

ANALIZA PŁYTY KOŁOWEJ GRUBEJ O ORTOTROPII CYLINDRYCZNEJ SPOCZYWAJĄCEJ
NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

WACŁAW ZWOLIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Założenia podstawowe

Obliczanie kołowej płyty grubej izotropowej spoczywającej na sprężystym podłożu przedstawił w pracy [1] D. FREDERICK w oparciu o teorię E. Reissnera. W wielu konstrukcjach płyty tego typu wykonane są z materiału o własnościach ortotropowych. Płyta perforowana otworami tworzącymi siatkę trójkątną może być przykładem płyty o ortotropii konstrukcyjnej [2].

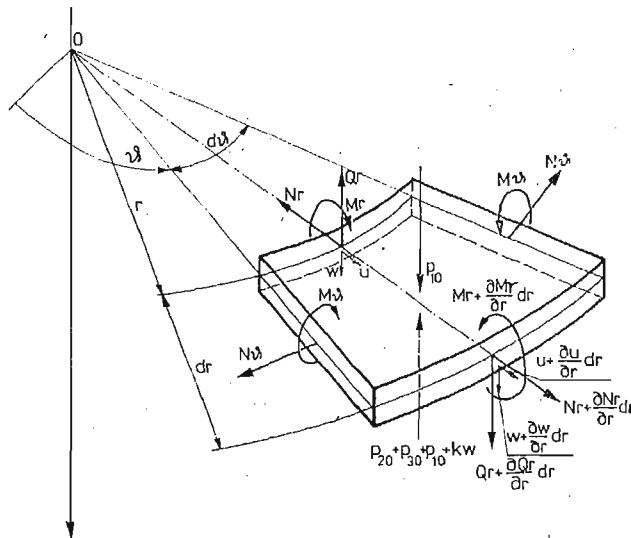
Przyjęto do obliczeń następujące stałe materiałowe płyty:

E^x, G^x, ν^x — moduły sprężystości i liczbę Poissona w płaszczyźnie płyty.

E^z, G^z, ν^z — moduły sprężystości i liczbę Poissona w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty.

Ponadto założono:

- materiał płyty podlega uogólnionemu prawu Hooke'a,
- grubość elementu mierzona wzdłuż normalnej do powierzchni środkowej nie ulega zmianie podczas odkształcenia płyty [3].



Rys. 1.

c) naprężenia styczne τ_{rz} i $\tau_{\theta z}$ (lub odpowiadające im odkształcenia γ_{rz} i $\gamma_{\theta z}$) zmieniają się wzdłuż grubości płyty według określonej funkcji [1, 3, 4, 5].

Na rysunku 1 przedstawiono przyjęty walcowy układ osi współrzędnych oraz obciążenie elementu płyty. Ciśnienia p_1, p_2 działają na powierzchnię płyty, zaś $p = kw$ oznacza oddziaływanie podłoża sprężystego (k — stała sprężystego podłoża, w — ugięcie środkowej powierzchni płyty). Założono, że obciążenie płyty jest symetryczne i wywołuje symetryczne odkształcenia i przemieszczenia $u, w, (v = 0)$ poszczególnych elementów płyty. Tak więc przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia będą funkcjami współrzędnych: r, z (rys. 1) [4].

2. Odkształcenia i naprężenia

Naprężenie styczne τ_{rz} występujące w rozpatrywanej płycie określono na podstawie prac [1, 3, 4, 5] w postaci:

$$(2.1) \quad \tau_{rz} = \frac{1}{8} h^2 \varphi \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right),$$

gdzie:

h — grubość płyty

φ — nieznaną funkcją współrzędnej „ r ”

Odkształcenia na podstawie prawa Hooke'a [1, 5, 6] mają postać:

$$(2.2) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E^x} (\sigma_r - \nu^x \sigma_\theta) - \frac{\nu^x}{E^z} \sigma_z,$$

$$(2.3) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^x} (\sigma_\theta - \nu^x \sigma_r) - \frac{\nu^x}{E^z} \sigma_z,$$

$$(2.4) \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G^x} \tau_{rz}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G^z} \tau_{\theta z}.$$

Po wstawieniu wyrażen (2.4) do odpowiednich równań geometrycznej hipotezy W. Własowa dotyczącej ogólnej teorii powłok [7] (jak podano w pracy [3]), przemieszczenie $u(r, z)$ dowolnego punktu płyty jest określone funkcją:

$$(2.5) \quad u(r, z) = u(r) - z \frac{dw}{dr} + \frac{z\varphi h^2}{8G^z} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

gdzie:

$u(r) = u$ — przemieszczenie punktów środkowej powierzchni płyty

Odkształcenia dowolnego elementu płyty wyrażone w przemieszczeniach można przedstawić w postaci [3].

$$(2.6) \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr} - z \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{zh^2}{8G^z} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \frac{d\varphi}{dr},$$

$$(2.7) \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{zh^2}{8G^z} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \frac{\varphi}{r},$$

$$(2.8) \quad \gamma_{rz} = \frac{h^2}{8G^z} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi.$$

Naprężenia wyrażone odpowiednio w funkcji przemieszczeń, po wykorzystaniu zależności (2.2) (2.8), określone są wyrażeniami:

$$(2.9) \quad \sigma_r = \frac{E^x}{1-(\nu^x)^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu^x \frac{u}{r} - z \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu^x}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{zh^2}{8G^z} \cdot \right. \\ \cdot \left. \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu^x \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \frac{\nu^z}{1-\nu^x} \frac{E^x}{E^z} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + kw) + \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) (p_1 - p_2 - kw) \right]$$

$$(2.10) \quad \sigma_s = \frac{E^x}{1-(\nu^x)^2} \left[\nu^x \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} - z \left(\nu^x \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{zh^2}{8G^z} \cdot \right. \\ \cdot \left. \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \left(\nu^x \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \frac{\nu^z}{1-\nu^x} \frac{E^x}{E^z} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + kw) + \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) (p_1 - p_2 - kw) \right],$$

$$(2.11) \quad \sigma_z = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + kw) + \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) (p_1 - p_2 - kw),$$

$$(2.12) \quad \tau_{rz} = \frac{h^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi.$$

3. Siły przekrojowe

Siły i momenty przekrojowe działające w płycie (rys. 1) wyrażone w funkcji przemieszczeń po uwzględnieniu wyrażen (2.9) ÷ (2.12) przyjmują postać [3]:

$$(3.1) \quad N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r dz = \frac{E^x h}{1-(\nu^x)^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu^x \frac{u}{r} \right) - \frac{\nu^z h}{2(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 + p_2 + kw),$$

$$(3.2) \quad N_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_s dz = \frac{E^x h}{1-(\nu^x)^2} \left(\nu^x \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) - \frac{\nu^z h}{2(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 + p_2 + kw),$$

$$(3.3) \quad Q_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz = \frac{h^3}{12} \varphi,$$

$$(3.4) \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = -\frac{E^x h^3}{12[1-(\nu^x)^2]} \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu^x}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{h^2}{10G^z} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu^x \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \\ + \frac{\nu^z h^2}{10(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 - p_2 - kw),$$

$$(3.5) \quad M_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz = -\frac{E^x h^3}{12[1-(\nu^x)^2]} \left[\nu^x \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{h^2}{10G^z} \left(\nu^x \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) \right] + \\ + \frac{\nu^z h^2}{10(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} (p_1 - p_2 - kw).$$

4. Równania równowagi

Równania równowagi elementu rozpatrywanej płyty (rys. 1) w tym przypadku mają postać [7]:

$$(4.1) \quad \frac{d}{dr} (rN_r) - N_\vartheta = 0,$$

$$(4.2) \quad \frac{d}{dr} (rQ_r) + r(p_1 - p_2 - kw) = 0,$$

$$(4.3) \quad \frac{d}{dr} (rM_r) - M_\vartheta - rQ_r = 0$$

Wstawiając do tych równań siły i momenty określone zależnościami (3.1) ÷ (3.5) otrzymamy:

$$(4.4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = \eta \frac{dw}{dx},$$

$$(4.5) \quad \frac{d}{dx} (x\varphi) + \frac{12x}{\beta h^3} (p_1 - p_2 - kw) = 0,$$

$$(4.6) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} - \left(\frac{1}{x^2} + 2C \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2C}{x} \right) \frac{dw}{dx} + w = \frac{p_1 - p_2}{k},$$

gdzie:

$$x = \beta r; \quad D^x = \frac{E^x h^3}{12[1-(\nu^x)^2]}; \quad \eta = \frac{\nu^z(1+\nu^x)k}{2\beta E^z}; \quad \beta^4 = \frac{k}{D^x};$$

$$(4.7) \quad C = \frac{1}{2} \left[\frac{6k}{5\beta^2 h G^z} - \frac{\nu^z(\beta h)^2}{10(1-\nu^x)} \frac{E^x}{E^z} \right] = \frac{3k}{5\beta^2 h} \left[\frac{1}{G^z} - \frac{\nu^z(1+\nu^x)}{E^z} \right],$$

Tak więc otrzymano układ trzech równań różniczkowych (4.4) ÷ (4.6) w którym niewiadomymi są funkcje u , w , φ .

