

## ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI LAPLACE'A W METODZIE UŚREDNIANIA POPRAWEK FUNKCJONALNYCH

ZBIGNIEW N O W A K, KAZIMIERZ R U P (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

W pracy [2] przedstawiono oryginalną modyfikację zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych do przybliżonego rozwiązywania równania różniczkowego typu parabolicznego opisującego nieizotermiczny przepływ cieczy newtonowskiej. Umożliwia ona aplikację wymienionej, analitycznej metody przybliżonej rozwiązania równań różniczkowych bez konieczności wprowadzania pojęcia „głębokości wnikania ciepła” (np. przy rozwiązywaniu równania przewodnictwa cieplnego). Tę konieczność ominięto w pracy [2] przez wykorzystanie do obliczania wartości początkowych (stałych całkowania) warunku polegającego na spełnieniu postulatu minimum całki z kwadratu odchylenia.

W pierwszej części niniejszej pracy przedstawiono propozycję zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie przekształcenia całkowego Laplace'a. Wykazano, że w ten sposób eliminuje się konieczność wyznaczania wartości początkowych z dodatkowych postulatów. Powracając następnie do dziedziny oryginału, otrzymano poszukiwane pole temperatury w ustalonym, laminarnym przepływie nieściśliwej cieczy newtonowskiej przez prostoosiową rurę kołową, w pierwszym i drugim przybliżeniu. Podano również sposób konstruowania dowolnego,  $n$ -tego przybliżenia.

W drugiej części pracy przedstawiono odmienny wariant zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych do tego samego zagadnienia brzegowego, w którym wykorzystano, do wyznaczania wartości początkowych, postulat minimum całki z odchylenia. Wykazano, że w obu przypadkach otrzymuje się identyczne postacie funkcji przybliżonej opisującej pole temperatury. W ten sposób udowodniono, że zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie przekształcenia całkowego Laplace'a determinuje automatycznie wybór kryterium, z którego należy wyznaczyć wartości początkowe w przypadku nie stosowania transformacji Laplace'a. W oparciu o konkretny przykład liczbowy wykazano, że zastosowana w pracy modyfikacja metody uśredniania poprawek funkcjonalnych daje wysoki stopień aproksymacji rozwiązania dokładnego już w drugim przybliżeniu.

Następnie porównano rozwiązanie przybliżone równania różniczkowego omówionego w pracy [2] w przypadkach, gdy do wyznaczania wartości początkowych stosuje się dwa kryteria, a mianowicie: postulat minimum całki z odchylenia oraz warunek minimum całki z kwadratu odchylenia. Stwierdzono, że nieco wyższy stopień dokładności aproksymacji otrzymuje się w przypadku zastosowania postulatu minimum całki z kwadratu odchylenia.

## Oznaczenia

$a = \frac{\lambda}{\gamma \cdot c_p}$	współczynnik wyrównania temperatury,
$A = R\sqrt{TPe}$	parametr
$C$	stała
$d$	średnica rury
$Nu$	liczba Nusselta (4.3),
$p$	zmienna zespolona,
$Pe = \frac{\bar{w} \cdot R}{a}$	liczba Pecleta,
$q_1(X), q_2(X), \dots, q_n(X)$	współczynniki funkcyjne (parametry swobodne),
$q_s$	strumień ciepła na ścianie rury,
$q^*$	bezwymiarowy strumień ciepła na ścianie rury,
$r$	współrzędna promieniowa,
$R$	promień rury,
$t$	temperatura,
$t_s$	temperatura ścianki rury,
$t_0$	temperatura początkowa,
$T = \frac{t-t_0}{t_s-t_0}$	bezwymiarowa temperatura,
$w(\varrho)$	prędkość lokalna cieczy,
$w$	prędkość średnia,
$x$	współrzędna osiowa,
$X = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{x}{R}$	bezwymiarowa współrzędna,
$X_1 = 2X$	bezwymiarowa współrzędna,
$\nabla t = \frac{\partial t_s}{\partial x}$	osiowy gradient temperatury na ścianie rury,
$\Theta = \frac{t-t_0}{A}$	bezwymiarowa temperatura,
$\bar{\theta}$	temperatura średnia,
$\varrho = \frac{r}{R}$	bezwymiarowa współrzędna promieniowa.

## 2. Przedstawienie proponowanej modyfikacji

Jak wiadomo [1, 2], metoda uśredniania poprawek funkcjonalnych jest analityczną, wewnętrzną metodą przybliżoną rozwiązywania równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych, której idea przewodnią polega w ogólności na zastąpieniu samej, poszukiwanej funkcji (lub jej pochodnej), ciągłej w pewnym obszarze, przez jej średnią całkową w tym obszarze. Omawiana metoda wykazuje, w porównaniu z innymi analitycznymi metodami przybliżonymi, następujące zalety:

a) względna łatwość wyznaczania funkcji aproksymującej rozwiązanie ściśle,  
 b) możliwość wyznaczania dowolnego,  $n$ -tego przybliżenia. Warto przy tym dodać, że wyznaczona w pierwszym przybliżeniu funkcja aproksymująca nie ulega zmianie przy konstruowaniu następnego przybliżenia (podobnie w metodzie Kantorowicza, zmodyfikowanej przez Kerra [3]),

c) eliminuje intuicyjny wybór funkcji aproksymującej rozwiązanie ściśle.

