

ZAGADNIENIA KONCENTRACJI NAPREŻEŃ W POBLIŻU OTWORÓW W OŚRODKU
NIEJEDNORODNYM. CZĘŚĆ I. PRZEGLĄD.

W. I. ANDREJEW (MOSKWA)

W zagadnieniach mechaniki niejednorodnego ośrodka ciągłego rozpatruje się trzy podstawowe typy niejednorodności: nieciągłą, dyskretną i stochastyczną. Dla każdego z przedstawionych typów, równania oraz metody rozwiązania są zupełnie różne, dlatego można rozpatrywać trzy samodzielne klasy zagadnień mechaniki niejednorodnego ośrodka ciągłego.

Zadania z pierwszym typem niejednorodności sprowadzają się do równań różniczkowych ze zmiennymi współczynnikami, w drugim przypadku rozwiązanie polega na „zszyciu” rozwiązań na granicy obszarów z własnościami jednorodnymi, w ostatnim przypadku należy posługiwać się aparatem statystyki matematycznej.

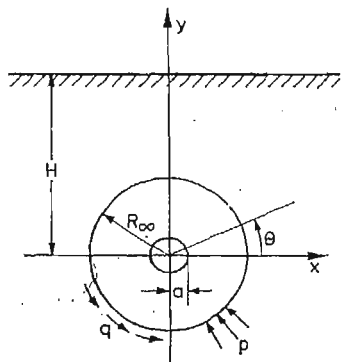
W tej pracy rozpatrzmy niejednorodności pierwszego typu, kiedy mechaniczne charakterystyki materiału są ciągłymi funkcjami współrzędnych, przy tym w każdym punkcie ciała spełnione są ogólne prawa teorii sprężystości lub plastyczności.

Niejednorodność o konkretnej postaci powstaje przy różnych sposobach obróbki części, w procesie produkcji (działanie wybuchowe, prowadzące do lokalnego zagęszczenia lub spulchnienia materiału, twardnienie betonu itp.), przy napromieniowaniu, istnieniu pola temperatury itd. W ostatnim przypadku, w zależności od materiału, gradient temperatury powodujący niejednorodność może być istotnie różny, od kilkuset stopni (metale) do kilku stopni (zamarznięty grunt). I tak w zamarzniętym gruncie przy zmianie temperatury o 5–7 stopni moduł Younga może zmienić się dwukrotnie i więcej. Zależność charakterystyk mechanicznych od współrzędnych wyznacza się doświadczalnie w każdym konkretnym przypadku, a potem aproksymuje się funkcje $E(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$, $\sigma_r(x, y, z)$ itd. Tutaj E , ν i σ_r są odpowiednio modułem Younga, współczynnikiem Poissona, granicą płynięcia materiału. Często otrzymanie odpowiednich danych doświadczalnych jest bardzo trudne, dlatego funkcje te mogą być wzięte w przybliżeniu, aby tylko pokazywały tendencję zmieniania się własności, a w rezultacie rozwiązania konkretnego zadania mechanicznego otrzymamy jakościową ocenę wpływu tego czy innego czynnika. Dalej będziemy zakładać, że wszystkie charakterystyki mechaniczne ośrodka są znanymi i zadanymi funkcjami.

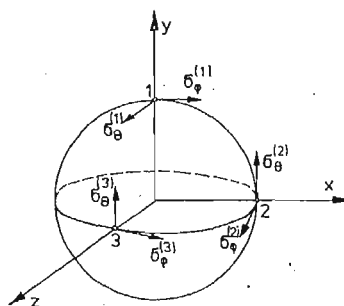
Jedne z pierwszych prac poświęconych teorii sprężystości ośrodka niejednorodnego napisał S. G. MICHLIN [1, 2], wyprowadził w nich równania płaskiego zagadnienia dla ciągłej i dyskretniej niejednorodności. Później podobne równania dla bardziej złożonych przypadków zostały podane w pracach [3, 4 i innych]. Jedną z podstawowych prac na temat teorii plastyczności ośrodka niejednorodnego jest praca W. OLSZAKA, J. RYCHLEWSKIEGO i W. URBANOWSKIEGO [5]. W ostatnich latach prace poświęcone mechanic

ośrodka niejednorodnego opublikowali G. P. KOLCZIN [6, 7], W. A. ŁOMAKIN [8], N. A. ROSTOCZEW [9] i inni autorzy [10-12]. Jest także duża ilość prac poświęconych konkretnym zagadnieniom mechaniki, w których niejednorodność odgrywa istotną rolę. W pierwszej kolejności, oczywiście, rozwiązano klasyczne zagadnienia mechaniki ciała stałego — zagadnienie Lamégo dla walca i kuli [13-15 i inne], zadanie o klinie [16], zadanie Flamanta-Boussinesq'a [17, 18]. Porównanie otrzymanych rozwiązań ze znanymi klasycznymi, pokazuje, że niejednorodność ośrodka może istotnie zmienić obraz stanu naprężeń i odkształceń.

