

STATECZNOŚĆ I STAN ZAKRYTYCZNY SWOBODNIE PODPARTEJ  
TARCZY TRAPEZOWEJ PODDANEJ JEDNOKIERUNKOWEMU ŚCISKANIU

RYSZARD GRĄDZKI (ŁÓDŹ)

OZNACZENIA:

$\alpha$  — kąt nachylenia bocznych krawędzi trapezu do osi Ox

$2b$  — długość większej podstawy trapezu

$2a$  — wysokość trapezu

$\lambda = \frac{a}{b}$  — współczynnik kształtu tarczy

$h$  — grubość tarczy ( $h = \text{const}$ )

$f$  — parametr ugięcia tarczy

$f_0$  — parametr wygięcia wstępnego tarczy

$f^* = \frac{f}{h}, f_0^* = \frac{f_0}{h}$  — bezwymiarowe parametry ugięcia

$P^*$  i  $P_{kr}^*$  — bezwymiarowe wartości siły  $P$  obciążającej tarczę i siły krytycznej  $P_{kr}$

$n = \frac{P}{P_{kr}}$  — współczynnik obciążenia tarczy

$k$  — współczynnik stateczności

$E$  — moduł Younga

$\nu$  — liczba Poissona (w obliczeniach przyjęto  $\nu = 0,3$ )

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — płytowa sztywność zginania

$\sigma^* = \sigma \frac{4b^2}{Eh^2}$  — naprężenia bezwymiarowe

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — naprężenia stanu błonowego

$\sigma_{xg}, \sigma_{yg}, \tau_{xyg}$  — naprężenia stanu zgięciowego

$\sigma_{zr}^*$  — bezwymiarowe naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{zr}^* = \sqrt{\sigma_{x_c}^{*2} + \sigma_{y_c}^{*2} - \sigma_{x_c}^* \sigma_{y_c}^* + 3\tau_{xy_c}^{*2}}$$

gdzie:

$$\sigma_{x_c}^* = \sigma_x^* + \sigma_{xg}^*$$

$$\sigma_{y_c}^* = \sigma_y^* + \sigma_{yg}^*$$

$$\tau_{xy_c}^* = \tau_{xy}^* + \tau_{xyg}^*$$

### 1. Wstęp

Często spotykanym elementem nośnym blachownicowych lub skrzynkowych ustrojów dźwigarowych są cienkie tarcze, o kształcie trapezu. Tarcze te — jako wydzielone elementy nośne ustrojów dźwigarowych — pracują na ogół w złożonym stanie obciążenia. Przenoszą one głównie obciążenia działające w ich płaszczyźnie i z tego powodu mogą ulegać wyboczeniu. Podstawowym więc zagadnieniem przy analizie pracy takich tarcz jest zagadnienie utraty stateczności. W odniesieniu do tarcz trapezowych dotychczasowy stan wiedzy na temat stanów krytycznych tych tarcz jest stosunkowo skromny. Nieliczne prace z tego zakresu uznać można za pierwsze próby poznania zagadnienia. Ten stan rzeczy wynika — ogólnie rzecz biorąc — ze znacznie większych trudności jakie trzeba pokonać przy rozwiązywaniu płaskich zagadnień teorii sprężystości tarcz trapezowych — w stosunku do tych jakie wynikają przy rozpatrywaniu takich samych zagadnień dotyczących np. tarcz prostokątnych czy kołowych, tj. tarcz o geometrycznie prostszym kształcie.

W odniesieniu do zagadnień stateczności trudności te dodatkowo rosną z uwagi na dobór odpowiedniej funkcji ugięcia spełniającej warunki brzegowe zagadnienia, a jednocześnie możliwie dokładnie opisującej kształt ugiętej powierzchni środkowej tarczy trapezowej — po jej utracie stateczności. Złożoność — z uwagi na kształt tarczy trapezowej — postaci tej funkcji prowadzi w dalszych rozważaniach do znacznej komplikacji otrzymywanych wzorów i w konsekwencji do wzrostu trudności natury matematycznej.

Z tego względu znane do tej pory rozwiązania zagadnienia stateczności tarcz trapezowych oparte są na daleko idących założeniach upraszczających. Powoduje to, że przyjęte schematy obliczeniowe takich tarcz w małym stopniu odpowiadają warunkom podparcia oraz obciążenia spotykanych w zastosowaniach technicznych istniejących konstrukcji.

Zagadnieniem stateczności tarcz trapezowych zajmowali się: B. KLEIN [5], L. ROOTS [6], [7], L. PREGIER [8], [9], [10], A. POŁOZKOW i I. GORDIJENKO [11], [12], V. ILLE i G. BARSAN [13].

Zagadnienie — określone tytułem pracy — rozwiązano w oparciu o równania nieliniowej teorii cienkich płyt sprężystych [2].