Poniżej przedstawiono ideę przewodnią proponowanej modyfikacji zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych na przykładzie równania różniczkowego, opisującego pole temperatury w ustalonym, laminarnym przepływie nieściśliwej cieczy newtonowskiej przez prostoosiową rurę kołową. To równanie otrzymuje się z ogólnych równań opisujących ruch cieczy lepkiej [4, 5], tj. równania energii, pędu i ciągłości, przy następujących założeniach upraszczających:

- 1) nieściśliwa ciecz newtonowska przepływa ustalonym ruchem laminarnym przez prostoosiową rurę kołową,
- 2) własności fizyczne ( $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C$ ) cieczy nie zależą od temperatury,
- 3) brak jest wewnętrznych źródeł ciepła (pomija się dysypację energii przepływającej cieczy, wywołaną tarciami wewnętrznymi),
- 4) przepływ ciepła w kierunku promieniowym jest znacznie intensywniejszy niż przepływ ciepła w kierunku osiowym,
- 5) pomijamy wpływ pola jednostkowych sił masowych.

Przedmiotowe równanie różniczkowe przyjmuje w omawianym przypadku postać [2]:

$$(2.1) \quad 2(1 - \varrho^2) \frac{\partial t}{\partial X} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t}{\partial \varrho} \right),$$

zaś warunki brzegowe zapisują się następująco:

$$(2.2) \quad X \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1 \Rightarrow t = t_0$$

$$(2.3) \quad X > 0, \quad \varrho = 1 \Rightarrow t = t_0 + AX$$

$$(2.4) \quad X > 0, \quad \varrho = 0 \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \varrho} = 0$$

Przejęcie warunku brzegowego w postaci (2.3) wynikało z konieczności porównania otrzymanego poniżej rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem ścisłym, zawartym w pracy [7].

Równanie różniczkowe (2.1) wraz z warunkami brzegowymi (2.2), (2.3), i (2.4) poddane zostanie przekształceniu całkowemu Laplace'a po zmiennej bezwymiarowej  $X$ . Po jego wykonaniu, transformaty współczynników funkcyjnych  $q_1, q_2, \dots$  zostaną wyznaczone za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych. Warto tutaj zaznaczyć, że omawiana metoda nie była dotychczas stosowana w podobnym przypadku. W dostępnej dla autorów literaturze z tego zakresu wykorzystano wprawdzie transformację Laplace'a, ale przekształcone równanie rozwiązywano następnie metodą Galerkin'a [6, 7, 8, 9]. Po raz pierwszy zaproponował powyższą technikę WEINER [6] do przybliżonego rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego. Ten sam tok postępowania stosowano następnie w pracach [7, 8, 9].

Po wyznaczeniu za pomocą omawianej metody współczynników funkcyjnych w dziedzinie obrazu przekształcania całkowego Laplace'a, zastosujemy następnie odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymując poszukiwane rozwiązanie przybliżone w dziedzinie oryginału. Warto już w tym miejscu podkreślić, że zastosowanie transformacji Laplace'a do omawianego zagadnienia umożliwi wyznaczenie współczynników funkcyjnych, a następnie pola temperatury bez konieczności określania wartości początkowych z dodatkowych postulatów.

Po wykonaniu przekształcenia całkowego Laplace'a równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$(2.5) \quad 2(1-\varrho^2)p \cdot \bar{t} - 2(1-\varrho^2)t_0 = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho} \right)$$

zaś warunki brzegowe (2.3) i (2.4) zapisują się następująco:

$$(2.6) \quad \bar{t}(\varrho, p) \Big|_{\varrho=1} = \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2},$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=0} = 0$$

gdzie:

$$(2.8) \quad \bar{t}(\varrho, p) = \int_0^{\infty} t(\varrho, X) \exp(-pX) dX.$$

Równanie różniczkowe (2.5) przy warunkach brzegowych (2.6) i (2.7) rozwiązane zostanie za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych. Zgodnie z jej ideą przewodnią, aproksymuje się równanie (2.5) w pierwszym przybliżeniu, następującym równaniem:

$$(2.9) \quad 2(1-\varrho^2)p\bar{q}_1 - 2(1-\varrho^2)t_0 = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial \varrho} \right),$$

gdzie:

$$(2.10) \quad \bar{q}_1 = 2 \int_0^1 \bar{t}_1 \cdot \varrho d\varrho.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu równania (2.9) względem zmiennej  $\varrho$  otrzymuje się pierwsze przybliżenie pola temperatury w postaci:

$$(2.11) \quad \bar{t}_1 = \left( \frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{8}\varrho^4 \right) p\bar{q}_1 - \left( \frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{8}\varrho^4 \right) t_0 + \bar{q}_{1,2} \ln \varrho + \bar{q}_{1,3}.$$

Występujące w równaniu (2.11) transformaty współczynników funkcyjnych  $\bar{q}_1, \bar{q}_{1,2}, \bar{q}_{1,3}$  wyznacza się w oparciu o warunki brzegowe (2.6) i (2.7). Otrzymujemy:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \bar{q}_{1,2} = 0 \\ \bar{q}_{1,3} = \frac{t_0}{p} + \frac{3}{8}t_0 + \frac{A}{p^2} - \frac{3}{8}p\bar{q}_1 \end{cases}$$

Podstawiając (2.12) do (2.11) znajdziemy

$$(2.13) \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{8}(1-\varrho^4)p\bar{q}_1 - \frac{1}{2}(1-\varrho^2)p\bar{q}_1 - \frac{1}{8}(1-\varrho^4)t_0 + \frac{1}{2}(1-\varrho^2)t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}$$