Niniejszy przegląd poświęcony jest przede wszystkim pracom, w których rozwiązane są zadania o rozkładzie naprężeń w pobliżu otworów. Wśród wielu zastosowań takich zadań w technice, szczególna uwaga będzie zwrócona na zagadnienie koncentracji naprężeń w pobliżu podziemnych pustek (jam, wydrążień), mających prostą postać: pustka kulista i usytuowany poziomo, dostatecznie długi otwór walcowy. W pierwszym przypadku zadanie jest osiowoosymetryczne względem osi Y (Rys. 2.), a w drugim zadanie można rozpatrywać jako zadanie o płaskim stanie odkształcenia (Rys. 1.). Jedyнным obciążeniem,



Rys. 1



Rys. 2

które powoduje powstanie pola naprężeń jest ciężar własny ośrodka. Przy tym ciężar własny jako obciążenie zewnętrzne występuje dwójako. Jeśli z masywu wyciąć pewną objętość zawierającą pustkę, to przechodząc do zadania brzegowego i zewnętrznego brzegu danej objętości, należy przyłożyć obciążenie normalne p i styczne q .

$$(1) \quad p = -\gamma(H - R_\infty \cos \theta) \left(\frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right),$$

$$q = \frac{\gamma}{2} (H - R_\infty \cos \theta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sin 2\theta,$$

gdzie γ — ciężar właściwy materiału, R_∞ — promień wyciętej objętości, θ — kąt biegunowy. Oprócz tego, ciężar własny wywołuje siły objętościowe, które we współrzędnych kartezjańskich mają postać $Y = -\gamma$, $X = Z = 0$, a we współrzędnych biegunowych i kulistych

$$(2) \quad R = -\gamma \cos \theta,$$

$$\Theta = \gamma \sin \theta,$$

trzecia składowa jest równa zeru.

Określenie naprężeń nawet w przypadku jednorodnym nie jest zadaniem elementarnym, jest kilka prac [19-22], w których rozpatruje się płaskie zagadnienie z otworem walcowym. Na przykład, zgodnie z [20], naprężenie σ_θ w pobliżu szczeliny określa się wzorem

$$(3) \quad \sigma_\theta = \frac{\gamma a}{4} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \left[\left(3 \frac{r}{a} + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \Theta + \left(-\frac{r}{a} + \frac{a^3}{r^3} - 4 \frac{a^5}{r^5} \right) \sin 3\Theta \right] - \\ - \frac{\gamma H}{2} \left[\frac{1}{1-\nu} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\Theta \right] + \\ + \gamma a \left\{ \left[\frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{a}{r} - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \frac{a^3}{r^3} \right] \sin \Theta + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{4} \frac{r}{a} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} + \frac{a^5}{r^5} \right] \sin 3\Theta \right\},$$

gdzie r — promień poprowadzony ze środka pustki, a — promień otworu. W przytoczonych wyrażeniach ostatnie składowe odpowiadają stanowi naprężenia w nieskończonej płaszczyźnie z otworem, a pierwsze dwie występują przy przejściu do półpłaszczyzny. Poza tym, druga składowa odpowiada rozwiązaniu zadania Kirscha, jeśli w kierunku pionowym występuje obciążenie γH , a w poziomym $\frac{\nu}{1-\nu} \gamma H$. W ten sposób, wpływ ciężaru własnego wyciętej objętości określa się, w przytoczonym wyrażeniu, pierwszą i trzecią składową. Jeśliby ocenić rząd poprawki, jaką wprowadza uwzględnienie ciężaru własnego, to okazuje się, że na brzegu otworu wzdłuż promienia poziomego ($\Theta = 0, \pi$) poprawka zeruje się, a przy innych wartościach Θ zależy ona od ν i osiąga największą wartość dla $\nu = 0$ w punkcie $r = a, \Theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Wartość poprawki równa jest γa , natomiast rząd naprężeń, określony drugą składową, równy jest γH . Można wyciągnąć dwa wnioski:

1. Wzdłuż poziomego promienia, tam gdzie występuje największa koncentracja naprężeń, uwzględnienie wpływu ciężaru własnego ośrodka nie zwiększa dokładności w porównaniu ze znacznie prostszym zadaniem Kirscha.

2. Uwzględnienie wpływu ciężaru własnego ośrodka daje istotną poprawkę w rozwiązaniu, gdy promień otworu jest porównywalny z głębokością położenia szczeliny H . W przeciwnym przypadku poprawkę można pominąć.

Oczywiście, podobne wnioski będą prawdziwe również w przypadku pustki kulistej.