### 2. Geometria i stan obciążenia tarczy

Przedmiotem rozważań jest cienka izotropowa tarcza w kształcie trapezu równoramiennego o stałej grubości  $h$ , swobodnie podparta wzdłuż obwodu. Tarczę tę opisano w prostokątnym układzie współrzędnych  $O, x, y, z$ . Oś  $Oz$  skierowano prostopadłe do płaszczyzny  $O, x, y$  pokrywającej się z płaszczyzną środkową tarczy (rys. 2.1.). Początek tego układu przyjęto na osi symetrii trapezu, w połowie jego wysokości. Takie przyjęcie początku układu współrzędnych umożliwiło łatwiejsze przeprowadzenie odpowiedniej analizy porównawczej przy przejściu od tarczy trapezowej do tarczy prostokątnej. W przyjętym układzie współrzędnych równoległe oraz boczne krawędzie tarczy opisane są równaniami o postaci:

$$(2.1) \quad x = \pm a; \quad y = \pm g(x),$$

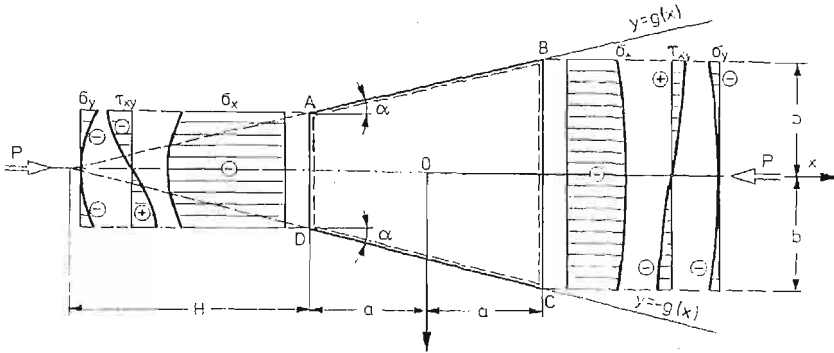
gdzie:

$$(2.2) \quad g(x) = m(x-a) + b.$$

zaś

$$(2.3) \quad m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2a+H}.$$

Granicznymi postaciami tak opisaney tarczy jest: trójkąt — gdy  $H = 0$ , tj. gdy  $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2a}$  oraz prostokąt — gdy  $H = \infty$ , tj. gdy  $m = \operatorname{tg} \alpha = 0$ .



Rys. 2.1.

Dla opisu stanu naprężenia tarczy w kształcie trapezu równoramiennego, wykorzystano — znane z teorii sprężystości [1], — rozwiązanie zagadnienia płaskiego klina, obciążonego w swym wierzchołku siłą skupioną. Wartości składowych  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  błonowego stanu obciążenia w dowolnym punkcie tarczy określone są wówczas za pomocą następujących wzorów.

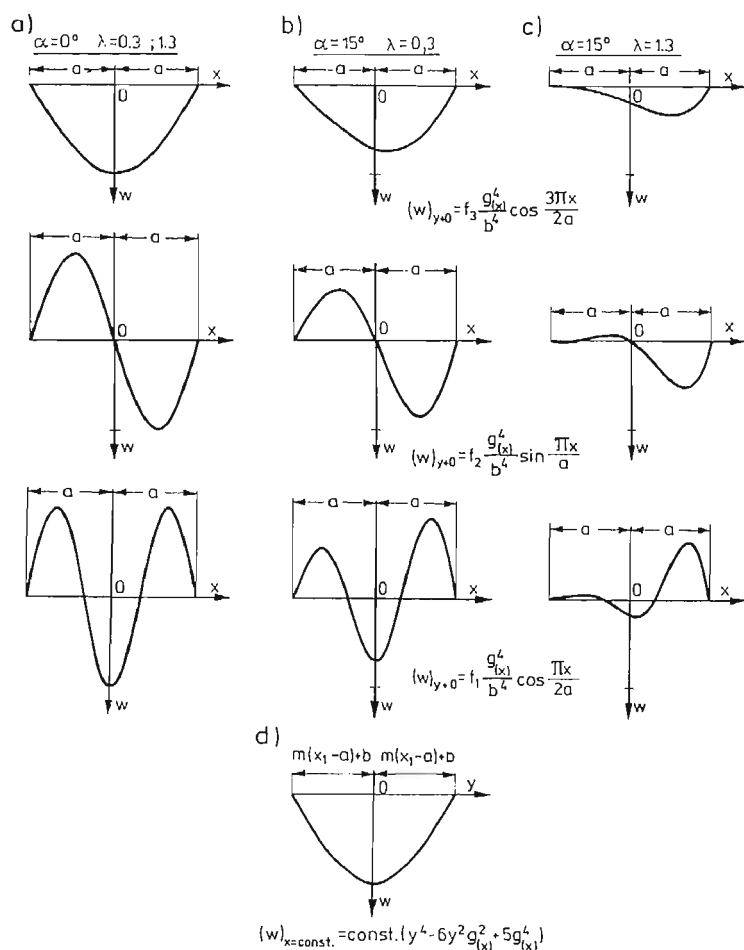
$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{P}{\left[ \frac{\operatorname{arctg} m}{m} + \frac{1}{1+m^2} \right] h} \cdot \frac{g^3(x)}{[g^2(x) + m^2 y^2]^2}, \\ \sigma_y &= - \frac{P}{\left[ \frac{\operatorname{arctg} m}{m} + \frac{1}{1+m^2} \right] h} \cdot \frac{g(x) y^2 m^2}{[g^2(x) + m^2 y^2]^2}, \\ \tau_{xy} &= - \frac{P}{\left[ \frac{\operatorname{arctg} m}{m} + \frac{1}{1+m^2} \right] h} \cdot \frac{g^2(x) y m}{[g^2(x) + m^2 y^2]^2}. \end{aligned}$$

