lambda}_{\alpha} u_{\lambda|\beta} - b^{\lambda}_{\beta} u_{\alpha|\lambda} - b^{\lambda}_{\alpha|\beta} u_{\lambda}, \\ c_{\alpha\beta} &= b^{\lambda}_{\alpha} b_{\lambda\beta} = 2Hb_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} K, \end{aligned}$$

gdzie $2H = b^{\alpha}_{\alpha}$ jest średnią krzywizną, a K krzywizną Gaussa. Tensor odkształcenia powierzchni środkowej $\varepsilon_{\alpha\beta}$ wynosi

(6) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w,$$

gdzie u_{α} — jest składową wektora przemieszczenia na powierzchni środkowej, w — przemieszczeniem normalnym do powierzchni środkowej.

2. Przekształcenia równań podstawowych

Powyższy układ równań różniczkowych, razem z warunkami brzegowymi określa stan naprężenia i odkształcenia powłoki o umiarkowanie dużych ugięciach. Aby sprowadzić powyższy układ do postaci bardziej dogodnej do obliczeń liczbowych dokonujemy następujących przekształceń. Opierając się na założeniu o wolnej zmianie krzywizny, pierwsze z równań równowagi można przedstawić w postaci

(7) $$(S^{\alpha\beta} - 2b^{\alpha}_{\gamma} M^{\gamma\beta})_{|\beta} + p^{\alpha} = 0.$$

Zostaje tu pominięty wyraz $b^{\alpha}_{\gamma|\beta} M^{\gamma\beta}$ zawierający pochodną tensora krzywizny. Dopuszczalność takiego uproszczenia jest wykazana w dalej przytoczonych rozważaniach. Mianowicie, przyjmujemy zgodnie z założeniami zgięciowej teorii powłok, że odkształcenia spowodowane zginaniem są tego samego rzędu co odkształcenia stanu błonowego, wtedy rząd wielkości składowych tensora odkształcenia $\varepsilon_{\alpha\beta}$ można ocenić jako

$$o(\varepsilon_{\alpha\beta}) \simeq o(\varkappa_{\alpha\beta} h).$$

Rząd wielkości pomijanego wyrazu wynosi więc

$$b^{\alpha}_{\gamma|\beta} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} o(\varkappa_{\alpha\beta}) = \bar{\varrho} \frac{\pi Eh^3}{12(1-\nu^2) R L_R} o(\varkappa_{\alpha\beta}),$$

podczas gdy rząd wielkości wyrazu $S^{\alpha\beta}|_{\beta}$ wynosi

$$o(S^{\alpha\beta}|_{\beta}) = \frac{Eh}{1-\nu^2} o(\varepsilon^{\alpha\beta}|_{\beta}) = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \frac{\pi}{L} o(\varkappa_{\alpha\beta}).$$

Porównując oba te wyrazy ze sobą widzimy, że pominięcie wyrazu $b^{\alpha}_{\gamma|\beta} M^{\gamma\beta}$ daje błąd w równaniu (7) rzędu $\bar{\varrho} \frac{Lh}{L_R R} = \varrho_1$ w porównaniu z jednością. Zgodnie z założeniami początkowymi uproszczenie to jest dopuszczalne.

Równanie (7) można spełniać tożsamościowo przy $p = 0$, jeżeli wprowadzimy funkcję naprężeń Φ zdefiniowaną w następujący sposób

$$S^{\alpha\beta}-2b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta} = R^{\alpha\beta} = -d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\Phi|_{\lambda\mu}-Ka^{\alpha\beta}\Phi. \tag{8}$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia do równania (7) otrzymujemy

$$R^{\alpha\beta}|_{\beta} = -d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\Phi_{|\lambda\mu\beta}-(Ka^{\alpha\beta}\Phi)|_{\beta}. \tag{9}$$

W pierwszym wyrazie po prawej stronie równania (9) występuje antysymetryczny tensor permutacyjny $d^{\beta\mu}$ mnożony przez trzecią pochodną funkcji Φ. Ponieważ różniczkowanie kowariantne w dwuwymiarowej przestrzeni powierzchni środkowej nie jest przemienne, wyrażenie to nie jest równe zeru. Mamy bowiem

$$\Phi|_{\lambda\mu\beta}-\Phi|_{\lambda\beta\mu} = \Phi|_{\gamma}R^{\gamma}_{\cdot\lambda\mu\beta}, \tag{10}$$

gdzie $R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\mu\beta}$ jest tensorem Riemanna-Christoffela.