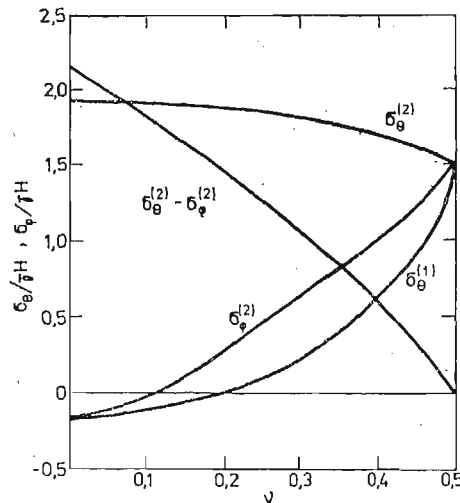
W ten sposób, dla oceny stanu naprężenia przy spełnieniu warunku $H \gg a$ w przypadku jednorodnym można wykorzystać rozwiązanie Kirscha w zadaniu z otworem walcowym, a przy pustce kulistej — zadanie o ściskaniu ośrodka w trzech kierunkach z takim samym otworem. Ostatnie rozwiązanie otrzymuje się bardzo łatwo drogą superpozycji trzech rozwiązań dotyczących rozciągania (ściskania) pręta z pustką kulistą [23]. Przytoczymy wzory na naprężenia występujące przy ściskaniu ośrodka w trzech kierunkach. Niech w pewnej odległości od pustki na ośrodek oddziałują obciążenia ściskające

$$\sigma_y = -\gamma H, \quad \sigma_x = \sigma_z = -\frac{\nu}{1-\nu} \gamma H.$$

Wówczas w pobliżu pustki naprężenie $\sigma_r = 0$, a dwa pozostałe naprężenia normalne w punktach charakterystycznych oblicza się ze wzorów (Rys. 2).

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} &= -\frac{3}{2} \gamma H \frac{(1+\nu)(5\nu-1)}{(7-5\nu)(1-\nu)}, \\ \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\theta^{(3)} &= -\frac{3}{2} \gamma H \frac{(9-16\nu+5\nu^2)}{(7-5\nu)(1-\nu)}, \\ \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi^{(3)} &= -\frac{3}{2} \gamma H \frac{(-1+14\nu-15\nu^2)}{(7-5\nu)(1-\nu)}. \end{aligned}$$

Na Rys. 3 pokazaliśmy zależności tych trzech naprężeń (zauważmy, że przy zmianie kąta Θ przyjmują one wartości ekstremalne) od współczynnika Poissona. Poza tym, przytoczyliśmy wykres różnicy naprężeń głównych $\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\varphi^{(2)}$. Widać, że wykres ten leży powyżej wykresu $\sigma^{(2)}$ dla małych wartości ν i w tym naogół rzadkim przypadku może odpowiadać za zniszczenie. Praktycznie, przy wartościach ν (0.2 ÷ 0.35) różnica między naprężeniami głównymi $\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_r^{(2)}$ tzn. w rzeczywistości samo naprężenie $\sigma_\theta^{(2)}$ ($\sigma_r = 0$) jest maksymalne i zmienia się nieznacznie przy zmianach ν . Ostatni fakt pozwala stosować do oceny naprężeń jeszcze prostsze rozwiązanie — zadanie Lamégo dla grubościennej powłoki kulistej. Zauważmy, że rozwiązanie (4) dla $\nu = 0.5$ (przypadek równomiernego wszech-



Rys. 3

stronnego ściskania) jest rozwiązaniem zadania Lamégo. Jeśli z tego punktu widzenia rozpatrzmy powyżej wspomniane rozwiązanie zadania Kirscha dla płaskiego zagadnienia z otworem walcowym, to okaże się, że współczynnik koncentracji naprężeń $K_\delta = \frac{\sigma_{0 \max}}{\gamma H}$ w zależności od współczynnika Poissona zmienia się w granicach od 2 ($\nu = 0.5$) do 3 ($\nu = 0$), co pozwala stosując rozwiązanie zadania Lamégo dla rury grubościennej, wprowadzić poprawkę dla dowolnej wartości ν .

Przytoczone powyżej rozważania, dotyczące sprowadzenia zadania o koncentracji naprężeń w pobliżu podziemnych pustek do znacznie prostszych zadań miały dwa cele. Po pierwsze, pokazaliśmy, że założenia o nie istnieniu ciężaru własnego i o tym, że współczynnik Poissona jest bliski 0.5 przy określonych warunkach nie dają istotnych różnic w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym. Po drugie, przy przejściu do zagadnień z własnościami niejednorodnymi rozpatrzenie tych dużo prostszych zadań pozwala dużo jaśniej i zrozumialej wyjaśnić wpływ różnych czynników na stan odkształcenia i naprężenia. Przy tym, jak widać, wyniki obliczeń tak jak i w zadaniach dotyczących ośrodka jednorodnego nie będą bardzo różnić się od rzeczywistości. Większość prac o koncentracji naprężeń w ośrodku niejednorodnym, tak w teorii sprężystości, jak w teorii plastyczności poświęcona jest jednowymiarowym zadaniom symetrycznym. Przed przejściem do rozpatrzenia poszczególnych prac, warto zatrzymać się krótko na podstawowych równaniach mechaniki ciągłego ośrodka niejednorodnego i niektórych metodach ich rozwiązań. Jak wspomnieliśmy powyżej, równania teorii sprężystości ciągłego ośrodka niejednorodnego dla zagadnienia płaskiego zostały wyprowadzone w pracach [1, 3]. Później analogiczne równania otrzymano w pracach [4, 6 i innych]. Tak jak w przypadku płaskiego zagadnienia jednorodnego, możemy posłużyć się funkcją naprężeń Airy'ego — i w ten sposób zagadnienie sprowadzi się do jednego równania czwartego rzędu, które można zapisać w postaci