Rozkład powyższych naprężeń na krawędziach  $x = \pm a$  tarczy przedstawiono na rys. 2.1.

## 3. Stan krytyczny

Analizę stanu krytycznego przyjętej do rozważań tarczy przeprowadzono dwiema metodami, a mianowicie: metodą energetyczną oraz metodą ortogonalizacji. Uczyniono to w celu sprawdzenia efektywności wymienionych metod z punktu widzenia dokładności wyznaczania wartości obciążenia krytycznego dla tego typu tarcz. Z uwagi bowiem na kształt tarczy trapezowej istnieją trudności dobrania takiej postaci funkcji ugięcia, która opisywałaby — w możliwie dokładny sposób — rzeczywisty kształt ugiętej powierzchni środkowej tarczy po jej utracie stateczności, a jednocześnie spełniała geometryczne i statyczne warunki brzegowe. Porównawcze zestawienie wymienionych dwóch metod rozwiązania zagadnienia — przy przyjęciu w obydwu przypadkach takiej samej postaci funkcji ugięcia  $w = w(x, y)$  — pozwoliło w końcowej fazie na wybór tych wyników, które w bardziej ścisły sposób opisują zjawisko utraty stateczności rozpatrywanej tarczy.

Funkcję ugięcia  $w = w(x, y)$ , opisującą — w sposób przybliżony — kształt ugiętej



Rys. 3.1.

powierzchni środkowej tarczy po utracie stateczności, przyjęto w następującej, trójparametrowej postaci:

$$(3.1) \quad w(x, y) = \left( f_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + f_2 \sin \frac{\pi x}{a} + f_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

W celu zilustrowania wpływu parametrów kształtu tarczy na postać poszczególnych składników funkcji  $w = w(x, y)$  przyjętej według wzoru (3.1.), na rys. 3.1. pokazano — w sposób poglądowy — wykresy zmian poszczególnych składników tej funkcji wzdłuż osi symetrii tarczy (wzdłuż osi  $Ox$ ) dla różnych wartości kąta  $\alpha$  pochylenia jej bocznych krawędzi.

Przedstawione tu krzywe odnoszą się do granicznego przypadku gdy  $m = \operatorname{tg} \alpha = 0$  odpowiadającego tarczy prostokątnej (krzywe „a'”) oraz do tarczy trapezowej o kącie pochylenia bocznych ramion trapezu względem osi  $Ox$  równym  $\alpha = 15^\circ$  — dla dwóch wartości stosunku  $\frac{a}{b} = \lambda$ , a mianowicie dla  $\lambda = 0,3$  (krzywe „b'”) oraz  $\lambda = 1,3$  (krzywe „c'”). Krzywa przedstawiona na rysunku „d'” odpowiada przekrojowi  $x = \text{const}$  z wyłączeniem przekrojów  $x = \pm a$ .

**3.1. Rozwiązanie zagadnienia metodą energetyczną.** Przy rozpatrywaniu zagadnienia stateczności tarczy metodą energetyczną uwzględniono energię sprężystą zginania tarczy oraz energię sił zewnętrznych [2].

Energia sił zewnętrznych, działających w płaszczyźnie środkowej tarczy, określona jest wzorem:

$$(3.1.1) \quad T = -\frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.$$

Odpowiednie wyrażenie określające energię zginania ma postać:

$$(3.1.2) \quad U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Krytyczne wartości sił  $P$ , obciążających tarczę wyznaczono z warunku [2]:

$$(3.1.3) \quad T = U$$

Krytyczną wartość tej siły określono wzorem:

$$(3.1.4) \quad P_{kr} = k \frac{\pi^2 D}{2b}.$$

W celu wyznaczenia krytycznej wartości siły ściskającej tarczę przyjęto — w pierwszym przybliżeniu — dwuparametrową funkcję ugięcia o postaci:

$$(3.1.5) \quad w(x, y) = \left( f_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + f_2 \sin \frac{\pi x}{a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę Timoshenki — Ritza. Wyniki obliczeń pokazano na rys. 3.2.2.