Przedstawimy $\Phi_{|\lambda\mu\beta}$ jako kombinację wielkości symetrycznej i antysymetrycznej ze względu na wskaźniki β i μ.

$$\Phi|_{\lambda\mu\beta} = \frac{1}{2}(\Phi|_{\lambda\mu\beta}+\Phi|_{\lambda\beta\mu})+\frac{1}{2}(\Phi|_{\lambda\mu\beta}-\Phi|_{\lambda\beta\mu}).$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (9) otrzymamy

$$R^{\alpha\beta}|_{\beta} = -\frac{1}{2}d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\Phi|_{\gamma}R^{\gamma}_{\cdot\lambda\mu\beta}-(Ka^{\alpha\beta}\Phi)|_{\beta} = -\frac{1}{2}d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}R_{\gamma\lambda\mu\beta}\Phi|^{\gamma}-(K\Phi)|^{\alpha},$$

gdzie oznaczyliśmy $a^{\gamma\delta}\Phi|_{\delta} = \Phi|^{\gamma}$.

Wykorzystując definicję $R^{\gamma}_{\cdot\lambda\mu\beta}$ otrzymujemy

$$R^{\alpha\beta}|_{\beta} = K\Phi|^{\alpha}-(K\Phi)|^{\alpha} = -K|^{\alpha}\Phi. \tag{11}$$

Widzimy, że po wprowadzeniu funkcji naprężeń wg wzoru (8) do równania (7), równanie to jest spełnione tożsamościowo pod warunkiem, że możemy pominąć wyraz $K|^{\alpha}\Phi$. Wyraz ten jest rzędu $o(\Phi)\dfrac{\pi\varrho}{L_R R^2}$. Rząd wielkości największego wyrazu w równaniu (7) wynosi

$$o(S^{\alpha\beta}|_{\beta}) = \frac{\pi^3}{L^3}o(\Phi).$$

Porównując te wyrazy widzimy, że pominięcie wyrazu $K|^{\alpha}\Phi$ jest uzasadnione jeżeli możemy pominąć $\varrho_2 = \bar{\varrho}L^3/\pi^2R^2L_R$ w porównaniu z jednością. Ponieważ $\bar{\varrho} < 1$, $L/L_R < 1$, $\pi^2 \simeq 10$ a więc można uznać, że jest to uzasadnione.

Zajmijmy się obecnie drugim równaniem równowagi (1). Równanie to może być przekształcone i uproszczone jeżeli wykorzystując równania konstytutywne, wyrazimy momenty gnące $M^{\alpha\beta}$ przez ugięcie normalne w, a siły błonowe $N^{\alpha\beta}$ przez funkcję naprężeń ϕ. Zależność $(3)_1$ może być przedstawiona w innej postaci za pomocą następującej tożsamości słusznej dla dowolnego symetrycznego tensora powierzchniowego

$$\varkappa^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}\varkappa^{\lambda}_{\lambda}-d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu}. \tag{12}$$

Po podstawieniu (12) do $(3)_2$ otrzymujemy

$$M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} = D[a^{\alpha\beta}\varkappa^{\lambda}_{\lambda}-(1-\nu)d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu}]|_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

Aby obliczyć wielkość $\varkappa_\lambda^\lambda$ wykorzystajmy wyrażenie (5) dla tensora zmiany krzywizny $\varkappa_{\alpha\beta}$. Wyrażenie to może być przekształcone jeżeli wykorzystamy zależność (6). Mnożąc obie strony równania (6) przez b_α^δ i b_β^δ otrzymamy po dodaniu

$$(14) \qquad b_\alpha^\delta \varepsilon_{\delta\beta} + b_\beta^\delta \varepsilon_{\delta\alpha} = \frac{1}{2} b_\alpha^\delta (u_{\delta|\beta} + u_{\beta|\delta}) + \frac{1}{2} b_\beta^\delta (u_{\delta|\alpha} + u_{\alpha|\delta}) - 2C_{\alpha\beta} w.$$

Dodając stronami równania (5) i (14) otrzymamy następujące wyrażenie dla tensora zmiany krzywizny

$$(15) \qquad \varkappa_{\alpha\beta} + b_\alpha^\delta \varepsilon_{\delta\beta} + b_\beta^\delta \varepsilon_{\delta\alpha} = -w|_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} + (b_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) - \underline{b_{\alpha|\beta}^\delta u_\delta},$$

gdzie $\omega_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2}(u_{\lambda|\alpha} - u_{\alpha|\lambda})$ jest tensorem obrotu dookoła normalnej do powierzchni środkowej.

Ostatni, podkreślony wyraz jest rzędu $\bar{\varrho} L/L_R$ w porównaniu z pozostałymi wyrazami zawierającymi funkcje przemieszczenia u_α. Jeżeli $o(u_\alpha) \sim o(w)$ wtedy w porównaniu z pierwszym, największym wyrazem $w|_{\alpha\beta}$ jest on rzędu $\varrho_3 = \bar{\varrho} L^2/\pi L_R R$. Ponieważ przyjęliśmy, że $o(u_\alpha) < o(w)$, (odpowiada to przypadkom najczęściej spotykanym w technice), oraz $\bar{\varrho} < 1$, $L/L_R < 1$, $L/R < 1$ a więc dla rozpatrywanej klasy powłok o wolno zmiennych krzywiznach podkreślony wyraz jest mały i może być pominięty. Wtedy otrzymamy

$$(16) \qquad \varkappa_\lambda^\lambda = -w|_\lambda^\lambda - b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} w - 2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta},$$

gdyż wyraz $(b_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) a^{\alpha\beta} = 0$.