Celem wyznaczenia niezdeteminowanej transformaty współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_1$  podstawiamy (2.13) do (2.10). Po wykonaniu całkowania (2.10) oraz po pewnym uporządkowaniu otrzymuje się:

$$(2.14) \quad q_1 = \frac{\frac{1}{6}t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}}{1 + \frac{1}{6}p}$$

Następnie podstawiamy (2.14) do (2.13) uzyskując pierwsze przybliżenie pola temperatury w płaszczyźnie obrazu przekształcenia Laplace'a:

$$(2.15) \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{8}(1-\varrho^4) \frac{\frac{1}{6}t_0p + t_0 + \frac{A}{p}}{1 + \frac{1}{6}p} - \frac{1}{2}(1-\varrho^2) \frac{\frac{1}{6}t_0p + t_0 + \frac{A}{p}}{1 + \frac{1}{6}p} + \\ - \frac{1}{8}(1-\varrho^4)t_0 + \frac{1}{2}(1-\varrho^2)t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}.$$

Powracając za pomocą tablic transformat [10] do dziedziny oryginału otrzymujemy poszukiwane pole temperatury cieczy w pierwszym przybliżeniu:

$$(2.16) \quad t_1(\varrho X)c = t_0 + AX + \frac{A}{2} [1 - \exp(-6X)] \left[ \frac{1}{4}(1-\varrho^4) - (1-\varrho^2) \right].$$

W celu podwyższenia stopnia dokładności otrzymanego rozwiązania przybliżonego, rozwiążemy równanie (2.5) w drugim przybliżeniu. Jego konstrukcja w płaszczyźnie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych wykazuje odmienne cechy w porównaniu z przypadkiem, kiedy wykorzystuje się metodę Galerkiną. Zasadnicza różnica wynika z odmiennej techniki konstruowania rozwiązań przybliżonych w wymienionych metodach. W szczególności: w metodzie uśredniania poprawek funkcjonalnych każde następne przybliżenie buduje się zawsze w oparciu o przybliżenie poprzednie [1, 2].

Zgodnie z ideą przewodnią omawianej metody, równanie (2.5) przyjmuje w przypadku drugiego przybliżenia, w płaszczyźnie obrazu przekształcenia Laplace'a, postać:

$$(2.17) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}_2}{\partial \varrho} \right) = 2(1-\varrho^2) \left[ \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial X} \right] + 2(1-\varrho^2)p\bar{q}_2 - 2(1-\varrho^2)t_0,$$

przy czym transformata pochodnej

$$(2.18) \quad \left[ \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial X} \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{\partial t_1}{\partial X} \right] = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial t_1}{\partial X} \right] \exp[-pX] dX.$$

Uwzględniając (2.16) w (2.18), a następnie podstawiając otrzymane wyrażenie do (2.17) znajdziemy:

$$(2.19) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_2}{\partial \varrho} \right) = \frac{2A}{p} (1 - \varrho^2) + \frac{A}{1 + \frac{1}{6}p} (1 - \varrho^2) \left[ \frac{1}{4} (1 - \varrho^4) - (1 - \varrho^2) \right] + \\ + 2(1 - \varrho^2)p\bar{q}_2 - 2(1 - \varrho^2)t_0.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu równania (2.19) względem zmiennej  $\varrho$  otrzymuje się drugie przybliżenie pola temperatury w płaszczyźnie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a:

$$(2.20) \quad \bar{t}_2 = \frac{2A}{p} \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right) + \frac{A}{1 + \frac{1}{6}p} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 - \frac{1}{36} \varrho^6 + \frac{1}{64} \varrho^8 \right) + \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 + \frac{1}{36} \varrho^6 \right) \right] + 2 \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right) p\bar{q}_2 + 2 \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right) t_0 + \bar{q}_{22} \ln \varrho + \bar{q}_{23}.$$

Występujące w równaniu (2.20) transformaty współczynników funkcyjnych  $\bar{q}_{22}$  i  $\bar{q}_{23}$  wyznacza się z warunków brzegowych (2.6) i (2.7). Po podstawieniu wyznaczonych transformatach do (2.20) otrzymujemy:

$$(2.21) \quad \bar{t}_2 = \frac{A}{8p} (1 - \varrho^4) - \frac{A}{2p} (1 - \varrho^2) + \frac{A}{1 + \frac{1}{6}p} \left[ \frac{3}{16} (1 - \varrho^2) - \frac{7}{64} (1 - \varrho^4) + \right. \\ \left. + \frac{5}{144} (1 - \varrho^6) - \frac{1}{256} (1 - \varrho^8) \right] + \frac{1}{8} (1 - \varrho^4) p\bar{q}_2 - \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) p\bar{q}_2 + \\ - \frac{1}{8} (1 - \varrho^4) t_0 + \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}.$$

Zgodnie z ideą przewodnią omawianej metody, transformatę współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_2$  wyznacza się z następującego wyrażenia [1, 2]:

$$(2.22) \quad \bar{q}_2 = 2 \int_0^1 \bar{t}_2 \varrho d\varrho - \bar{q}_1.$$

Podstawiając (2.21) oraz (2.14) do (2.22) otrzymuje się po scałkowaniu każdorazowo jedno równanie algebraiczne, którego rozwiązanie determinuje ostatecznie współczynnik  $\bar{q}_2$ . Fakt ten stanowi poważną zaletę metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w porównaniu z innymi metodami przybliżonymi, które — zastosowane w podobnym przypadku — wymagają rozwiązania układu równań algebraicznych.