**3.2. Rozwiązanie zagadnienia metodą ortogonalizacji.** Równanie równowagi dowolnego elementu tarczy mającej — przy uwzględnieniu odkształcenia jej powierzchni środkowej — postać:

$$(3.2.1) \quad D\nabla^2\nabla^2w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

można zastąpić równoważnym układem dwóch równań [3]:

$$(3.2.2) \quad \nabla^2 M + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\nabla^2 w + \frac{M}{D} = 0,$$

gdzie:

$$(3.2.3) \quad M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}.$$

Przy takim ujęciu zarówno funkcja  $w = w(x, y)$  jak i funkcja  $M = M(x, y)$  muszą spełniać odpowiednio geometryczne i statyczne warunki brzegowe.

Dla tarczy przegubowo podpartej wzdłuż obwodu muszą być zatem spełnione warunki:

$$(3.2.4) \quad w = 0 \quad \text{i} \quad M = 0.$$

Dla wyznaczenia przybliżonej wartości siły krytycznej założono funkcje  $w = w(x, y)$  i  $M = M(x, y)$  w następujących postaciach:

$$(3.2.5) \quad w(x, y) = \left( f_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + f_2 \sin \frac{\pi x}{a} + f_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)],$$

$$(3.2.6) \quad M(x, y) = \left( m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + m_2 \sin \frac{\pi x}{a} + m_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

gdzie:  $m_1, m_2$  i  $m_3$  — podobnie jak  $f_1, f_2$  i  $f_3$  — są nieznanymi swobodnymi parametrami.

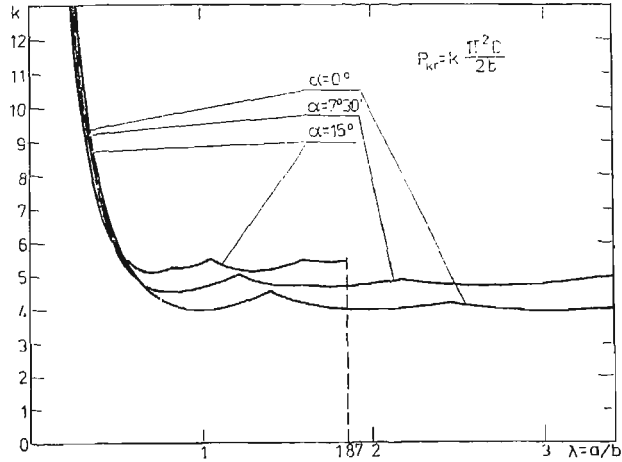
Wyżej określone funkcje  $w = w(x, y)$  oraz  $M = M(x, y)$  spełniają odpowiednio warunki brzegowe (3.2.4). Podobnie jak poprzednio siłę krytyczną i w tym przypadku określono wyrażeniem (3.1.4). Ponieważ funkcje  $w = w(x, y)$  oraz  $M = M(x, y)$  nie spełniają ściśle układu równań (3.2.2), w celu wyznaczenia wartości współczynnika stateczności  $k$  obciążenia krytycznego tarczy zastosowano metodę ortogonalizacji. Otrzymuje się wówczas następujący układ równań:

$$(3.2.7) \quad \int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left[ \nabla^2 M + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w dx dy = 0,$$

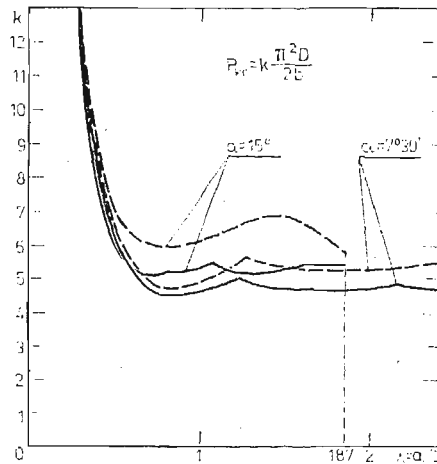
$$\int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left[ \nabla^2 w + \frac{M}{D} \right] \delta M dx dy = 0.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymano układ sześciu jednorodnych równań liniowych zawierających nieznanne swobodne parametry  $f_1, f_2$  i  $f_3$  oraz  $m_1, m_2$  i  $m_3$ . Układ tych równań daje rozwiązania różne od zera tylko wówczas, gdy wyznacznik tego układu jest równy zeru. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3.2.1.