Zajmijmy się teraz drugim wyrazem równania $(1)_2$

$$(17) \qquad (S^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = (R^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta}.$$

Wykorzystując wyrażenie (9) otrzymamy

$$(18) \qquad (R^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) b_{\alpha\beta} = -(d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \Phi|_{\lambda\mu} + K a^{\alpha\beta} \Phi) b_{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha b_{\alpha\beta} M^{\gamma\beta} = \Delta_k \Phi + c_{\gamma\beta} M^{\gamma\beta}.$$

gdzie operator $\Delta_k \Phi$ oznacza następujące wyrażenie

$$(19) \qquad \Delta_k \Phi = -d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} \Phi|_{\lambda\mu} - 2HK\Phi,$$

Przekształćmy teraz wyrażenie (18) wykorzystując tożsamość (13). Mamy

$$(20) \qquad C_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = D C_{\alpha\beta} [a^{\alpha\beta} \varkappa_\lambda^\lambda - (1-\nu) d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \varkappa^{\lambda\mu}] = $$
$$= (4H^2 - 2K) D \varkappa_\lambda^\lambda + (1-\nu) DK \varkappa_\lambda^\lambda - (1-\nu) 2H d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} \varkappa_{\lambda\mu}.$$

Wykorzystajmy w powyższym równaniu wyrażenie (16) dla tensora zmiany krzywizny $\varkappa_\lambda^\lambda$. Wyrażenie to zawiera człon $2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$ który jak się można przekonać po podstawieniu do równania równowagi (18) daje wyraz rzędu h^2/R^2 w porównaniu z pozostałymi wyrazami tego równania. Aby to udowodnić zauważmy, że wyrażenie to można wyrazić przez funkcję naprężeń Φ korzystając z równań konstytutywnych $(3)_1$

$$(21) \qquad 2b^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{2}{Eh} [b^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} S_\lambda^\lambda - (1+\nu) b^{\alpha\beta} d_{\alpha\lambda} d_{\beta\mu} S_{\lambda\mu}].$$

Ponieważ

$$(22) \qquad S_\lambda^\lambda = R_\lambda^\lambda + 2b_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu} = -(\Delta\Phi + 2K\Phi) + 4HD\varkappa_\lambda^\lambda - 2(1-\nu) D b_{\alpha\beta} d^{\alpha\lambda} d^{\beta\mu} \varkappa_{\lambda\mu}$$

Przekształcając podobnie drugi wyraz w wyrażeniu (21) otrzymamy

$$b^{\alpha\beta}d_{\alpha\lambda}d_{\beta\mu}S^{\lambda\mu} = -b^{\alpha\beta}\Phi|_{\alpha\beta}-2HK\Phi+2(1+\nu)DK\varkappa^{\lambda}_{\lambda}. \tag{23}$$

Po podstawieniu do równania (21) mamy

$$2b^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{2}{Eh}\{-2H(\Delta\Phi+2K\Phi)+8H^2D\varkappa^{\lambda}_{\lambda}-4(1-\nu)DHb_{\alpha\beta}d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu}+ \\ +(1+\nu)[b^{\alpha\beta}\Phi|_{\alpha\beta}+2HK\Phi-2(1+\nu)DK\varkappa^{\lambda}_{\lambda}]\}. \tag{24}$$

Powyższą zależność można wykorzystać do obliczenia $\varkappa^{\lambda}_{\lambda}$.

Zauważmy, że gdy podstawimy (24) do równania (16), otrzymamy po prawej stronie tego równania wyrazy rzędu $(D/EhR^2)\varkappa^{\lambda}_{\lambda}$. Współczynnik D/EhR^2 stojący przed tymi wyrażeniami jest rzędu

$$h^2/R^2 \ll 1; \quad (D/EhR^2 = Eh^2/12(1-\nu^2)ER^2).$$

A więc wyrazy mnożone przez ten współczynnik można pominąć w porównaniu z wyrazem $\varkappa^{\lambda}_{\lambda}$ występującym po lewej stronie równania (16). Wtedy otrzymamy następujące wyrażenie dla drugiego wyrazu równania równowagi (18)

$$(R^{\alpha\beta}+b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta})b_{\alpha\beta} = \Delta_k\Phi+D(4H^2-(1+\nu)K)\Big\{-w|^{\lambda}_{\lambda}+b^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}w- \\ -\frac{2}{Eh}[-2H(\Delta\Phi+2K\Phi)+(1+\nu)(b^{\alpha\beta}\Phi_{|\alpha\beta}+2HK\Phi)]\Big\}+2(1-\nu)HDd^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}a_{\alpha\beta}\varkappa_{\lambda\mu}. \tag{25}$$