5. Rozwiązanie równań różniczkowych równowagi płyty

W celu rozwiązania równania różniczkowego (4.6) wprowadzono parametr α [1, 8] określony równością:

$$(5.1) \quad C = -\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}(e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}).$$

Ponieważ parametr α zależy bezpośrednio od stałej C , która może przyjmować różne wartości, zatem należy zbadać pierwiastki równania otrzymanego z (5.1):

$$(5.2) \quad t^2 + 2Ct + 1 = 0,$$

gdzie:

$$t = e^{2i\alpha}.$$

Pierwiastki tego równania wynoszą:

$$(5.3) \quad t_{1,2} = -C \pm \sqrt{C^2 - 1}$$

i iloczyn tych pierwiastków równy jest jedności ($t_1 \cdot t_2 = 1$). Tak więc dla wyznaczenia wartości parametru α otrzymujemy równania:

$$(5.4) \quad e^{2i\alpha_1} = t_1; \quad e^{2i\alpha_2} = t_2 = \frac{1}{t_1},$$

z których wynikają zależności (przy uwzględnieniu tylko głównych wartości argumentu ($-\pi < \arg t_1 \leq \pi$))

$$2i\alpha_1 = \ln|t_1| + i \arg t_1,$$

$$2i\alpha_2 = \ln|t_2| + i \arg t_2 = -(\ln|t_1| + i \arg t_1).$$

Po podzieleniu powyższych równań przez i otrzymamy:

$$(5.5) \quad 2\alpha_1 = \arg t_1 - i \ln|t_1|,$$

$$2\alpha_2 = -(\arg t_1 - i \ln|t_1|).$$

Aby nie ograniczać rozwiązania równania różniczkowego (4.6) założono, że występująca w nim stała C może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste. W związku z tym wyróżniono trzy przedziały wartości i dwa przypadki na granicy przedziałów, które może przyjmować stała C .

a. Przedział I: $-1 < C < +1$. Pierwiastki (5.3) przyjmują w tym przypadku wartości zespolone. Łatwo zauważyć [9], że $|t_1| = 1$ i $\ln|t_1| = 0$, a więc z wyrażenia (5.5) otrzymamy:

$$(5.6) \quad 2\alpha_1 = +\arg t_1 = \arccos C - \pi,$$

$$2\alpha_2 = -\arg t_1 = -(\arccos C - \pi).$$

Jak widać parametry α_1 i α_2 przyjmują wartości rzeczywiste o przeciwnych znakach. Zatem parametr α występujący w równaniu (5.1) w przypadku ($-1 < C < 1$) może być określony zależnością:

$$(5.7) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos C; \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

W celu rozwiązania równania różniczkowego (4.6) wprowadzimy zmienną:

$$(5.8) \quad y = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + we^{-2i\alpha},$$

i otrzymamy równanie:

$$(5.9) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + ye^{2i\alpha} = \frac{p_1 - p_2}{k}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$(5.10) \quad y = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 J_0(xe^{i\alpha}) + C_3 H_0^{(1)}(xe^{i\alpha}),$$

gdzie:

$J_0(xe^{i\alpha})$ — funkcja Bessela (funkcja walcowa pierwszego rodzaju) rzędu zerowego

$H_0^{(1)}(xe^{i\alpha})$ — funkcja Hankela (funkcją walcową trzeciego rodzaju) rzędu zerowego.