Na rys. 3.2.2. przedstawiono krzywe  $k = k(\lambda)$  otrzymane metodą energetyczną i metodą ortogonalizacji dla kątów  $\alpha = 7^\circ 30'$  i  $\alpha = 15^\circ$  przy założeniu tej samej dwuparametrowej funkcji ugięcia (3.1.5). Linie ciągłe odpowiadają rozwiązaniu zagadnienia metodą ortogonalizacji, natomiast linie przerywane rozwiązanie metodą energetyczną. Z wy-



Rys. 3.2.1.



Rys. 3.2.2.

kresów tych wynika, że poprawniejsze wyniki otrzymuje się w przypadku rozwiązania zagadnienia metodą ortogonalizacji, ponieważ z tej metody otrzymano mniejsze wartości współczynników stateczności  $k$  dla takich samych wartości współczynnika  $\lambda$ . Zastosowaną tu metodę ortogonalizacji należy zatem uznać za właściwą przy rozwiązywaniu postawionego zagadnienia.

## 4. Stan zakrytyczny

Analizę stanu zakrytycznego rozpatrywanej tarczy trapezowej przeprowadzono przy założeniu, że powierzchnia środkowa tarczy nie jest idealnie płaska, lecz ma wstępne wygięcie, opisane funkcją  $w_0 = w_0(x, y)$ . Rozwiązanie tego zagadnienia przeprowadzono w oparciu o równania różniczkowe Kármána nieliniowej teorii cienkich płyt. Postępując podobnie jak przy analizie stanu krytycznego, układ dwóch równań Kármána zastąpiono równoważnym układem trzech równań o postaci:

$$(4.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = E \left\{ \left[ \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right\},$$

$$(4.2) \quad \nabla^2 M + h \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right] = 0,$$

$$(4.3) \quad \nabla^2 w + \frac{M}{D} = 0,$$

gdzie:

$$(4.4) \quad M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}.$$

Przy analizie stanu zakrytycznego tarczy funkcję ugięcia  $w = w(x, y)$  przyjęto w następującej postaci:

$$(4.5) \quad w(x, y) = f \frac{1}{5b^4} \cos \frac{\pi x}{2a} [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Założono, że wygięta wstępnie powierzchnia środkowa tarczy ma taki sam kształt jaki przyjmuje tarcza — idealnie płaska w stanie początkowym — po utracie stateczności, spowodowanej przyłożonym obciążeniem. Taki kształt wstępnego wygięcia tarczy jest najbardziej niekorzystny z punktu widzenia pracy tarczy w zakresie zakrytycznym. Tak więc, funkcja opisująca wstępne wygięcie tarczy ma postać:

$$(4.6) \quad w_0(x, y) = f_0 \frac{1}{5b^4} \cos \frac{\pi x}{2a} [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Funkcję  $M = M(x, y)$  — podobnie jak przy rozpatrywaniu stanu krytycznego — założono jako funkcję z jednym swobodnym parametrem a mianowicie:

$$(4.7) \quad M(x, y) = m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} [y^4 - 6y^2 g^2(x) + 5g^4(x)].$$

Funkcja naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$  przyjęta do dalszych rozważań ma postać:

$$(4.8) \quad \Phi(x, y) = \Phi_0 + \Phi_s = \frac{P}{\left( \frac{\text{arctg } m}{m} - \frac{1}{1+m^2} \right) h} \cdot \frac{y}{2} \text{arctg} \frac{my}{g(x)} + \\ + \varphi_1 \cos \frac{\pi x}{a} + \varphi_2 \left[ y^8 - \frac{15}{2} y^6 g^2(x) + \frac{381}{16} y^4 g^4(x) - \frac{233}{8} y^2 g^6(x) + \frac{189}{32} g^8(x) \right].$$



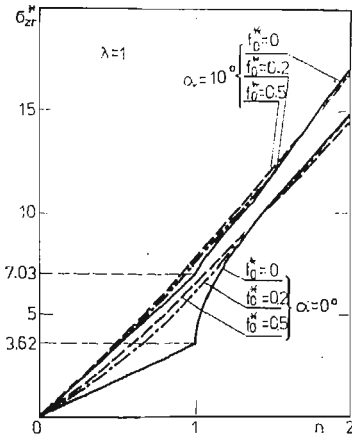
Nieznane wartości współczynników  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  funkcji naprężeń określono w zależności od współczynników  $f$  i  $f_0$  — stosując metodę ortogonalizacji. Wówczas otrzymano warunki:

$$(4.9) \quad \int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left\{ \nabla^2 \nabla^2 \Phi - E \left[ \left( \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right] \right\} \delta \Phi_s dx dy = 0.$$