Porównajmy teraz wyrazy zawierające drugie pochodne funkcji stojące w nawiasie kwadratowym w (25) z wyrazem $\Delta_k\Phi$ znajdującym się po prawej stronie powyższego równania (25). Widzimy, że wyrazy te, zawierające tego samego rzędu pochodne funkcji Φ są mnożone przez współczynnik D/EhR^2 rzędu h^2/R^2, a więc mogą być w tym równaniu pominięte. Otrzymujemy więc

$$(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta})b_{\alpha\beta} = \Delta_k\Phi-(4H^2-(1+\nu)K)D[w|^{\lambda}_{\lambda}+ \\ (4H^2-2K)w]-2(1-\nu)HDd^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}b_{\alpha\beta}\varkappa_{\lambda\mu} \tag{26}$$

Jest to wynik jaki otrzymalibyśmy pomijając wyraz $2b^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$ w wyrażeniu (16). Wynik ten jest interesujący gdyż oznacza, że w równaniu równowagi rzutów sił na kierunek normalny efekty zmiany krzywizny przy małych odkształceniach powierzchni środkowej $\varepsilon_{\alpha\beta} \ll 1$ możemy obliczyć tak jak dla powierzchni odkształcającej się izometrycznie, to znaczy przy $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$. Wpływ tych odkształceń jest jak się okazuje rzędu h^2/R^2. Jeżeli wykorzystamy ten wniosek otrzymamy, że przekształcając równanie równowagi (26) możemy przyjąć dla tensora zmiany krzywizny

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta}-c_{\alpha\beta}w. \tag{27}$$

Przekształćmy obecnie ostatni wyraz występujący w równaniu (26), po wykorzystaniu (15) otrzymamy

$$d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}b_{\alpha\beta}\varkappa_{\lambda\mu} = \Delta_k w+\underline{d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}b_{\alpha\beta}[b^{\varrho}_{\lambda}(\varepsilon_{\varrho\mu}+\omega_{\varrho\mu})+b^{\varrho}_{\mu}(\varepsilon_{\varrho\lambda}+\omega_{\varrho\lambda})]}. \tag{28}$$

Podkreślony wyraz daje w równaniu (26) wyrażenie rzędu

$$HD\frac{1}{R^2}\,o(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^3Eh}\,o(S_{\alpha\beta}) = \frac{h^2\pi^2}{12R^3L^2}\,o(\Phi). \quad \text{przy} \quad o(\varepsilon_{\alpha\beta}) \simeq o(\omega_{\alpha\beta}).$$

Porównajmy teraz ten wyraz z największym wyrazem w równaniu (26) zawierającym funkcję naprężeń, to znaczy z wyrazem $\Delta_k\phi$ rzędu $\frac{1}{R}\frac{\pi^2}{L^2}o(\phi)$. Widzimy, że podkreślony wyraz daje błąd rzędu $(h/R)^2$ i może być pominięty. Ostatecznie otrzymujemy równanie (28) w postaci

$$(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta})b_{\alpha\beta} = \Delta_k\phi-(4H^2-(1+\nu)K)D[\Delta w+(4H^2-2K)w]+2(1-\nu)HD\Delta_k w.$$

Zajmijmy się obecnie pierwszym wyrazem równania $(1)_2$.

$$M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} = D[\varkappa^{\alpha}_{\alpha}|^{\beta}_{\beta}-(1-\nu)d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu|\alpha\beta}]. \tag{29}$$

Pierwsza część tego wyrażenia przedstawia $\Delta\varkappa^{\beta}_{\beta}$. Chcąc przekształcić drugi wyraz (29), który jak się można przekonać ma małą wielkość w porównaniu z pierwszym wyrazem w nawiasie, wykorzystajmy zależność (15) omówioną powyżej. Wtedy po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy

$$d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\varkappa_{\lambda\mu|\alpha\beta} = 2K\Delta w+2H(\Delta_k w+2HKw)-d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}[b^{\rho}_{\lambda}(\varepsilon_{\rho\mu}+\omega_{\rho\mu})+b^{\rho}_{\mu}(\varepsilon_{\rho\lambda}+\omega_{\rho\lambda})]_{|\alpha\beta}. \tag{30}$$