W rozważanym przypadku drugiego przybliżenia pola temperatury transformata współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_2$  przyjmuje postać:

$$(2.23) \quad \bar{q}_2 = \frac{\frac{1}{6} t_0 + \frac{t_0}{p} + \frac{A}{p^2}}{1 + \frac{1}{6}p} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{6}p} \right) - \frac{A}{6p} \frac{1}{1 + \frac{1}{6}p} + \frac{7A}{160} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{6}p \right)^2}.$$

Podstawiając (2.23) do (2.21) otrzymuje się drugie przybliżenie poszukiwanego pola temperatury w płaszczyźnie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a. Dokonując następnie przekształcenia odwrotnego znajdziemy w rezultacie poszukiwane pole temperatury w drugim przybliżeniu. Realizując przekształcenie odwrotne posłużono się tablicami transformat [10], otrzymując ostatecznie:

$$(2.24) \quad t_2(\varrho, X) = t_0 + AX + \frac{1}{8}A(1 - \varrho^4) - \frac{1}{2}A(1 - \varrho^2) + A \left[ \frac{67}{80}(1 - \varrho^2) + \right. \\ \left. - \frac{187}{320}(1 - \varrho^4) + \frac{5}{24}(1 - \varrho^6) - \frac{3}{128}(1 - \varrho^8) \right] \exp(-6X) + \\ + \frac{69}{40}(1 - \varrho^2)AX \exp(-6X) - \frac{69}{160}(1 - \varrho^4)AX \exp(-6X).$$

Konstrukcja  $n$ -tego przybliżenia w dziedzinie obrazu przekształcenia całkowego Laplace'a przyjmuje, dla rozważanego przez nas równania (2.5), postać

$$(2.25) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \varrho} \right) = 2(1 - \varrho^2) \left[ \frac{\partial \bar{t}_{n-1}}{\partial X} \right] + 2(1 - \varrho^2)p \cdot \bar{q}_n + 2(1 - \varrho^2)t_0.$$

Do wyznaczania transformaty współczynnika funkcyjnego  $\bar{q}_n$  wykorzystuje się, zgodnie z ideą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych [1], wyrażenie:

$$(2.26) \quad \bar{q}_n = 2 \int_0^1 \bar{t}_n \cdot \varrho d\varrho - \bar{q}_{n-1}.$$

Tok postępowania przy wyznaczaniu kolejnych przybliżeń jest analogiczny, jak w przypadku przybliżenia drugiego.

### 3. Zastosowanie postulatu minimum całki z odchylenia do wyznaczania wartości początkowych

W celu wykazania pewnych związków pomiędzy wynikami uzyskanymi za pomocą technik wykorzystujących transformację Laplace'a oraz technik posługujących się wyznaczaniem wartości początkowych z dodatkowych postulatów, przedmiotem naszych rozważań będzie ponownie równanie różniczkowe (2.1) wraz z warunkami brzegowymi (2.2), (2.3) i (2.4).

Zgodnie z ideą przewodnią metody uśredniania poprawek funkcjonalnych [1, 2] aproksymujemy równanie (2.1), w pierwszym przybliżeniu, następującym równaniem:

$$(3.1) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_1}{\partial \varrho} \right) = 2(1 - \varrho^2)q_1(X),$$

przy czym współczynnik funkcyjny  $q_1(X)$  określa wyrażenie:

$$(3.2) \quad q_1(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial t_1(\varrho X)}{\partial X} \varrho d\varrho.$$

Całkując równanie (2.1) dwukrotnie po zmiennej  $\varrho$  otrzymuje się pierwsze przybliżenie poszukiwanego pola temperatury:

$$(3.3) \quad t_1(\varrho, X) = \frac{1}{2} \left( \varrho^2 - \frac{1}{4} \varrho^4 \right) q_1(X) + q_{12} \ln \varrho + q_{13}.$$

Po uwzględnieniu w równaniu (3.3) warunków brzegowych (2.3) i (2.4) znajdujemy:

$$(3.4) \quad t_1(\varrho, X) = \frac{1}{8}(1-\varrho^4)q_1(X) - \frac{1}{2}(1-\varrho^2)q_1(X) + AX + t_0.$$

W celu wyznaczenia niewiadomej  $q_1(X)$  podstawiamy (3.4) do wyrażenia (3.2). Po wykonaniu całkowania tego ostatniego otrzymuje się, podobnie jak w pracy [2], jedno równanie różniczkowe zwyczajne, z którego wyznacza się  $q_1(X)$ . W omawianym przez nas przypadku ma ono postać:

$$(3.5) \quad \dot{q}_1(X) + 6q_1(X) = 6A.$$

Równanie (3.5) daje się łatwo całkować [12] i w rezultacie otrzymuje się:

$$(3.6) \quad q_1(X) = A + C \exp(-6X).$$

Stałą całkowania  $C$  w równaniu (3.6) wyznaczmy z postulatu minimum całki z odchylenia. Jako odchylenie przyjmujemy w naszym przypadku, podobnie jak w [2, 3], wyrażenie:

$$(3.7) \quad \varepsilon = t(\varrho, 0) - t_n(\varrho, 0).$$

Wymieniony postulat przyjmuje zatem postać:

$$(3.8) \quad \int_S [t(\varrho, 0) - t_1(\varrho, 0)] dS = \text{minimum}.$$

Założmy ponadto, że wyrażenie (3.8) osiąga minimum absolutne, które jest równe zeru. Uwzględniając w (3.8) warunek brzegowy (2.2) i wyrażenie (3.4), otrzymamy:

$$(3.9) \quad \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}(1-\varrho^2)q_1(0) - \frac{1}{8}(1-\varrho^4)q_1(0) \right] \varrho d\varrho = 0.$$