$$(5) \quad \nabla^4 \Phi + L\Phi + P^H + P^0 = 0.$$

gdzie $\nabla^2 = \Delta$ — operator Laplace'a, L — operator różniczkowy trzeciego rzędu, a P^H i P^0 — odpowiednio niejednorodny i jednorodny operator, działające na człony nie zawierające Φ . Zarówno w biegunowym, jak i w kartezjańskim układzie współrzędnych wspomniane operatory przy dowolnych zależnościach, obu stałych sprężystości od współrzędnych mają bardzo skomplikowany zapis (tak np. operator L w biegunowym układzie współrzędnych, w ogólnym przypadku składa się z 33 składowych). Jednak dla przejrzystości przytoczymy tutaj postać operatorów L i P^H dla szczególnego przypadku, kiedy $\nu = \text{const.}$, a moduł Younga zadany jest przez jedną z prostszych zależności $E = E_0 r^n$, przy czym z pośród sił objętościowych różna od zera jest tylko składowa pionowa (Rys. 1.) równa γ (ciężar własny ośrodka). W tym przypadku

$$(6) \quad L\Phi = -\frac{2n}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2n}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \left[-\frac{2n}{r^2} + \frac{Bn}{r^2} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \\ + \left[\frac{3n}{r^4} - \frac{Bn(n+1)}{r^4} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \left[\frac{n}{r^3} - \frac{Bn(n+1)}{r^3} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

$$(7) \quad P^H = \frac{n(n+1)}{2r^2} [-(1-B)\gamma \cos \theta + (1+B)\gamma \cos \theta \cos 2\theta] - \\ - \frac{n}{r} \left[-2(1-B)\gamma \cos \theta + \frac{1+B}{2}\gamma \cos \theta \cos 2\theta + (1+B)\gamma \sin \theta \sin 2\theta \right].$$

Tutaj $B = \frac{\nu}{1-\nu}$. Widać, że także w tym stosunkowo prostym przypadku równanie (5) ma bardzo złożoną postać.

Wśród różnych metod rozwiązań płaskiego zagadnienia niejednorodnej teorii sprężystości, w większości stosuje się tradycyjnie: metodę zmiennej zespolonej [24], funkcje specjalne [18], metodę małego parametru, rozwiązania przy pomocy szeregów [4, 25] itd. Interesująca jest ogólna metoda rozwiązania równania (5), przedstawiona przez G. B. KOŁCZINA [26] metoda kolejnych przybliżeń. W metodzie tej poszukuje się funkcji Φ w postaci szeregu

$$(8) \quad \Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i.$$

Wówczas równanie (5) można przedstawić w postaci nieskończonego układu równań

$$(9) \quad \begin{aligned} \nabla^4 \Phi_0 &= -P^H - P^0, \\ \nabla^4 \Phi_1 &= -L\Phi_0, \\ &\dots \dots \dots \\ \nabla^4 \Phi_k &= -L\Phi_{k-1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że szereg (8) jest malejący i poczynając od pewnego N odrzucimy jego człony przyjmując, że ostatni zatrzymany jest dostatecznie mały, to otrzymamy $L\Phi_{n-1} = 0$.

Wówczas możemy przejść do skończonego układu równań (9), w którym pierwsze równanie daje rozwiązanie zadania jednorodnego, a wszystkie następne są pewnymi poprawkami wynikającymi z niejednorodności. Przy korzystaniu z tej metody warunki brzegowe musimy spełnić jedynie przy całkowaniu pierwszego równania, tzn. rozwiązując zadanie jednorodne. We wszystkich następnych etapach całkowania warunki brzegowe są jednorodne. Jeśli w pierwszym etapie nie udaje się dokładnie spełnić warunków na granicy, to można to osiągnąć przy obliczeniu następnych przybliżeń. Metoda ta była zastosowana przez G. B. KOŁCZINA w rozwiązaniu pewnych zagadnień [6], a także przez W. N. TORLINA [25]. Należy zauważyć, że jak przyznaje sam autor tej metody, zbieżność jej nie jest udowodniona i może być jedynie przeanalizowana drogą porównania kolejnych przybliżeń.

Poniżej, na przykładzie zadania Lamégo rozpatruje się dwa przypadki posługiwania się tą metodą. Rozpatrzmy rurę grubościenną, której promień wewnętrzny równy jest a , a zewnętrzny $b = 2a$, obciążoną zewnętrznym równomiernym ciśnieniem p . Przypuśćmy, że $\nu = 0.5$, a zależność modułu Younga od promienia ma postać

$$(10) \quad E = E_0 r^n.$$

Takie zadanie ma rozwiązanie ścisłe, przy czym nie potrzeba posługiwać się równaniem (5), lecz można rozwiązać zadanie, przyjmując jako funkcję rozwiązującą naprężenie σ_r . W danym przypadku zadanie sprowadza się do rozwiązania równania drugiego rzędu [27, 28]. Nie zatrzymując się nad szczegółami wyprowadzenia tego równania i metodzie rozwiązania (co pokażemy w drugiej części pracy), przytoczmy tu postać równania dla danego przypadku oraz wzory na naprężenie otrzymane ze ścisłego rozwiązania zadania

$$(11) \quad r\sigma_r'' + (3-n)\sigma_r' = 0.$$

Tutaj prim oznacza różniczkowanie względem promienia

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p}{1-2^{n-2}} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{n-2} \right], \\ \sigma_\theta &= -\frac{p}{1-2^{n-2}} \left[1 - (n-1) \left(\frac{r}{a} \right)^{n-2} \right]. \end{aligned}$$