Wstawiając wyrażenie (5.10) do równania (5.8) otrzymamy:

$$(5.11) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + we^{-2i\alpha} = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 J_0(xe^{i\alpha}) + C_3 H_0^{(1)}(xe^{i\alpha}).$$

Całka ogólna tego równania jest również całką ogólną równania (4.6) i ma ona postać:

$$(5.12) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 J_0(xe^{i\alpha}) + C_2 J_0(xe^{-i\alpha}) + C_3 H_0^{(1)}(xe^{i\alpha}) + C_4 H_0^{(1)}(xe^{-i\alpha}),$$

gdzie:

$C_1 \div C_4$ — stałe całkowania zespolone

Aby wyrazić funkcję ugięcia w postaci rzeczywistej, funkcje walcowe rozłożono na części rzeczywiste i urojone w postaci [8]:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} J_0(xe^{\pm i\alpha}) &= \text{Ber}(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Bei}(xe^{i\alpha}), \\ H_0^{(1)}(xe^{\pm i\alpha}) &= \text{Her}(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Hei}(xe^{i\alpha}). \end{aligned}$$

Wykorzystując zależność (5.13) i przekształcając odpowiednio stałe całkowania zespolone $C_1 \div C_4$ możemy przekształcić funkcje ugięcia (5.12), do postaci nie zawierającej elementów urojonych. W ten sposób otrzymamy:

$$(5.14) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} + c_1 \text{Ber}(xe^{i\alpha}) + c_2 \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + c_3 \text{Her}(xe^{i\alpha}) + c_4 \text{Hei}(xe^{i\alpha})$$

gdzie:

$C_1 \div C_4$ — stałe całkowania rzeczywiste

Z rozwiązania równania różniczkowego (4.5) po wykorzystaniu funkcji (5.14) otrzymamy:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \varphi = -\frac{12k}{\beta h^3} \left\{ C_1 [\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \right. \\ + C_2 [-\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \\ + C [\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ \left. + C_4 [-\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \frac{B}{x} \right\} \end{aligned}$$

gdzie:

B — stała całkowania

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\text{Ber}(xe^{i\alpha})] &= \text{Ber}'(xe^{i\alpha}); & \frac{d}{dx} [\text{Bei}(xe^{i\alpha})] &= \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \\ \frac{d}{dx} [\text{Her}(xe^{i\alpha})] &= \text{Her}(xe^{i\alpha}); & \frac{d}{dx} [\text{Hei}(xe^{i\alpha})] &= \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \end{aligned}$$

Wstawiając pochodną względem x funkcji ugięcia (5.14) do równania różniczkowego (4.4) łatwo otrzymamy całkę ogólną tego równania w postaci:

$$(5.16) \quad u = -\eta \left\{ C_1 [\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \right. \\ + C_2 [-\text{Ber}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \\ + C_3 [\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ \left. + C_4 [-\text{Her}'(xe^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Hei}'(xe^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + A_1 x + \frac{A_2}{x} \right\},$$

gdzie:

A_1, A_2 — stałe całkowania.

b. Przedział II: $C > 1$. Pierwiastki $t_{1,2}$ (5.3) są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, zatem $\arg t_1 = \pi$ i z równań (5.5) otrzymamy:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} 2\alpha_1 &= \pi - i \ln(+C + \sqrt{C^2 - 1}), \\ 2\alpha_2 &= -[\pi - i \ln(+C + \sqrt{C^2 - 1})], \end{aligned}$$

ponieważ $|t_1| = -t_1$

Wyznaczone tu parametry α_1 i α_2 są zespolonymi liczbami przeciwnymi.

W dalszych obliczeniach uwzględnimy następującą zależność:

$$(5.18) \quad \begin{aligned} xe^{i\alpha_1} &= xe^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln \gamma_1} = i\gamma_1 x, \\ xe^{i\alpha_2} &= xe^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln \gamma_1} = -i \frac{x}{\gamma_1}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\gamma_1 = \sqrt{C + \sqrt{C^2 - 1}}.$$

Następnie pamiętając, że istnieją między funkcjami walcowymi zależności [10]:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} J_0(i\gamma_1 x) &= I(\gamma_1 x); & I_0\left(-i \frac{x}{\gamma_1}\right) &= I_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right), \\ H_0^{(1)}(i\gamma_1 x) &= -\frac{2}{\pi} i K_0(\gamma_1 x); & H_0^{(1)}\left(-\frac{x}{\gamma_1}\right) &= -\frac{2}{\pi} i K_0\left(-\frac{x}{\gamma_1}\right), \\ K_0\left(-\frac{x}{\gamma_1}\right) &= K_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - i\pi I_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right), \end{aligned}$$

gdzie:

$I_0(\gamma_1 x)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela rzędu zerowego