Pełne równanie równowagi $(1)_2$ ma wtedy postać

$$\begin{aligned} -M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}-(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta})b_{\alpha\beta} = {} & D\Delta[\Delta+(4H^2-2K)]w+ \\ & +2(1-\nu)D[K\Delta w+H(\Delta_k w+HKw)]+D(4H^2-(1+\nu)K)[\Delta w+(4H^2-2K)w]+ \\ & +2(1-\nu)HD\Delta_k w-\Delta_k\Phi+\underline{(1-\nu)Dd^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}[b^{\rho}_{\lambda}(\varepsilon^{\rho}_{\mu}+\omega_{\rho\mu})+b^{\rho}_{\mu}(\varepsilon_{\rho\lambda}+\omega_{\rho\lambda})]_{|\alpha\beta}} = P^3 \end{aligned} \tag{31}$$

Łatwo wykazać, że podkreślony wyraz jest rzędu

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\cdot\frac{1}{R}\frac{1}{Eh}\frac{\pi^4}{L^4}o(\Phi) \qquad (\text{przy} \quad o(\varepsilon_{\alpha\beta}) \simeq o(\omega_{\alpha\beta}),$$

Porównując go z wyrazem $\Delta_k\phi$ widzimy, że jest on rzędu $h^2/L^2 \ll 1$ i może być pominięty.

Powyższe równanie zawiera jedynie dwie nieznane funkcje ω i ϕ i może być uznane za pierwsze z dwu podstawowych równań powłoki o wolno zmiennych krzywiznach. Równanie to można nieco uprościć jeżeli do przekształcenia pewnych małych wyrazów wykorzystamy równanie zgodności odkształceń $(2)_1$

$$d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\varkappa_{\beta\lambda|\mu\alpha} = -d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}b^{\varrho}_{\lambda}(\varepsilon_{\rho\beta|\mu}+\varepsilon_{\rho\mu|\beta}-\varepsilon_{\beta\mu|\rho})]_{|\alpha}. \tag{32}$$

Porównując zależności (30) i (32) widzimy, że

$$2H\Delta_k w = -2K\Delta w-4H^2Kw+\frac{1}{EhR}\frac{\pi^4}{L^4}o(\Phi).$$

Jeżeli wykorzystamy tę zależność do przekształcenia pewnych małych wyrazów w równaniu (31) otrzymamy równanie w którym wyrazy wynikające z udziału odkształceń błonowych i obrotów ($\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\omega_{\alpha\beta}$) są rzędu $\frac{\pi^4 h^2}{12(1+\nu)L^4R}o(\phi)$. W porównaniu z wyrazem $\Delta_k\phi$, którego rząd wielkości wynosi $(\pi^2/RL^2)o(\Phi)$, są one rzędu h^2/L^2 a więc mogą być pominięte. Ostatecznie otrzymujemy pierwsze podstawowe równanie w postaci

$$D[\Delta+4H^2-(3-\nu)K][\Delta+4H^2-2K]w+4(1-\nu)DK(H^2-k)w+\Delta_k\Phi = P^3. \tag{33}$$

Powyższe równanie różni się od równania poprzednio wyprowadzonego w pracy [3] jedynie małym wyrazem $4(1-\nu)DK(H^2-K)w$ rzędu L^4/R^4, który może być najczęściej pominięty. Dla powłoki kulistej i walcowej wyraz ten równy jest zeru.

Aby otrzymać drugie równanie zawierające te same dwie nieznane funkcje, to jest ugięcie normalne w i funkcję naprężeń ϕ wykorzystajmy równanie zgodności odkształceń $(2)_1$

$$d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}[\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda}-b_{\alpha\mu}\varkappa_{\beta\lambda}]+K\varepsilon^{\lambda}_{\lambda} = 0.$$

W równaniu tym możemy odkształcenia wyrazić przez siły błonowe, a te z kolei przez funkcje naprężeń Φ korzystając z wzorów (3). Mamy więc

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh}[a_{\alpha\beta}\delta^{\lambda}_{\lambda}-(1+\nu)d_{\alpha\lambda}d_{\beta\mu}S^{\lambda\mu}],$$

gdzie $S^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta}+2b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta}$.

Po podstawieniu $S^{\lambda\mu}$ z (8) otrzymujemy

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{Eh}[a_{\alpha\beta}\Delta\Phi-(1+\nu)\Phi_{|\alpha\beta}+(1-\nu)a_{\alpha\beta}K\Phi]+\frac{2D}{Eh}\big[(-a_{\alpha\beta}2H+(1+\nu)b_{\alpha\beta})\varkappa^{\lambda}_{\lambda}+$$
$$+(1-\nu)a_{\alpha\beta}b^{\rho\lambda}\varkappa_{\rho\lambda}+(1-\nu^2)(b^{\rho}_{\alpha}\varkappa_{\rho\beta}-2H\varkappa_{\alpha\beta})\big].$$