Dane rozwiązanie jest prawdziwe dla każdego n , za wyjątkiem $n = 2$. W tym przypadku w wyniku całkowania otrzymuje się logarytmy. Zadanie to można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń, która może być zastosowana do równania (11). Jeśli wydzielić w tym równaniu część odpowiadającą zadaniu jednorodnemu, to można zapisać je w postaci

$$(11a) \quad r\sigma_r' + 3\sigma_r' = n\sigma_r'.$$

Z prawej strony występuje odpowiednik operatora L z równania (5). Znajdując rozwiązanie zadania jednorodnego

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma_{r0} &= -\frac{4p}{3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{\theta0} &= -\frac{4p}{3} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

z równania (11a) można obliczyć pierwszą poprawkę danego rozwiązania, która ma postać

$$(14) \quad \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{4n}{3} \left[-\frac{1}{3} \ln 2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{a^2}{r^2} \ln \frac{r}{a} \right], \\ \sigma_{\theta1} &= \frac{4n}{3} \left[-\frac{1}{3} \ln 2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \ln \frac{r}{a} \right) \right], \end{aligned}$$

a po pierwszej iteracji otrzymuje się rozwiązanie w postaci sumy

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \sigma_{r0} + \sigma_{r1}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \sigma_{\theta0} + \sigma_{\theta1}. \end{aligned}$$

Porównanie naprężeń σ_θ , obliczonych ze wzorów (12) i (15) pokazuje że już po pierwszym przybliżeniu otrzymuje się nie wiele różniące się wyniki dla pewnych n , na przykład $n = 1$ i $n = -2$.

Jednak w przypadku $n = 3$ różnica wynosi 50% i w tym przypadku jasne jest, że pierwsze przybliżenie jest niewystarczające. Widać, że nawet przy rozwiązaniu jednego zadania, w zależności od ilości parametrów, potrzeba dużej ilości etapów iteracji dla otrzymania dobrych wyników. Zauważmy, że w danym przykładzie ścisłe rozwiązanie otrzymuje się łatwiej, niż przy zastosowaniu metody kolejnych przybliżeń, ale często metoda ta może być stosowana znacznie efektywniej, kiedy ścisłego rozwiązania nie udaje się otrzymać.

Przytoczony poniżej drugi przykład również dotyczy zagadnienia zbieżności rozpatrywanej metody kolejnych przybliżeń. Autorowi tej pracy wspólnie z T. S. Danikina udało się dla szczególnego przypadku otrzymać rozwiązanie w postaci szeregu, który przy określonych warunkach jest zbieżny do ścisłego rozwiązania. Tak jak i w poprzednim przykładzie, rozpatruje się rurę grubościenną, której wewnętrzny promień $\rho = 1$, a zewnętrzny $\rho = b$ (ρ — bezwymiarowy promień). Rura może być obciążona dowolnym rów-

nomiernym ciśnieniem na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu. Kładąc $\nu = 0.5$ i przyjmując zależność modułu Younga od promienia w postaci

$$(16) \quad E(\varrho) = E_0 \left(1 - \frac{m}{\varrho^n} \right),$$

podstawowe równanie rozwiązujące to zadanie można zapisać w następującej postaci

$$(17) \quad \frac{d^2 F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\varrho} - \frac{F}{\varrho^2} = L(F),$$

gdzie F — funkcja związana z naprężeniami następującymi zależnościami

$$\sigma_r = \frac{F}{\varrho}, \quad \sigma_\theta = \frac{dF}{d\varrho},$$

a $L(F)$ operator określony przez niejednorodność materiału

$$(18) \quad L(F) = \frac{m}{\varrho^n} \left(\frac{d^2 F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\varrho} - \frac{F}{\varrho^2} \right) + \frac{mn}{\varrho^{n+1}} \left(\frac{dF}{d\varrho} - \frac{F}{\varrho} \right).$$

W przypadku $m = 0$ moduł Younga jest stały, operator $L(F) = 0$ i równanie (17) odpowiada zadaniu jednorodnemu. Zadając funkcję F w postaci szeregu $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ i przekształcając równanie (17) w układ (9), udaje się skonstruować zależność rekurencyjną

$$(19) \quad L(F_k) = \beta L(F_{k-1}) = \beta^k L(F_0),$$

gdzie

$$\beta = \frac{2m\alpha}{n+2}, \quad \alpha = \frac{b^{n+2} - 1}{b^n(b^2 - 1)},$$