$K_0(\gamma_1 x)$ — zmodyfikowana funkcja Mac Donalda rzędu zerowego

zatem dla rozpatrywanego tu przypadku funkcja ugięcia „ w ” (5.14) będąca całką ogólną równania różniczkowego (4.6), po odpowiednim doborze stałych całkowania, przyjmie postać:

$$(5.20) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 I_0(\gamma_1 x) + C_2 I_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + C_3 K_0(\gamma_1 x) + C_4 K_0\left(\frac{x}{\gamma_1}\right).$$

Funkcja φ , będąca całką równania różniczkowego (4.5) ma postać:

$$(5.21) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta\gamma_1 h^3} \left[C_1 I_1(\gamma_1 x) + C_2 \gamma_1^2 I_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - C_3 K_1(\gamma_1 x) - C_4 \gamma_1^2 K_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) + \frac{\gamma_1 B}{x} \right].$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego (4.4) w tym przypadku otrzymano:

$$(5.22) \quad u = \frac{\eta}{\gamma_1} \left[C_1 I_1(\gamma_1 x) + C_2 \gamma_1^2 I_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) - C_3 K_1(\gamma_1 x) - C_4 \gamma_1^2 K_1\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) \right] + \frac{\gamma_1 A_1 x}{2} + \frac{\gamma_1 A_2}{x}.$$

c. Przedział III: $C < -1$. Pierwiastki $t_{1,2}$ (5.3) w tym przypadku są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, zatem $\arg t_1 = 0$ i z równania (5.5) otrzymamy:

$$(5.23) \quad \begin{aligned} 2\alpha_1 &= -i \ln(-C - \sqrt{C^2 - 1}), \\ 2\alpha_2 &= i \ln(-C - \sqrt{C^2 - 1}). \end{aligned}$$

Otrzymane więc parametry α_1, α_2 są liczbami zespolonymi przeciwnymi. W dalszych obliczeniach uwzględnimy następującą zależność:

$$(5.24) \quad \begin{aligned} x e^{i\alpha_1} &= x e^{1/2 \ln \gamma_2} = \gamma_2 x, \\ x e^{i\alpha_2} &= x e^{-1/2 \ln \gamma_2} = \frac{x}{\gamma_2}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\gamma_2 = \sqrt{-C - \sqrt{C^2 - 1}}.$$

W rozpatrywanym tu przedziale wartości stałej C , rozwiązaniem równania różniczkowego (4.6) będzie funkcja:

$$(5.25) \quad w = \frac{p_1 - p_2}{k} C_1 J_0(\gamma_2 x) + C_2 J_0\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + C_3 Y_0(\gamma_2 x) + C_4 Y_0\left(\frac{x}{\gamma_2}\right),$$

gdzie:

$J_0(\gamma_2 x), Y_0(\gamma_2 x)$ — funkcja Bessela rzędu zerowego.

Funkcję φ otrzymano tu z równania różniczkowego (4.5) w postaci:

$$(5.26) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta\gamma_2 h^3} \left[C_1 J_1(\gamma_2 x) + C_2 \gamma_2^2 J_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + C_3 Y_1(\gamma_2 x) + C_4 \gamma_2^2 Y_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + \frac{\gamma_2 B}{x} \right].$$

Z rozwiązania równania różniczkowego (4.4) dla tego przypadku, otrzymano funkcje przemieszczeń „ u ” w postaci:

$$(5.27) \quad u = \frac{\eta}{\gamma_2} \left[C_1 J_1(\gamma_2 x) + C_2 \gamma_2^2 J_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) + C_3 Y_1(\gamma_2 x) + C_4 \gamma_2^2 Y_1\left(\frac{x}{\gamma_2}\right) \right] + \frac{\gamma_2 A_1 x}{2} + \frac{\gamma_2 A_2}{x}.$$

Należy tu jeszcze przedstawić rozwiązania równania różniczkowego (4.6) dla dwóch szczególnych wartości C ; t.j. $C = 1$, i $C = -1$.

d. Przypadek: $C = 1$. Łatwo można sprawdzić, przez bezpośrednie podstawienie do równania różniczkowego (4.6), że rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja:

$$(5.28) \quad w = \frac{P_1 - P_2}{k} + C_1 I_0(x) + C_2 x I_1(x) + C_3 K_0(x) + C_4 x K_1(x).$$