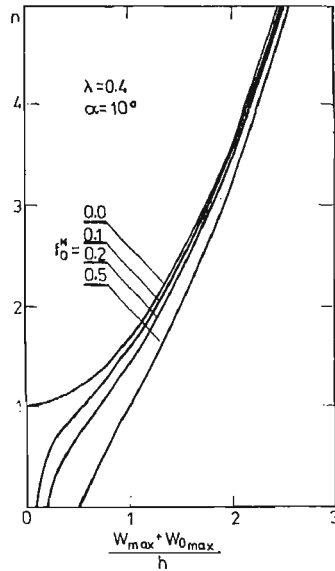
W celu rozwiązania układu równań (4.2.) i (4.3.) zastosowano metodę ortogonalizacji, otrzymując następujące warunki:

$$(4.10) \quad \int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left\{ \nabla^2 M + h \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \right] \right\} \delta w dx dy = 0.$$

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-g(x)}^{+g(x)} \left[ \nabla^2 w + \frac{M}{D} \right] \delta M dx dy = 0.$$



Rys. 4.1.

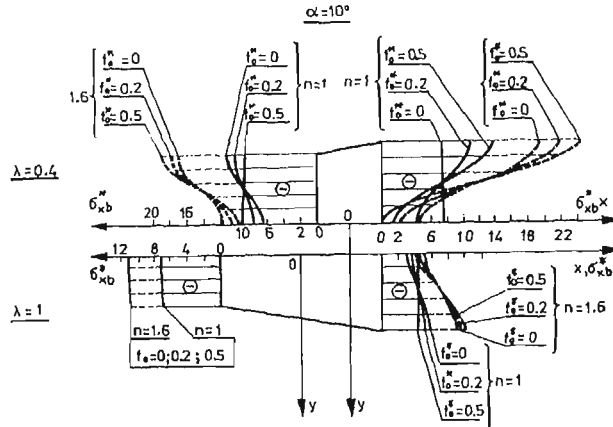


Rys. 4.2.

Po wykonaniu obliczeń i wyrugowaniu parametru  $m_1$ , otrzymano związek pomiędzy obciążeniem tarczy, jej parametrami geometrycznymi oraz współczynnikami ugięcia. Związek ten ma postać:

$$(4.11) \quad f^{*3}(A) + f^{*2} f_0^* 3(A) + f^* [P_{kr}^* - n P_{kr}^* + 2(A) f_0^{*2}] - f_0^* n P_{kr}^* = 0.$$

Wyniki obliczeń, które przeprowadzono w celu określenia składowych błonowego i zgięciowego stanu naprężeń, naprężeń zredukowanych oraz ugięć tarczy przedstawiono przykładowo na rys. 4.1. - 4.3.



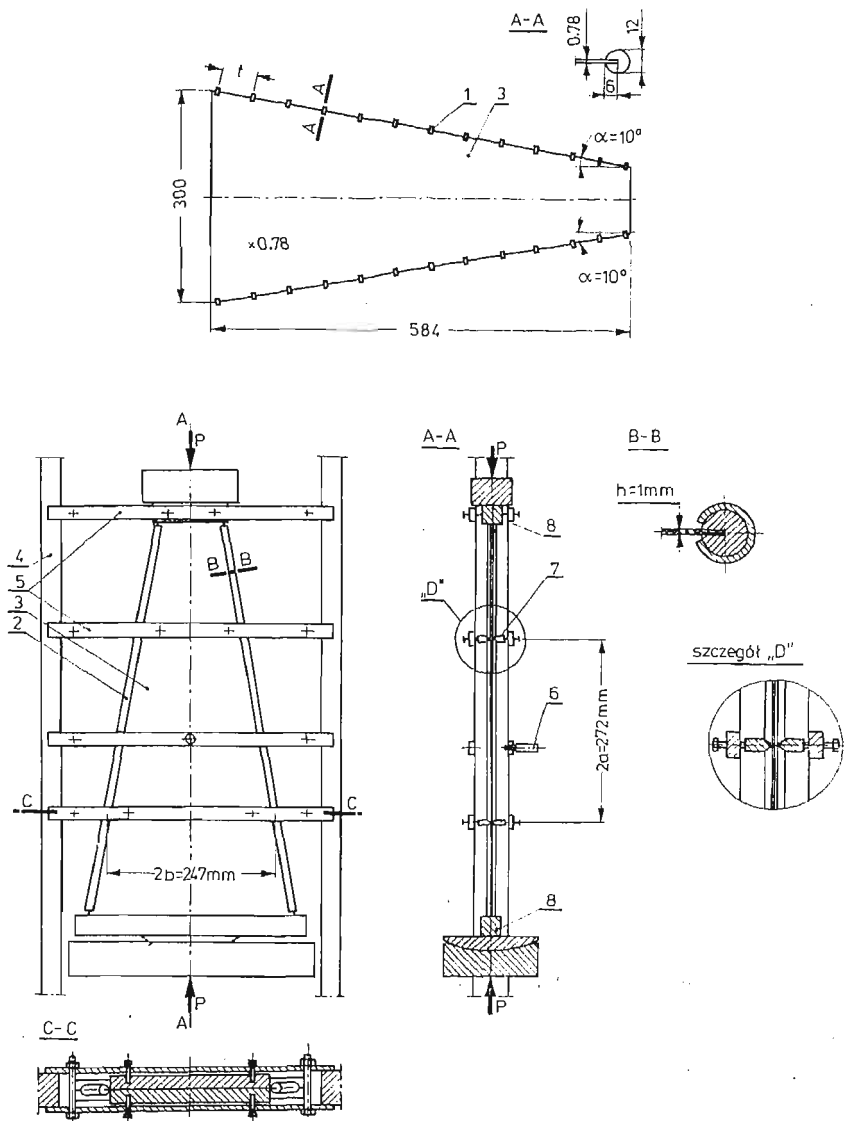
Rys. 4.3.