Po wykonaniu całkowania (3.9) otrzymuje się jedno równanie algebraiczne, z którego znajdujemy:

$$(3.10) \quad \begin{cases} q_1(0) = A + C = 0 \Rightarrow C = -A, & \text{czyli} \\ q_1(x) = A[1 - \exp(-6X)]. \end{cases}$$

Zatem pierwsze przybliżenie poszukiwanego pola temperatury cieczy opisuje ostatecznie funkcja:

$$(3.11) \quad t_1(\varrho, X) = t_0 + AX + \frac{A}{2} [1 - \exp(-6X)] \left[ \frac{1}{4}(1-\varrho^4) - (1-\varrho^2) \right].$$

Zgodnie z ideą stosowanej metody, równanie (2.1) aproksymuje się w drugim przybliżeniu równaniem:

$$(3.12) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_2}{\partial \varrho} \right) = 2(1-\varrho^2) \frac{\partial t_1}{\partial X} + 2(1-\varrho^2)q_2(X),$$

gdzie:

$$(3.13) \quad q_2(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial t_2}{\partial X} \varrho d\varrho - q_1(X).$$



Podstawiając (3.11) do (3.12), a następnie całkując dwukrotnie to ostatnie po zmiennej  $\varrho$ , otrzymuje się:

$$(3.14) \quad t_2(\varrho, X) = 6A \exp(-6X) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{36} \varrho^4 - \frac{1}{16} \varrho^6 + \frac{1}{64} \varrho^8 \right) + \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 + \frac{1}{36} \varrho^6 \right) \right] + \left( \frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4 \right) q_2(X) + q_{22} \ln \varrho + q_{23} + 2A \left( \frac{1}{4} \varrho^2 - \frac{1}{16} \varrho^4 \right),$$

lub po wykorzystaniu warunków brzegowych (2.3) i (2.4):

$$(3.15) \quad t_2(\varrho, X) = 6A \exp(-6X) \left[ \frac{3}{16} (1 - \varrho^2) - \frac{7}{64} (1 - \varrho^4) + \frac{5}{144} (1 - \varrho^6) + \right. \\ \left. - \frac{1}{256} (1 - \varrho^8) \right] + \frac{1}{8} (1 - \varrho^4) q_2(X) - \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) q_2(X) + \\ + \frac{1}{8} A (1 - \varrho^4) - \frac{1}{2} A (1 - \varrho^2) + t_0 + AX.$$

Podstawiając następnie wyrażenie (3.11) i (3.15) do (3.13) i wykonując przepisane całkowanie tego ostatniego otrzymuje się jedno równanie różniczkowe zwyczajne, które po uporządkowaniu przyjmuje postać:

$$(3.16) \quad \dot{q}_2(X) + 6q_2(X) = -\frac{69}{20} A \exp(-6X).$$

Równanie (3.16) daje się łatwo scałkować [11] i jego rozwiązanie ma postać:

$$(3.17) \quad q_2(X) = \left( C_2 - \frac{69}{20} AX \right) \exp(-6X).$$

Stałą całkowania  $C$  w równaniu (3.17) wyznacza się, podobnie jak dla pierwszego przybliżenia, żądając spełnienia postulatu minimum całki z odchylenia. Warunek ten przyjmuje postać:

$$(3.18) \quad \int_0^1 \left\{ (-6A) \left[ \frac{3}{16} (\varrho - \varrho^3) - \frac{7}{64} (\varrho - \varrho^5) + \frac{5}{144} (\varrho - \varrho^7) - \frac{1}{256} (\varrho - \varrho^9) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\varrho - \varrho^3) q_2(0) - \frac{1}{8} (\varrho - \varrho^5) q_2(0) + \frac{1}{2} A (\varrho - \varrho^3) - \frac{1}{8} A (\varrho - \varrho^5) \right\} d\varrho = 0.$$

Warunek (3.18) dostarcza jednego równania algebraicznego, z którego wyznacza się niewiadomą  $q_2(0)$ . W naszym przypadku otrzymamy:

$$(3.19) \quad q_2(0) = \frac{23}{40} A,$$

a stąd

$$(3.20) \quad q_2(X) = A \left( \frac{23}{40} - \frac{69}{20} X \right) \exp(-6X).$$

Podstawiając (3.20) do wyrażenia (3.15) otrzymujemy ostatecznie drugie przybliżenie poszukiwanego pola temperatury cieczy:

$$(3.21) \quad t_2(\varrho, X) = t_0 + AX + \frac{1}{8}A(1-\varrho^4) - \frac{1}{2}A(1-\varrho^2) + A \left[ \frac{67}{80}(1-\varrho^2) + \right. \\ \left. - \frac{187}{320}(1-\varrho^4) + \frac{5}{24}(1-\varrho^6) - \frac{3}{128}(1-\varrho^8) \right] \exp(-6X) + \\ + \frac{69}{40}(1-\varrho^2)AX \exp(-6X) - \frac{69}{160}(1-\varrho^4)AX \exp(-6X).$$

Ogólnie, w  $n$ -tym przybliżeniu, aproksymuje się równanie (2.1), w metodzie uśredniania poprawek funkcjonalnych, następującym równaniem:

$$(3.22) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial t_n}{\partial \varrho} \right) = 2(1-\varrho^2) \frac{\partial t_{n-1}}{\partial X} + 2(1-\varrho^2) q_n(X),$$

przy czym:

$$(3.23) \quad q_n(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial t_n}{\partial X} \varrho d\varrho - q_{n-1}(X).$$

Warto tutaj wyraźnie podkreślić, że wyrażenie (3.23) dostarcza dla każdego przybliżenia tylko jednego równania różniczkowego zwyczajnego, podczas gdy, np. w oryginalnej metodzie Kantorowicza, otrzymuje się w podobnym przypadku układ równań różniczkowych zwyczajnych.