Zauważmy, że warunki brzegowe w tym rozwiązaniu spełnione są już w pierwszym etapie przy rozwiązaniu zadania jednorodnego, a we wszystkich następnych etapach

$$(20) \quad F_k(\varrho = 1) = F_k(\varrho = b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Na podstawie zależności (19) daje się także wyrazić wszystkie następne rozwiązania F przez funkcję F_1 : $F_k = \beta^{-1} F_1$,

$$F_k = \beta^{k-1} F_1,$$

przy tym

$$F_1 = \frac{2mB_0}{n+2} \left[\frac{\alpha}{\varrho} + (1-\alpha)\varrho - \frac{1}{\varrho^{n+1}} \right],$$

a B_0 — jedna ze stałych rozwiązania jednorodnego zadania

$$F_0 = \frac{B_0}{\varrho} + C_0 \varrho.$$

W ten sposób, pełne rozwiązanie równania (17) przedstawia się w postaci nieskończonej sumy

$$(21) \quad F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k = \frac{B_0}{\varrho} + C_0 \varrho + F_1 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1}.$$

Szereg ten jest zbieżny dla $|\beta| < 1$ i w tym przypadku równy $\frac{\beta}{1-\beta}$. Po prostych przekształceniach funkcję F można doprowadzić do postaci

$$(22) \quad F = C_{01}\varrho + \frac{\beta_{01}}{\varrho} - B_{01} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\varrho^{n+1}}.$$

gdzie

$$B_{01} = \frac{B_0}{1-\beta}, \quad C_{01} = C_0 + B_{01} \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Ścisłe rozwiązanie równania (17) otrzymano w [29], pokrywa się ono z rozwiązaniem (22). Rozpatrzmy warunek zbieżności szeregu (21) — $|\beta| < 1$, który nakłada określone ograniczenia na parametry m , n i promień b . Tak np. dla $m = 0.75$, $n = -1$, $b = 2$, $\beta = 1$ szereg jest rozbieżny. Dla funkcji (16) asymptotycznie zbiegających do wartości granicznej przy zwiększeniu się ϱ , n jest zawsze dodatnie, a $m \leq 1$ (jeśli $m > 1$, to dla $\varrho = 1$, E musiałoby być ujemne). Rozpatrując przypadek $b \rightarrow \infty$ ($\alpha = 1$) można określić obszar zbieżności szeregu (21) w danym przypadku. Ponieważ teraz $\beta = \frac{2m}{n+2}$, to warunkiem koniecznym zbieżności szeregu jest, by stałe m i n były związane zależnością

$$-\frac{n+2}{2} < m < \frac{n+2}{2}.$$

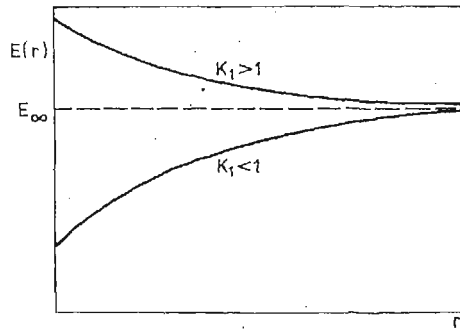
Prawa nierówność przy przedstawionych powyżej ograniczeniach ($m \leq 1$, $n > 0$) spełniona jest zawsze, a lewa może nie być spełniona, wówczas szereg będzie rozbieżny. W tych przypadkach, kiedy szereg jest zbieżny, szybkość jego zbieżności w dużym stopniu zależy od wielkości β . Dla małych β w celu otrzymania dostatecznej dokładności konieczne są 2-3 przybliżenia. Jeśli β jest bliskie 1, to dla otrzymania dokładnych wyników może być niezbędna duża liczba iteracji. Fakt ten jest potwierdzony także przez rozpatrzony powyżej przykład.

Zanim przejdziemy do omówienia poszczególnych prac, dotyczących rozwiązań zadań związanych z koncentracją naprężeń w ośrodku niejednorodnym, przedyskutujemy bardziej szczegółowo wpływ niejednorodności na mechaniczne własności materiałów. Jako podstawowe źródła rozpatrzmy prace [5, 29]. W pracy [5] główną uwagę zwrócono na zmianę sprężysto-plastycznych własności metali pod wpływem dwóch podstawowych przyczyn: napromieniowanie strumieniami neutronowymi i pole temperatury. Przytoczone są dane doświadczalne dotyczące wpływu wymienionych czynników na wykres rozciągania, granicę płynięcia oraz wytrzymałość pewnych metali. Zauważmy, że zwiększenie strumienia neutronów prowadzi do zwiększenia się dwóch ostatnich charakterystyk, a zwiększenie temperatury obniża granicę wytrzymałości i plastyczności. Pokazane zależności doświadczalne mają naogół skomplikowany charakter, różny dla różnych materiałów i ich analityczne przybliżenie jest bardzo trudnym zadaniem.