Z rozwiązań zaś równań różniczkowych (4.5) i (4.4) w tym przypadku otrzymamy:

$$(5.29) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta h^3} \left\{ C_1 I_1(x) + C_2 [x I_0(x) - 2I_1(x)] - C_3 K_0(x) - C_4 [x K_0(x) + 2K_1(x)] + \frac{B}{x} \right\},$$

$$(5.30) \quad u = \eta \left\{ C_1 I_1(x) + C_2 [x I_0(x) - 2I_1(x)] - C_3 K_1(x) - C_4 [x K_0(x) + 2K_1(x)] + \frac{A_1 x}{2} + \frac{A_2}{x} \right\}$$

e. Przypadek: $C = -1$. Dla tego przypadku rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (4.6) jest funkcja:

$$(5.31) \quad w = \frac{P_1 - P_2}{k} + C_1 J_0(x) + C_2 x J_1(x) + C_3 Y_0(x) + C_4 x Y_1(x).$$

Następnie z rozwiązania równania różniczkowego (4.5) i (4.4) odpowiednio otrzymamy:

$$(5.32) \quad \varphi = \frac{12k}{\beta h^3} \left\{ C_1 J_1(x) - C_2 [x J_0(x) - 2J_1(x)] + C_3 Y_1(x) - C_4 \cdot [x Y_0(x) - 2Y_1(x)] + \frac{B}{x} \right\},$$

$$(5.33) \quad u = \eta \left\{ C_1 J_1(x) - C_2 [x J_0(x) - 2J_1(x)] + C_3 Y_1(x) - C_4 \cdot [x Y_0(x) - 2Y_1(x)] + \frac{A_1 x}{2} + \frac{A_2}{x} \right\}.$$

6. Stałe całkowania

Dla wyznaczenia stanu naprężeń i odkształceń obciążonej płyty należy określić stałe całkowania z warunków zamocowania brzegu wewnętrznego i zewnętrznego.

Dla płyty pełnej (bez otworu w środku) stała całkowania $C_3 = C_4 = A_2 = B = 0$, ponieważ dla $x = \beta r = 0$ funkcja „ w ” (5.14), „ φ ” (5.15) i „ u ” (5.16) mogą tylko w tym przypadku przyjmować wartości skończone. Natomiast stałe całkowania C_1, C_2, A_1 można wyznaczyć z warunków obciążenia brzegu zewnętrznego, więc:

$$(6.1) \quad M_{r(x=\beta a)} = M_a; \quad N_{r(x=\beta a)} = N_a; \quad Q_{r(x=\beta a)} = Q_a$$

gdzie:

a — promień zewnętrzny płyty.

W technicznych zagadnieniach najczęściej stała $C(5.1)$ przyjmuje wartość mniejszą od jedności. Zatem wstawiając funkcję „ w ” (5.14), „ φ ” (5.15) i „ u ” (5.16) odpowiednio do wyrażenia (3.1), (3.2) i (3.4) po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymamy równania dla określenia stałych całkowania C_1 , C_2 , A_1 w postaci:

$$(6.2) \quad \frac{M_r}{\beta^2 D^x} = C_1 \left\{ -\text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha - \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \right. \\ \left. + \frac{6(1-\nu^x)_k}{5\beta^3 h a G^z} \left[\left(\cos 2\alpha + \frac{5\beta^2 h G^z}{6k} \right) \text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\} + \\ + C_2 \left\{ \text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha - \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha - \frac{6(1-\nu^x)_k}{5\beta^3 h a G^z} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha - \left(\cos 2\alpha + \frac{5\beta^2 h G^z}{6k} \right) \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\},$$

$$(6.3) \quad \frac{2\beta a E^z N_a}{\nu^z k E^x} = C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [-\text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \\ + \beta a A_1 - \frac{2\beta a p_1}{(1-\nu^x)k},$$

$$(6.4) \quad \frac{\beta Q_a}{k} = -C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha].$$