#### 4. Dyskusja

Porównując odpowiednio funkcje przybliżone: (2.16) i (3.11) oraz (2.24) i (3.21) można stwierdzić, co następuje: 1° zastosowanie początkowo transformacji całkowej Laplace'a do równania różniczkowego liniowego, a następnie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych w obrazie przekształcenia Laplace'a daje identyczne wyniki, jak w przypadku zastosowania metody uśredniania poprawek funkcjonalnych bez wykorzystania transformacji Laplace'a, ale pod warunkiem, że stałą całkowania (wartość początkowa) wyznacza się z postulatu minimum całki z odchylenia (3.7). Innymi słowy, przekształcenie Laplace'a determinuje wybór kryterium, z którego jest wyznaczona stała całkowania dla danej metody przybliżonej. Tak np. dla metody Galerkina lub Kantorowicza wymienioną stałą wyznacza, w podobnych przypadkach, zastosowanie przekształcenia Laplace'a lub postulat minimum całki z kwadratu odchylenia [7, 9, 12];

2° zastosowanie przekształcenia Laplace'a, a następnie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych lub innych metod (np. Galerkina lub Kantorowicza) ułatwia wprawdzie tok obliczeń, ale jest możliwe jedynie w przypadku zagadnienia brzegowego lub początkowego, opisanego liniowymi równaniami różniczkowymi;

3° wymienione w punkcie 2° ograniczenie nie występuje przy zastosowaniu techniki wykorzystującej metodę uśredniania poprawek funkcjonalnych, gdy stałą całkowania wyznacza się z postulatu minimum całki z odchylenia (3.7);

4° stosując metodę uśredniania poprawek funkcjonalnych można stałą całkowania wyznaczyć oczywiście z innych kryteriów, np. z postulatu minimum całki z kwadratu odchy-

lenia [2, 3, 12]. Przy zastosowaniu innych metod przybliżonych wykorzystano w podobnych przypadkach również metodę kollokacji na brzegu [13];

5° wybór jednego z przytoczonych kryteriów do wyznaczania stałej całkowania ma istotny wpływ na stopień dokładności końcowego rozwiązania przybliżonego. Dla potwierdzenia tego faktu przedstawiamy poniżej rozwiązanie przybliżone równania różniczkowego, opisującego podobny, nieizotermiczny przepływ cieczy w rurze kołowej, o postaci:

$$(4.1) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right) = (1 - \varrho^2) \frac{\partial T}{\partial X_1},$$

ale przy następujących warunkach brzegowych:

$$(4.2) \quad X_1 \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 1 \Rightarrow T = 0,$$

$$(4.3) \quad X_1 > 0, \quad \varrho = 1 \Rightarrow T = 1,$$

$$(4.4) \quad X_1 > 0, \quad \varrho = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \varrho} = 0.$$

Zgodnie z ideą przewodnią metody uśredniania poprawek funkcjonalnych, aproksymujemy równanie (4.1) następującym równaniem w pierwszym przybliżeniu:

$$(4.5) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} \right) = (1 - \varrho^2) q_1(X_1),$$

gdzie:

$$(4.6) \quad q_1(X) = 2 \int_0^1 \frac{\partial T_1}{\partial X_1} \varrho d\varrho.$$

Całkując równanie (4.5) dwukrotnie po zmiennej  $\varrho$  otrzymujemy, po uwzględnieniu warunków brzegowych (4.3) i (4.4), pierwsze przybliżenie pola temperatury:

$$(4.7) \quad T_1 = \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) q_1(X_1) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) q_1(X_1) + 1.$$

Podstawiając (4.7) do (4.6) otrzymuje się, po wykonaniu przypisanego całkowania, jedno równanie różniczkowe zwyczajne w postaci:

$$(4.8) \quad \frac{1}{12} \ddot{q}_1(X_1) + q_1(X_1) = 0,$$

którego całka ogólna wynosi:

$$(4.9) \quad q_1(X_1) = C_3 \exp(-12X_1).$$

Stała całkowania  $C_3$  wyznaczymy, podobnie jak poprzednio, z postulatu minimum całki z odchylenia, czyli z warunku:

$$(4.10) \quad \int_S \int [T(\varrho, 0) - T_1(\varrho, 0)] dS = \text{minimum}.$$

Zakładając, podobnie jak poprzednio, że wyrażenie (4.10) jest równe zeru, otrzymujemy:

$$(4.11) \quad \int_0^1 \left[ \frac{1}{16} (1 - \varrho^4) q_1(0) - \frac{1}{4} (1 - \varrho^2) q_1(0) + 1 \right] \varrho d\varrho = 0,$$

a stąd:

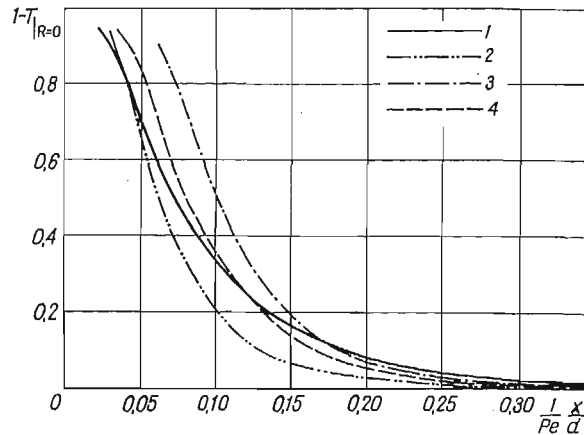
$$(4.12) \quad q_1(0) = C_3 = 12.$$

Zatem pierwsze przybliżenie pola temperatury cieczy ma, w omawianym przez nas zagadnieniu brzegowym, postać:

$$(4.13) \quad T_1(\varrho, X_1) = \frac{3}{4}(1-\varrho^4)\exp(-12X_1) - 3(1-\varrho^2)\exp(-12X_1) + 1.$$