## 5. Badania doświadczalne

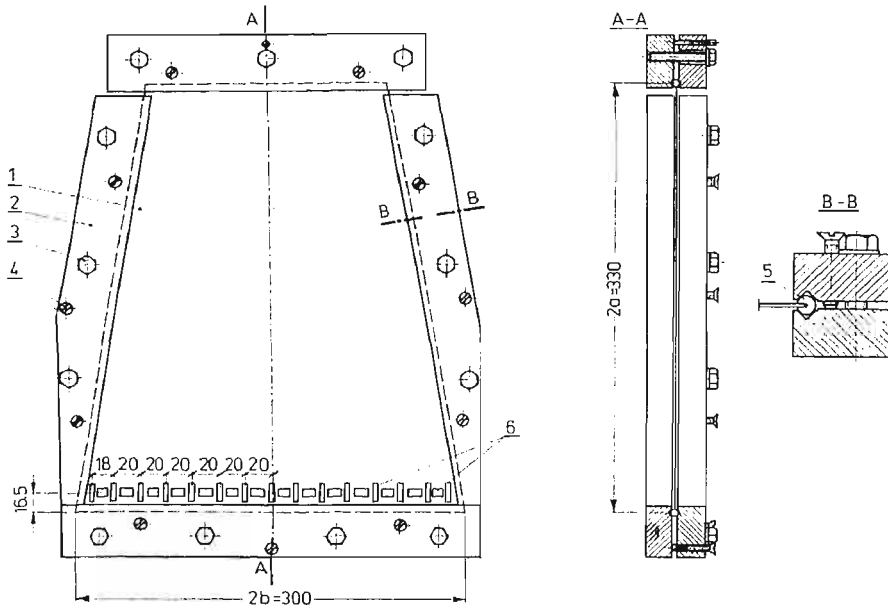
W celu sprawdzenia poprawności otrzymanych wzorów teoretycznych oraz ich przydatności do obliczeń praktycznych, przeprowadzono odpowiednie weryfikacyjne badania doświadczalne. Badania te zostały przeprowadzone na dwóch różnych modelach tarczy trapezowej, wykonanych z cienkiej blachy stalowej. Wymiary modeli zostały tak dobrane, aby mieściły się one w zakresie tarcz objętych analizą teoretyczną. Największą trudność stanowiło natomiast spełnienie założonych warunków obciążenia tarczy oraz swobodnego podparcia jej krawędzi. W celu jak najlepszego zbliżenia warunków badań do warunków przyjętych w założeniach teoretycznych, badania te przeprowadzono na dwóch modelach tarcz. Modele te różniły się między sobą w istotny sposób. Model pierwszy był wycinkiem trapezowego pasma płytowego, drugi zaś samodzielną tarczą trapezową, podpartą przegubowo wzdłuż obwodu.

Schemat pierwszego stanowiska przedstawiono na rys. 5.1. natomiast schemat drugiego stanowiska na rys. 5.2. Badania przeprowadzono metodą SOUTHWELLA [2] i TERESZKOWSKIEGO [14]. Wartości sił krytycznych otrzymane z doświadczeń były o kilka procent mniejsze od wartości sił krytycznych otrzymanych z rozwiązania teoretycznego.

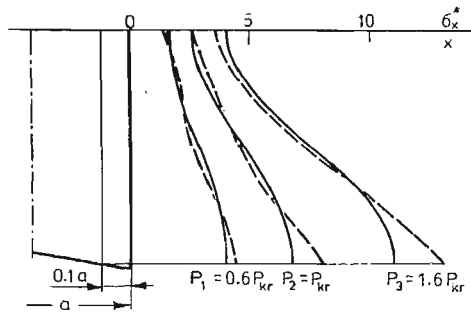
Rozkłady błonowych naprężeń normalnych w pobliżu dłuższej podstawy trapezu zweryfikowano badaniami tensometrycznymi (rys. 5.3.) — linie przerywane. Linie ciągłe przedstawiają rozkłady tych naprężeń otrzymane na drodze teoretycznej.