Po podstawieniu do równania $(2)_1$ i wykonaniu różniczkowania otrzymujemy

$$(34)\qquad d^{\alpha\beta}d_{\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda} = \frac{1}{Eh}\{\Delta(\Delta\phi+(1-\nu)K\Phi)+(1+\nu)d^{\alpha\beta}d_{\lambda\mu}\Phi_{|\alpha\mu\beta\lambda}\}+\frac{2D}{EhR}o(\varkappa^{\lambda}_{\lambda}|^{\beta}_{\beta}).$$

Można się przekonać, po wykonaniu dość pracochłonnych przekształceń, że ostatni wyraz równania (34) zawiera jedynie wyrazy rzędu drugich pochodnych funkcji w mnożone przez współczynnik $2D/EhR^3$. Przekształćmy jeszcze powyższą zależność, mamy

$$d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\Phi|_{\alpha\mu\beta\lambda} = Ka^{\gamma\lambda}\Phi|_{\gamma\lambda}+K|_{\lambda}\Phi|^{\lambda}.$$

Ostatni wyraz $K|_{\lambda}\phi|^{\lambda}$ w porównaniu z wyrazem poprzedzającym jest rzędu $\bar{\varrho}L/L_R$. Jednakże gdy porównamy go z największym wyrazem $\Delta\Delta\Phi$ w równaniu (34) otrzymujemy, że pominięcie go daje błąd rzędu $\varrho_2 = \bar{\varrho}L^3/\pi^2R^2L_R$.

Ponieważ $\bar{\varrho} < 1$; $(L/R)^2 < 1$; $L/L_R < 1$; $\pi^2 \simeq 10$, widzimy, że pominięcie to jest dopuszczalne w ramach rozpatrywanego wariantu zgięciowej teorii powłok cienkich, $(\varrho_2 \ll 1)$.

Pomijając wyraz zawierający pochodną krzywizny Gaussa K otrzymamy

$$(35)\qquad d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda} = \frac{1}{Eh}\{\Delta(\Delta\phi+(1-\nu)K\Phi)+(1+\nu)K\Delta\Phi\}+$$
$$+\frac{2D}{EhR^3}o(\Delta w) = \frac{1}{Eh}\{\Delta(\Delta\phi+2K\Phi)\}+\frac{2D}{EhR^3}o(\Delta w).$$

Drugi wyraz równania $(2)_1$ można przekształcić, wykorzystując zależność (16). Otrzymamy wtedy

$$(36)\qquad -d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}b_{\alpha\mu}\varkappa_{\beta\lambda} = -\Delta_k w+d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}b_{\alpha\mu}2b^{\delta}_{\beta}\varepsilon_{\delta\lambda} = -\Delta_k w+\frac{2}{Eh}(1-\nu)K[\Delta\Phi+2K\Phi].$$

Trzeci wyraz $K\varepsilon^{\lambda}_{\lambda}$ po wyrażeniu $\varepsilon_{\alpha\beta}$ przez funkcję naprężeń otrzymuje postać

$$(37)\qquad K\varepsilon^{\lambda}_{\lambda} = -\frac{1-\nu}{Eh}K[\Delta\phi+2K\Phi].$$

Dodając wyrazy (35), (36) i (37) otrzymamy równanie zgodności odkształceń w postaci

$$\frac{1}{Eh}\{\Delta(\Delta\Phi+2K\Phi)+(1-\nu)K(\Delta+2K)\Phi\}-\Delta_k w+\frac{2D}{EhR^3}\,o(\Delta w) = 0. \tag{38}$$

Porównajmy ostatni wyraz powyższego równania, mnożony przez współczynnik D/EhR^3 z wyrazem $\Delta_k w$. Ponieważ współczynnik ten jest rzędu h^2/R^2 wyrażenie to może być pominięte. Jeżeli nie skorzystamy ze wspomnianych przedtem przekształceń i porównamy ostatni wyraz równania (34) z $\Delta_k w$ otrzymamy, że jest on rzędu h/L^2 co również dowodzi, że może być pominięty. Ostatecznie możemy zapisać równanie (38) w prostej postaci

$$\frac{1}{Eh}[\Delta+(1-\nu)K][\Delta+2K]\Phi-\Delta_k w = 0. \tag{39}$$

W wyniku przekształceń otrzymaliśmy układ dwu równań różniczkowych (38) i (39) zawierających dwie nieznane funkcje w i ϕ, które mogą być uznane za podstawowe równania powłoki o wolno zmiennych krzywiznach. Rozwiązanie tych równań określa w i ϕ, a następnie wszystkie poszukiwane wielkości. Siły przekrojowe $N^{\alpha\beta}$ otrzymujemy z wzorów $N^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta}+b^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta}$.