Postępując podobnie jak w przypadku wyznaczania pierwszego przybliżenia, otrzymamy następującą postać drugiego przybliżenia pola temperatury cieczy:

$$(4.14) \quad T_2(\varrho, X_1) = \left[ \frac{9}{64}(1-\varrho^8) - \frac{5}{4}(1-\varrho^6) + \frac{561}{160}(1-\varrho^4) - \frac{201}{40}(1-\varrho^2) \right] \exp(-12X_1) + \left[ \frac{207}{40}(1-\varrho^4) - \frac{207}{10}(1-\varrho^2) \right] X_1(-12X_1) + 1.$$



Rys. 1. Rozkład bezwymiarowej temperatury cieczy wzdłuż osi rury 1 — rozwiązanie ścisłe [4], 2 — wyrażenie (4.13) 3 — wyrażenie (4.14), 4 — wyrażenie (4.15)

W pracy [2] rozwiązano równanie (4.1) przy identycznych warunkach brzegowych, również za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych. Do wyznaczania wartości początkowych zastosowano jednak warunek polegający na spełnieniu postulatu minimum całki z kwadratu odchylenia. Otrzymano następującą postać drugiego przybliżenia pola temperatury cieczy:

$$(4.15) \quad T_2(\varrho, X_1) = \left[ \frac{15}{152}(1-\varrho^8) - \frac{50}{57}(1-\varrho^6) + \frac{36985}{15162}(1-\varrho^4) - \frac{26090}{7581} \right] (1-\varrho_2) \exp(-12X_1) + \left[ \frac{69}{19}(1-\varrho^4) - \frac{276}{19}(1-\varrho^2) \right] X_1(-12X_1) + 1.$$

Na rys. 1 porównano przebieg zmian bezwymiarowej temperatury cieczy w osi rury kołowej w/g zależności (4.13) (4.14) i (4.15) z rozwiązaniem ścisłym znalezionym w pracy [4].

5. Przykład liczbowy

W celu zilustrowania przeprowadzonych rozważań oraz przeprowadzenia pewnych porównań otrzymanych rozwiązań przybliżonych z wynikami rozwiązania ścisłego, wykonano przykład liczbowy.

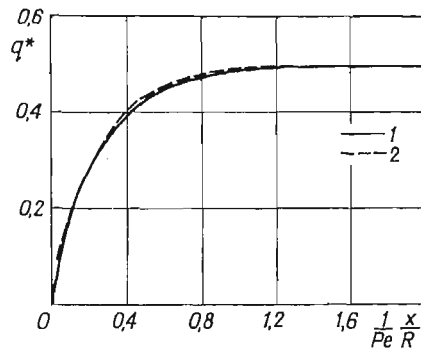
Jak wiadomo, strumień ciepły na ścianie rury można wyznaczyć z zależności [4, 5, 7]:

$$(5.1) \quad q_s = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial t}{\partial \varrho} \Big|_{\varrho=1}$$

Podstawiając do (5.1) wyrażenie (3.21) otrzymamy, po prostych przekształceniach:

$$(5.2) \quad q^* = -\frac{q_s R}{\lambda A} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{4}{5} + \frac{69}{20} X \right) \exp(-6X) \right]$$

Na rys. 2 porównano zależność (5.2) z rozwiązaniem, znalezionym w pracy [7]. Jak widać, uzyskano już w drugim przybliżeniu wysoki stopień dokładności.



Rys. 2. Przebieg zmian wartości strumienia ciepła na ścianie rury przy jej liniowym wzroście temperatury 1 — rozwiązanie otrzymane w pracy [7] 2 — rozwiązanie otrzymane w niniejszej pracy

Liczbę Nusselta, charakteryzującą proces wymiany ciepła, można zapisać w postaci [4, 5, 7]:

$$(5.3) \quad Nu = \frac{-2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} \right) \Big|_{\varrho=1}}{\Theta - \Theta_s},$$

gdzie:

$$(5.4) \quad \Theta = \Theta_2 = \frac{t_2(\varrho, X) - t_0}{A} = X - \frac{1}{8}(3 - 4\varrho^2 + \varrho^4) + \left[ \frac{67}{80}(1 - \varrho^2) + \right. \\ \left. - \frac{187}{320}(1 - \varrho^4) + \frac{5}{24}(1 - \varrho^6) - \frac{3}{128}(1 - \varrho^8) + \frac{69}{40}(1 - \varrho^2)X - \frac{69}{160}(1 - \varrho^4)X \right] \exp(-6X).$$

Bezwymiarową temperaturę średnią  $\bar{\Theta}$  w wyrażeniu (5.3) wyznaczono z zależności:

$$(5.5) \quad \bar{\Theta}(X) = \frac{\int_0^1 w(\varrho)\Theta_2(\varrho, X)\varrho d\varrho}{\int_0^1 w(\varrho)\varrho d\varrho},$$

otrzymując ostatecznie:

$$(5.6) \quad \bar{\Theta}(X) = X + \frac{11}{48} + \left( \frac{91}{384} + \frac{253}{320}X \right) \exp(-6X).$$

Ponieważ bezwymiarowa temperatura ścianki rury wynosi

$$(5.7) \quad \Theta|_{\varrho=1} = \Theta_s = X$$

zatem wyrażenie (5.3) można przepisać w postaci:

$$(5.8) \quad \text{Nu} = \frac{1 - \left( \frac{4}{5} + \frac{69}{20}X \right) \exp(-6X)}{\frac{11}{48} + \left( \frac{91}{384} + \frac{253}{320}X \right) \exp(-6X)}$$

Graniczna wartość liczby Nu wynosi

$$(5.9) \quad \lim \text{Nu} = 4,363636\dots$$

i pokrywa się dokładnie z wynikiem analitycznych obliczeń ścisłych [4, 5, 7].