Rys. 5.1.



Rys. 5.2.



Rys. 5.3.

## 6. Wniosk

1. Jak wynika z przeprowadzonej analizy porównawczej, zastosowana w obliczeniach metoda ortogonalizacyjna — do zmodyfikowanego układu równań, otrzymanego przez wprowadzenie dodatkowo funkcji  $M = M(x, y)$  — okazała się, przy badaniach stateczności i stanu zakrytycznego tarczy trapezowej, skuteczniejszą od powszechnie stosowanej metody energetycznej.

2. Przyjęte w obliczeniach numerycznych zakresy zmienności kątów  $\alpha$  pochylenia ramion trapezu oraz współczynnika  $\lambda$  kształtu tarczy — odpowiadają większości parametrów tarcz, stosowanych w praktycznych rozwiązaniach konstrukcyjnych dźwigarów cienkościennych. Przeprowadzone na dwóch modelach weryfikacyjne badania doświadczalne potwierdziły prawidłowość otrzymanych, na drodze teoretycznej związków i z tego względu otrzymane wzory mogą być wykorzystane w obliczeniach inżynierskich przy projektowaniu tego typu konstrukcji.

## Literatura cytowana w tekście

1. S. P. TIMOSHENKO i J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady 1962.
2. S. P. TIMOSHENKO i J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady 1963.
3. S. P. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady 1962.
4. A. S. VOLMIR, *Gibkie plastinki i oboločki*, Moskwa 1956.
5. B. KLEIN, *Buckling of Simply Supported Plates Tapered in Planform*, Journal of Applied Mechanics, June. 1956 s. 207.
6. L. ROOTS, E. SAKS, *Ob ustoičivosti trapecijevidnych plastin*, Tartu Riikliku ulikooli toimetised. Učebnyje zapiski Tartuskogo Instytuta 1971. Vypusk 281.
7. L. ROOTS, *Ob ustoičivosti plastinok različnoj formy w častnosti trjeugolnych i trapecijevidnych*, Tartru Riikliku ulikooli toimetised. Učebnyje zapiski Tartuskogo Instytuta 1961. Vypusk 102.
8. L. M. PREGIER, *O vyborje approksimirujuščich funkceji dla rasčeta trapecijevidnych plastin*, Sbornik Naucnych Trudov Tomskogo Inženierno-Stroitel'nogo Instituta Tom X 1962.
9. L. M. PREGIER, *K voprosu izgiba trapecijevidnych i trjeugolnych plastin pri djeistvii popjerječnoj nagruzki i sil w srjedinoj plaskosti*, Sbornik Naučnych Trudov Tomskogo Inženierno-Stroitel'nogo Instituta Tom X 1962.
10. L. M. PREGIER, *Zakritičeskaja deformacija trapecijevidnych i trjeugolnych plastin*, Tr. Tomskij Inženierno-Stroitel'nyj Institut Nr 11, 1964.
11. A. A. POLOZKOV, J. A. GORDIENKO, *Issledovanie ustoičivosti ravnobočnoj trapecijevidnoj plastinki podkrepļennoj rebrom žestkosti*, Voprosy nadieżnosti i dolgoviečnosti sjełchozmasin, Rostov — na — Donu, 1968.
12. A. A. POLOZKOV, J. A. GORDIENKO, *Ustoičivost trapecijevidnych plastin, podkrepļennych prodolnymi rebrami žestkosti*, Izvestia Vyssich Ucebnych Zaviedženii. Masinostrojenie Nr 8 1966.
13. V. ILLE, G. BARSAN, *Über die Stabilität der allseitig frei drehbar gelagerten Trapezplatte*, An. Univ. Bucaresti. Mat-Mec. 1969 18, Nr 2.
14. Z. TERESZKOWSKI, *Doświadczalna metoda wyznaczenia obciążenia krytycznych w płytach*, Archiwum Budowy Maszyn, 17 z. 3. 1970.

## Р е з ю м е

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ  
ТРАПЕЦЕВИДНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СЖАТИИ

Получено приближенное решение проблемы на основе дифференциальных уравнений нелинейной теории тонких пластинок с начальным прогибом. Решение этих уравнений осуществляется при помощи метода Бубнова-Галеркина. Результаты численных примеров представлены в виде графиков. Теоретические результаты проверено экспериментально.

## S u m m a r y

BUCKLING AND POST-BUCKLING BEHAVIOUR OF TRAPEZOIDAL WEBPLATES UNDER  
COMPRESSION

The approximate solution of the title problem derived on the basis of nonlinear differential equations of thin plates with initial deflection. Solution of these equations is based on the Bubnov-Galerkin method. The results of numerical calculations are presented in diagrams form. Theoretical results are verified by experiments.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1980 roku.