3. Wariant drugi, tak zwany „najlepszy wariant równań teorii cienkich powłok"

Rozważmy jeszcze drugi wariant równań podstawowych zwany „najlepszym" wariantem równań teorii powłok cienkich. Wtedy podstawowe równania przyjmują postać [4]

Równania równowagi

$$\begin{gathered}\left[S^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(b^{\beta}_{\lambda}M^{\alpha\lambda}-b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta})\right]_{|\beta}-b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}|_{\beta}+P^{\alpha} = 0,\\ M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}+S^{\mu\beta}b_{\alpha\beta}+P^3 = 0.\end{gathered} \tag{40}$$

Równania zgodności odkształceń

$$\begin{gathered}d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}[\varepsilon_{\alpha\mu|\beta\lambda}-b_{\alpha\mu}\varrho_{\lambda\beta}] = 0,\\ d^{\alpha\beta}d^{\lambda\mu}\left[\varrho_{\beta\lambda}-\frac{1}{2}(b^{\gamma}_{\beta}\varepsilon_{\gamma\lambda}+b^{\gamma}_{\lambda}\varepsilon_{\gamma\beta})\right]_{|\mu}+b^{\gamma}_{\lambda}(\varepsilon_{\gamma\beta|\mu}+\varepsilon_{\gamma\mu|\beta}-\varepsilon_{\beta\mu|\gamma})\} = 0.\end{gathered} \tag{41}$$

Równania konstytutywne

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh}[(1+\nu)S_{\alpha\beta}-\nu S^{\lambda}_{\lambda}a_{\alpha\beta}], \qquad M^{\alpha\beta} = D[(1-\nu)\varrho^{\alpha\beta}+\nu\varrho^{\lambda}_{\lambda}a^{\alpha\beta}]. \tag{42}$$

gdzie $\varrho_{\alpha\beta}$ jest tzw. modyfikowanym tensorem zmiany krzywizny danym przez

$$\varrho_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(b^{\gamma}_{\alpha}\varepsilon_{\gamma\beta}+b^{\gamma}_{\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}), \tag{43}$$

Pomiędzy rzeczywistymi, niesymetrycznymi tensorami sił i momentów wewnętrznych a ich symetrycznymi reprezentacjami istnieją następujące zależności

$$N^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}. \tag{44}$$

Równanie równowagi $(40)_1$ dla powłok o wolno zmiennych krzywiznach można przedstawić w postaci

$$\left[S^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left(b^{\beta}_{\lambda}M_{\alpha\lambda}-3b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}\right)\right]_{|\beta}+P^{\alpha}=0. \tag{45}$$

Równanie to może być spełnione tożsamościowo. Jeżeli wprowadzimy funkcję Φ określoną jako

$$S^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left(b^{\beta}_{\lambda}M^{\alpha\lambda}-3b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}\right)=R^{\alpha\beta}=-d^{\alpha\lambda}d^{\beta\mu}\Phi_{|\lambda\mu}-Ka^{\alpha\beta}\phi. \tag{46}$$

Wyrazy drugiego z równań równowagi $(40)_2$ przyjmują po przekształceniach następującą postać

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} &= \Delta_k\Phi+D\{[4H^2-(1+\nu)K]\varkappa^{\lambda}_{\lambda}-2H(1-\nu)\Delta_k w\},\\ M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} &= -D\{\Delta[\Delta+(4H^2-2K)]w+2(1-\nu)K(\Delta+2H^2)w+2(1-\nu)H\Delta_k w\}, \end{aligned} \tag{47}$$

gdzie $\Delta_k\phi = b_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$.

Po dodaniu otrzymujemy równanie identyczne z równaniem (30) otrzymanym poprzednio. Drugie równanie podstawowe wyprowadzone na podstawie równania zgodności odkształceń $(41)_1$ przyjmuje również tę samą postać co poprzednio, gdyż nie występujący w tym równaniu wyraz $K\varepsilon^{\lambda}_{\lambda}$ jest skompensowany wyrazem $\frac{1}{2}\left(b^{\gamma}_{\alpha}\varepsilon_{\gamma\beta}+b^{\gamma}_{\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}\right)$ pojawiającym się w wyrażeniu (43) dla tensora zmiany krzywizny. W rezultacie otrzymujemy drugie równanie podstawowe identyczne z równaniem (39).

Równania dla sił przekrojowych $N^{\alpha\beta}$ są następujące

$$N^{\alpha\beta}=R^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left(b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}-b^{\beta}_{\lambda}M^{\alpha\lambda}\right) \tag{48}$$

i różnią się od zależności w poprzednio rozpatrywanym wariancie równań podstawowych.

4. Warunki brzegowe

Podstawowy układ równań (33, 39) teorii powłok jest ósmego rzędu. Pozwala więc na spełnienie czterech warunków brzegowych na każdym brzegu powłoki, podobnie jak ma to miejsce w klasycznej teorii powłok o małej wyniosłości. Warunki te mogą mieć charakter geometryczny lub statyczny.