W pracy [29] na podstawie własnych badań doświadczalnych oraz na podstawie wyników prac [30-34] przytoczono dane na temat własności mechanicznych minerałów i ich zmian, powstających pod wpływem wybuchów i procesów cementacji. Przy wybuchowym

wierceniach tuneli oraz przy tworzeniu pustek za pomocą zamaskowanego wybuchu mogą zachodzić różne zjawiska, w zależności od typu skały. W pewnych przypadkach może nastąpić zgęszczenie materiału, prowadzące do zwiększenia modułu odkształcenia (analogiczne zjawisko zachodzi w minerałach zgęszczonych przez cementację), a w kruchych skałach może powstać obszar zarysowań, w którym moduł odkształcenia jest mniejszy niż w niezniszczonym masywie. Na Rys. 4 przedstawiony jest charakter zależności dwóch omówionych typów. W miarę oddalania się od pustki, moduł dąży asymptotycznie do wartości wyjściowej. Dla takich zależności zakłada się analityczną formę zapisu (tutaj zastosowano inne oznaczenie niż w pracy [29])

$$(23) \quad E = E_{\infty} \left[1 + (k_1 - 1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right],$$



Rys. 4

gdzie E_{∞} — moduł Younga w nienaruszonym masywie, $k_1 E_{\infty}$ — wartość modułu na brzegu pustki, a — promień pustki, n — parametr. Funkcja (23) dobrze opisuje rzeczywiste zależności, dla $k_1 < 1$ jest to typ niższej krzywej na Rys. 4, a dla $k_1 > 1$ — wyższej. Dla funkcji asymptotycznie zbiegających do wartości granicznej, oczywiście $n > 0$. Zauważmy, że podobna zależność występowała już wcześniej (16).

Poza zmianą własności odkształceniowych, przy pojawieniu się niejednorodności po wybuchu zachodzi także zmiana wytrzymałościowych własności materiału. W [29] przytoczone są pewne zależności granicy wytrzymałości w miarę oddalania się od brzegu pustki. W celu analitycznego zapisania tej zależności oraz zależności granicy płynięcia od promienia można też wykorzystać funkcje typu (23). Zatrzymajmy się jeszcze nad pewnymi postaciami aproksymacji własności mechanicznych. W niektórych pracach [5, 14, 38 i innych] dla modułu Younga stosuje się funkcje typu $E = E_0 \varrho^n$, $E = E_0(A + B\varrho)^n$, $E = E_0 e^{n\varrho^k}$ i inne. Pierwsza z przytoczonych funkcji jest najprostszą przy całkowaniu równania różniczkowego, jednak może ona dość efektywnie aproksymować rzeczywistą zależność jedynie w ciałach ograniczonych, ponieważ dla $\varrho \rightarrow \infty$, E również rośnie nieograniczenie, co przeczy rzeczywistości. Zatrzymajmy się jeszcze krótko na drugiej charakterystyce sprężystej — współczynniku Poissona ν . W pracach [35, 37 i innych] dla tego parametru stosuje się także różne zależności funkcjonalne, jednak niedostateczność i niewiarygodność danych doświadczalnych dotyczących wpływu niejednorodności na ten współczynnik nie pozwala określić tej zależności. Oprócz tego, w pracy [37] wskazuje się

na stosunkowo niewielki wpływ tej charakterystyki na stan naprężenia, a na podstawie wszystkich powyższych rozważań należy w obliczeniach przyjmować stały współczynnik Poissona.

Wracając do problemu koncentracji naprężeń w pobliżu pustki w masywie skalnym, rozpatrzmy zagadnienie o podstawowym stanie naprężeń w nim. Korzystając z pracy [29] i pomijając anizotropię masywu, w znacznej odległości od pustki naprężenia możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(24) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= -\gamma H, \\ \sigma_x &= \sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H. \end{aligned}$$

Dla dostatecznie dużych wartości ν (bliskich 0.5), ciśnienie na głębokości H można rozpatrywać jako hydrostatyczne, na co w szczególności wskazuje praca [38]. Zauważmy, że z (24) wynikają przytoczone wyżej równania (1).

Na podstawie powyższych rozważań można pokazać, że dla oceny wpływu niejednorodności na stan naprężenia w pobliżu otworów, wygodnie jest rozpatrzeć jednowymiarowe zadania z osiową i środkową symetrią. Podobne podejście jest dostatecznie usprawiedliwione z punktu widzenia stosunkowo niedużych różnic w jakościowej ocenie koncentracji naprężeń w rzeczywistych warunkach i pozwala poglądowo prześledzić jakościowy wpływ poszczególnych czynników. Właśnie tak postępuje większość autorów [24, 39, 43, 44] nie mówiąc o pracach poświęconych bezpośrednio jednowymiarowym zadaniom [38, 40, 41, 45, 46 i inne]. W niektórych z wymienionych prac [24, 39] podstawiono znacznie ogólniejszy problem, przy dowolnych zależnościach charakterystyk sprężystych od dwóch współrzędnych, wyprowadza się pełne równania dla płaskiego zagadnienia. Jednak konkretne rozwiązania otrzymano dla przypadków uproszczonych, przechodząc od ogólnych równań do zadania jednowymiarowego.