Dalej można traktować stałe całkowania jako wielkości znane. Przemieszczenia punktów leżących na brzegu powierzchni środkowej płyty oraz kąt obrotu elementów liniowych mierzonych wzdłuż grubości płyty, w otoczeniu środkowej powierzchni płyty (dla $x = \beta a$ i $z = 0$) w tym przypadku w oparciu o zależności (5.14), (2,6) można przedstawić w postaci:

$$(6.5) \quad w_a = \frac{p_1 - p_2}{k} + C_1 \text{Ber}(\beta a e^{i\alpha}) + C_2 \text{Bei}(\beta a e^{i\alpha}),$$

$$(6.6) \quad u_a = -\eta \{ C_1 [\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha] + \\ + C_2 [-\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \cos 2\alpha] + \beta a A_1 \},$$

$$(6.7) \quad \Theta_a = -\frac{3k}{2\beta h G^z} \left\{ C_1 \left[\left(\cos 2\alpha + \frac{2\beta h G^z}{3k} \right) \text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) + \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[\text{Ber}'(\beta a e^{i\alpha}) \sin 2\alpha + \left(\cos 2\alpha + \frac{2\beta h G^z}{3k} \right) \text{Bei}'(\beta a e^{i\alpha}) \right] \right\}$$

gdzie:

$$\Theta = \frac{\partial u \left(\frac{x}{\beta}, z \right)}{\partial z}.$$

Dla weryfikacji podanych zależności przeprowadzono obliczenia dla płyty wykonanej z materiału o ortotropii cylindrycznej takiej jak dla płyt perforowanych w zależności od współczynnika perforacji określonego w pracy T. SŁOTA [2]. Następnie założono, że własności materiału w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty są takie same jak w płaszczyźnie płyty przy danym współczynniku perforacji (materiał izotropowy). Otrzymano mniejsze naprężenia dla płyty ortotropowej w porównaniu z naprężeniami dla takiej samej płyty izotropowej

- a) dla współczynnika perforacji 0,2 naprężenia otrzymano mniejsze o 17%
- b) dla współczynnika perforacji 0,4 naprężenia otrzymano mniejsze o 10%
- c) dla współczynnika perforacji 0,6 naprężenia otrzymano mniejsze o 3%

Podane zestawienie świadczy o celowości przeprowadzonej analizy i prawidłowości przyjętych założeń.

Dodatek

Zastosowana w pracy postać niektórych funkcji walcowych nie jest na ogół podawana w takiej formie w ogólnie dostępnej literaturze. Zatem dla ułatwienia przeprowadzenia obliczeń podano niżej postać tych funkcji (występujących pod nazwą funkcji Dinnika) oraz podstawowe ich zależności:

$$(1) \quad J_n(xe^{\pm i\alpha}) = \text{Ber}_n(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Bei}_n(xe^{i\alpha}),$$

$$(2) \quad H_n^{(1)}(xe^{\pm i\alpha}) = \text{Her}_n(xe^{i\alpha}) \pm i \text{Hei}_n(xe^{i\alpha})$$

$$(3) \quad \text{Ber}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Ber}(xe^{i\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \cos 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2},$$

$$(4) \quad \text{Bei}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Bei}(xe^{i\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2},$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{Her}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Her}(xe^{i\alpha}) = & \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Ber}(xe^{i\alpha}) - \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{Hei}_0(xe^{i\alpha}) = \text{Hei}(xe^{i\alpha}) = & \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Ber}(xe^{i\alpha}) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Bei}(xe^{i\alpha}) - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \cos 2k\alpha}{2^{2k} (k!)^2} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) = \cos \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cos 2k\alpha}{2^{2+1} k!(k+1)!} - \sin \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \sin 2k\alpha}{2^{2+1} k!(k+1)!},$$

$$(8) \quad \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) = \sin \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cos 2k\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!} + \cos \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \sin 2k\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!},$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{Her}_1(xe^{i\alpha}) &= \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) - \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\sin \alpha}{x} + \frac{x \sin \alpha}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \sin(2k+1)\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right], \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{Hei}_1(xe^{i\alpha}) &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) + \\ &- \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\cos \alpha}{x} + \frac{x \cos \alpha}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} \cos(2k+1)\alpha}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right], \end{aligned}$$

gdzie: $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

$m = 1, 2 \dots$

$C = 0,57721566$ — stała Eulera

$$(11) \quad \frac{d}{dx} [\text{Ber}(xe^{i\alpha})] = -\cos \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) + \sin \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}),$$

$$(12) \quad \frac{d}{dx} [\text{Bei}(xe^{i\alpha})] = -\sin \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) - \cos \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}),$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [\text{Ber}(xe^{i\alpha})] &= -\cos 2\alpha \text{Ber}(xe^{i\alpha}) + \sin 2\alpha \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{x} [\cos \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) - \sin \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha})], \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [\text{Bei}(xe^{i\alpha})] &= -\sin 2\alpha \text{Ber}(xe^{i\alpha}) - \cos 2\alpha \text{Bei}(xe^{i\alpha}) + \\ &+ \frac{1}{x} [\sin \alpha \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) + \cos \alpha \text{Bei}_1(xe^{i\alpha})]. \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę, że dla $x = 0$ mamy:

$$\text{Ber}(xe^{i\alpha}) = 1; \quad \text{Bei}(xe^{i\alpha}) = 0; \quad \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) = 0;$$

$$\text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \text{Ber}_1(xe^{i\alpha}) \right] = \frac{\cos \alpha}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \text{Bei}_1(xe^{i\alpha}) \right] = \frac{\sin \alpha}{2}$$

a funkcje $\text{Her}(xe^{i\alpha})$, $\text{Hei}(xe^{i\alpha})$, $\text{Her}_1(xe^{i\alpha})$, $\text{Hei}_1(xe^{i\alpha})$ w tym przypadku przyjmują wartości nieokreślone.

Aby obliczyć pochodne funkcji $\text{Her}(xe^{i\alpha})$ i $\text{Hei}(xe^{i\alpha})$ należy we wzorach (11)÷(14) zastąpić odpowiednio funkcję $\text{Ber}(xe^{i\alpha})$ funkcją $\text{Her}(xe^{i\alpha})$, a funkcję $\text{Bei}(xe^{i\alpha})$ funkcją $\text{Hei}(xe^{i\alpha})$.

Pozostałe funkcje walcowe są na ogół znane i występują w ogólnie dostępnej literaturze.

Literatura cytowana w tekście

1. D. FREDERICK, *On some problems in bending of thick circular plates on an elastic foundation*. Journal of Applied Mechanics. June 1956.
2. T. SLOT, *Orthotropic analysis of thick perforated plate with pressure on one side*. In: Second International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology. Berlin 10 - 14.09.1973 vol. F6/8.
3. S. A. AMBARCUMJAN, D. W. PIETMALAŻJAN, *K teorii ortotropnych obłoczek i plastinok*. Izwestia A. N. Arm. SSR (Fiz-mat, nauk) T — XII Nr 1 1959 r.
4. S. A. AMBARCUMJAN, *K teorii izgiba anizotropnych plastinok*, Izwestija AN — SSSR OTN Nr 5 1958.
5. S. TIMOSZENKO, S. WOJNOWSKIJ — KRIEGIRE, *Teoria płyt i powłok*. Wyd. ARKADY 1962 r.
6. *Sprawocznik Procnost — Ustoicziwost — Koliebanija*, Tom 1 Izd. Masinostroenie, Moskwa 1968 r.
7. W. Z. WŁASOW, *Obszaja teoria obłoczek* Izd. Tiechn — Teoriet liter. Moskwa — Leningrad 1949 r.
8. W. URBANOWSKI, *Niektóre przypadki zginania płyt okrągłych połączonych z podłożem sprężystym o własnościach uogólnionych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr. 3 Warszawa 1956
9. A. J. MARKUSIEWICZ, *Teoria analitycznych funkcji*, Gostiechizdat, Moskwa — Leningrad 1950
10. J. M. RYŻYK, J. S. GRADSZTEJN.: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów* Wyd. PWN Warszawa 1964 r.

Резюме

ТОЛСТАЯ КРУГЛАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ОРТОТРОПНАЯ ПЛИТА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В статье представлено аналитическое решение для перфорированной толстой круглой плиты лежащей на упругом основании и нагруженной давлением. Дифференциальные уравнения равновесия решено для общего случая. Полученные функции перемещений средней поверхности плиты дают возможность определения сил, моментов и напряжений в любом её сечении. Постоянные интегрирования определено для цилиндрически ортотропной плиты нагруженной силами и моментом на контуре. Для облегчения применений теории перечислены свойства цилиндрических функций.

Summary

A THICK ORTHOTROPIC CIRCULAR PLATE ON AN ELASTIC FOUNDATION

In the paper the analytical solution for a thick orthotropic circular plate on an elastic foundation subjected to pressure load is presented. A general solution of a differential equation of a plate has been carried out. Displacement functions of mid surface elements have been obtained permitting to describe internal forces, moments and stresses. In the case of the plate loaded by edge forces and moments the integral constants were defined.

To facilitate the applications we have listed in Appendix the properties of cylindrical functions.

ŁÓDŹ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 stycznia 1979 roku