## 6. Wnioski

1° Przedstawiona w niniejszej pracy oraz w rozprawie [2] modyfikacja metody uśredniania poprawek funkcjonalnych umożliwia rozszerzenie jej zastosowania w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przewodzenia ciepła.

2° Zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych:

- a) eliminuje intuicyjny wybór postaci funkcji aproksymujących,
- b) umożliwia łatwiejszy dobór odpowiednich funkcji przybliżonych w porównaniu z innymi, analitycznymi metodami przybliżonymi.

3° Zastosowanie omawianej metody w obrazie przekształcania całkowego Laplace'a:

- a) eliminuje konieczność, wyznaczania wartości początkowych z dodatkowych postulatów,
- b) determinuje wybór kryterium, z którego należy wyznaczyć wartości początkowe w przypadku niestosowania transformacji Laplace'a. Jest nim postulat minimum całki z odchylenia.

4° W przeliczonym w p. 4 przykładzie wyższy stopień dokładności aproksymacji rozwiązania ścisłego uzyskano przez zastosowanie do wyznaczenia wartości początkowych postulat minimum całki z kwadratu odchylenia.

## Literatura cytowana w tekście

1. Ю. Д. Соколов, *О методе осреднения функциональных поправок*, УМЖ, 1, 9, (1957).
2. K. RUP, *Modyfikacja metody uśredniania funkcjonalnych poprawek w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przepływu ciepła*, Mech. Teor. i Stos., 1, 16, (1978).
3. В. КРАЈЕВСКИ, *Modyfikacja metody Kantorowicza*, Archiwum Termodynamiki i Spalania, 4, 7, (1976).
4. Б. С. ПЕТУХОВ, *Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах*, Москва (1967).
5. W. M. KAYS, *Convective heat and mass transfer*, Mc Graw-Hill Book Company, (1967).
6. J. H. WEINER, *A Method for the Approximate Solution of the Heat Equation*, WADC Techn. Rep. 54—427, (AD 97343), (1955).
7. П. В. Цой, *Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса*, Энергия, Москва (1971).
8. D. DICKER, M. B. FRIEDMAN, *Solutions of Heat-Conduction Problems with Nonseparable Domains*, J. Appl. Mech., Transactions of the ASME, ser E, 85, (1963).
9. В. КРАЈЕВСКИ, *Application of variational methods to problems of unsteady heat flow*, Arch. Mech. Stosowanej, 5, 20, (1968).
10. Praca zbiorowa, *Poradnik inżyniera — Matematyka*, WNT Warszawa (1971).
11. Н. М. МАТВЕЕВ, *Дифференциальные уравнения*, Минск (1976).
12. В. КРАЈЕВСКИ, *Ein directes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, (1973).
13. Н. Е. ВЕТНЭЛ, *A generalized Galerkin — Kantorovich treatment of transient evaporation through a finite region*, Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 10, (1967).

## Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОПРАВOK  
В ОБЛАСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Предложена работа является продолжением модификации метода осреднения функциональных поправок, изложенной в работе [2]. Здесь применено этот приближенный метод в области преобразования Лапласа, что исключило необходимость определения начальных значений. Через дополнительные требования. Кроме этого указано, что применение метода осреднения функциональных поправок в области преобразования Лапласа определяет автоматический критерий из которого надо определить начальную величину при использовании этого метода минуя интегральные преобразования.

В обсужденном случае требование минимум интеграла из отклонения является этим критерием. Приближенные результаты расчета сравнено с точным решением. Анализ полученных решений во втором приближении показал, что они хорошо согласуются с точными решениями. Кроме того сравнено приближенные решения, найдены в настоящей работе и работе [2], в которых применено два различных требования, а именно: минимум интеграла из отклонения и минимум интеграла из квадрата отклонения. Во втором случае получено повышенную точность аппроксимации.

## Summary

APPLICATION OF LAPLACE TRANSFORM TO THE METHOD OF AVERAGING OF  
FUNCTIONAL CORRECTIONS

This paper constitutes an extension of the averaging method of functional corrections discussed and applied in [2] to a differential parabolic equation of transport phenomena. The method in consideration is here used in the region of Laplace transform. The procedure makes it possible to determine the initial values without using additional conditions. Moreover it is shown that such an application of the method

discussed determines in a natural way the condition from which the initial values are to be found when the Laplace transform is not being employed. In the case discussed it is the condition of the minimum of integral deviation.

It was pointed out in a numerical example that a very good accuracy of the trial solution already in the second approximation step was obtained.

Besides, different trial solutions of the equation discussed in the paper [2] were compared when choosing two conditions for determining the initial values i.e. the condition of the minimum of integral deviation and that of the minimum of integral quadratic deviation. It was pointed out that the second condition gives a better accuracy of the trial solution with respect to the exact one.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI  
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 sierpnia 1978 roku.*

---