Jeżeli geometryczne warunki brzegowe są wyrażone przez odkształcenia i zmiany krzywizny wtedy trzeba wyrazić odkształcenia przez funkcję naprężeń, korzystając z wzorów (3) oraz z zależności (8). Zmiany krzywizny powierzchni środkowej określone są równaniem (15). Ponieważ, jak wykazano poprzednio wyrazy zawierające funkcje składowych tensora odkształcenia powierzchni środkowej dają w podstawowych równaniach (33) (39) efekty rzędu $(h/R)^2$ i $(h/L)^2$, uzasadnione jest więc pominięcie ich również w warunkach brzegowych dotyczących tych równań. Wtedy możemy korzystać z wyrażenia (27) przy określeniu składowych tensora zmiany krzywizny. Możliwe jest również spełnienie warunków brzegowych w przemieszczeniach. Badamy wtedy spełnienie warunków brzegowych przez ugięcie w i $\frac{\partial w}{\partial n}$ oraz składowe styczne wektora przemieszczenia u_α. Poszukiwanie składowych u_α wymaga scałkowania zależności (6).

Statyczne warunki brzegowe można wyrazić przez siły i momenty brzegowe. Korzystamy przy tym z zależności (4), (8) i $(3)_2$. Konieczne jest przy tym wprowadzenie statyczne równoważnych sił brzegowych. Podstawowy układ równań wraz z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi może być w ramach przyjętych przybliżeń wyprowadzony z warunków wariacyjnych. Jednakże zagadnienie to będzie przedmiotem oddzielnej publikacji.

5. Wnioski

Wyprowadzenie wyżej przedstawionych równań teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach opiera się na założeniu, że możemy pomijać wyrazy rzędu h^2/R^2, h^2/L^2 w porównaniu z jednością oraz małe wyrazy określone w § 1, wynikające z efektu zmienności krzywizny powierzchni środkowej powłoki. Przyjęto również, że długość fali ugięcia naprężenia jest rzędu $\sim \sqrt{Rh}$ i $L < R$. Ponieważ wiele problemów technicznych spełnia przyjęte warunki, równania te, dzięki swej prostocie, mogą być użyteczne w obliczeniach inżynierskich.

Powyższe równania są równaniami liniowej teorii powłok gdyż wszystkie efekty nieliniowe wynikające ze zmiany geometrii powłoki zostały pominięte. Jednakże łatwo można je uogólnić na przypadek nieliniowy dotyczący umiarkowanie dużych ugięć. Będzie to tematem następnej publikacji.

Literatura cytowana w tekście

1. S. A. Łukasiewicz; *Uzupełnienie równań technicznej teorii powłok*. Rozprawy inżynierskie **11**, 1 (1963).
2. S. A. Łukasiewicz; *The equation of the Technical Theory of Shells with the Effect of Transverse Shear Deformations*. Q. Appl. Math. 1, 489 - 497 (1971).
3. S. A. Łukasiewicz; *On the equations of the Theory of Shells of Slowly Varying Curvatures*. Journal of Appl. Math. and Physics (ZAMP) vol. **22**, 6 (1971).
4. W. T. Koiter; *On the nonlinear Theory of thin Elastic Shells*. Proceedings of Kon. Ned. Ak. Wet. S.B. 69 No 1, 1966.
5. W. T. Koiter; *A comparsion between John's refined interior shells equations and classical shell theory*. Journ. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP) 20, 642 - 652 (1969).
6. W. T. Koiter; J. G. Simmonds; *Foundations of shell theory „Theoretical and applied Mechanics"*. Proc. 13th IUTAM Congr. Moscow 1972. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973 p. 150 - 175.
7. W. Pietraszkiewicz; *Introduction to the non-linear theory of shells*. Mitteilungen ans dem Institut für Mechanics, Ruhr-Universität Bochum, 1977.

Резюме

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ОБОЛОЧЕК С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КРИВИЗНАМИ.

В работе рассмотрены фундаментальные уравнения теории оболочек с медленно изменяющимися кривизнами. В сравнении с предыдущими работами автора здесь дан более точен и систематичиский вывод уравнений, а также оценка точности решения.

Система фундаментальных дифференциальных уравнений оболочки сведена к системе двух дифференциальных уравнений для нормального изгиба и функции напряжений.

Проанализовано два варианты дифференциальных уравнений и доказано, что для оболочек с медленно изменяющимися кривизнами, получены фундаментальные уравнения идентичны.

Summary

EQUATIONS OF THE LINEAR THEORY OF SHELLS WITH SLOWLY VARYING CURVATURES

In the paper the fundamental equations are presented of the theory of shells with slowly varying curvatures. In comparison with the author previous works, here, a consistent and complete derivation of the fundamental equations is given. The system of differential equations of the theory of shells has been reduced to the system of two differential equations for the normal deflection and the stress function. Two variants of the differential equations have been analysed and it has been proved that in the case of shells of slowly varying curvature they lead to the identical fundamental equations.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 kwietnia 1980 roku