W sposób najbardziej pełny w literaturze rozpatrzono sprężyste osiowosymetryczne zagadnienie walca grubościennego [25, 36, 37, 39]. W tym przypadku zadanie sprowadza się do zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu ze zmiennymi współczynnikami. Jako funkcję rozwiązującą stosuje się albo funkcję naprężeń Airy'ego — albo znacznie prostsze funkcje (patrz np. (17)). Jeśli obie charakterystyki sprężyste E i ν są funkcjami promienia, to przy braku sił objętościowych i temperatury, równanie rozwiązujące dla Φ zgodnie z [25], będzie miało postać

$$(25) \quad f_1^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi - 2f_1 f_1' \frac{d}{dr} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} f_1 f_1' L_1 \Phi - [f_1 f_1' - 2(f_1')^2] L_2 \Phi - \\ - \nu_0 f_1 \left(\frac{1}{r} f_1 f_2'' - 2f_1' f_2' \right) \left(L_1 + \nu_0 f_2 \frac{d^2}{dr^2} \right) \Phi + \nu_0 f_1 f_2' \frac{d^2 \Phi}{dr^2} = 0.$$

Tutaj $f_1(r)$ i $f_2(r)$ — funkcjonalne części charakterystyk sprężystych

$$\begin{aligned} E &= E_0 f_1(r), \quad \nu = \nu_0 f_2(r), \\ L_1 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \nu_0 f_2 \frac{d^2}{dr^2}, \quad L_2 = \frac{d^2}{dr^2} - \nu_0 f_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \\ \nabla^2 &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \end{aligned}$$

Oczywiście rząd tego równania można od razu obniżyć przez wprowadzenie funkcji.

$$\varphi = \frac{e\Phi}{dr}.$$

Jeszcze bardziej upraszcza się równanie, jeśli jedynie moduł Younga jest wielkością zmienną. Wówczas, posługując się funkcją rozwiązującą F(17), otrzymamy równanie drugiego rzędu [39]

$$(26) \quad E(r)r \frac{d^2F}{dr^2} + [E(r) - rE'(r)] \frac{dF}{dr} - \left[\frac{E(r)}{r} - \nu E'(r) \right] F = 0.$$

Podobne do wyżej otrzymanych równania uzyskano też w innych rozpatrywanych przypadkach. Złożoność rozwiązania równania (26), przede wszystkim zależy od postaci funkcji $E(r)$. Jak wyżej wspomniano, najprostszą funkcją ma postać $E(r) = E_0 r^n$, jednak nie zawsze opisuje ona w zadowalający sposób rzeczywiste zależności. Dla takiej funkcji otrzymano rozwiązania w [25, 36, 41]. Bardziej złożony przypadek rozpatrzony jest również w [36], gdzie otrzymano rozwiązanie z pomocą szeregu dla funkcji

$$(27) \quad E(r) = E_0 \frac{(b-r)^n}{(b-a)^n}$$

a i b oznaczają odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny promień rury lub pierścienia.

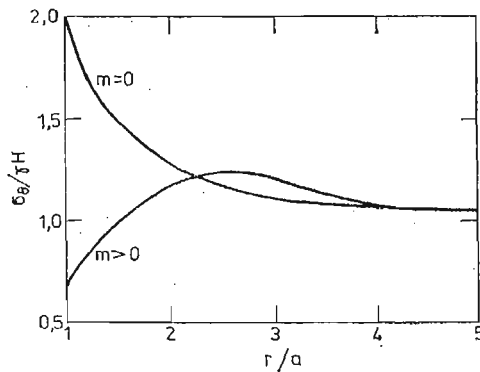
Nie analizując szczegółowo wszystkich możliwych postaci funkcji $E(r)$, przytoczymy jeszcze wyniki pracy [39], w której otrzymano rozwiązanie dla funkcji postaci (16) przy warunkach brzegowych

$$(28) \quad \begin{aligned} r = a \quad \sigma_r &= 0, \\ r = b \rightarrow \infty \quad \sigma_r &= -\gamma H. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają zadaniu o zagłębionej pustce w masywie skalnym przy oddziaływaniu ciśnienia hydrostatycznego. Przytoczymy tu wzór określający naprężenia σ_θ

$$(29) \quad \sigma_\theta = \gamma H \left[1 + \frac{n+2-2m(n+1)r^{-n}}{n+2-2m} \cdot \frac{1}{r^2} \right].$$

Oczywiście dla $m = 0$, co odpowiada przypadkowi jednorodnemu, rozwiązanie przechodzi w znane rozwiązanie zadania Lamégo. Wraz ze zwiększaniem się m , tzn. przy zmniejszaniu się modułu Younga w miarę przybliżania się do brzegu otworu naprężenia znikają, a obszar największej koncentracji naprężeń przenosi się w głąb masywu (Rys. 5).



Rys. 5

Nie zwracając uwagi na to, że współczynnik koncentracji w danym przypadku jest mniejszy niż w przypadku jednorodnym, ale uwzględniając także zmianę we własnościach wytrzymałościowych, nie można być pewnym, że niejednorodność takiej postaci gwarantuje stabilność pustki. Fakt zmniejszania się naprężeń jest dostatecznie oczywisty, ponieważ rozmiękczenie materiału w pobliżu otworu prowadzi do zwiększenia przemieszczeń i częściowego odciążenia strefy otaczającej otwór. Przy istnieniu obszaru zagęszczenia materiału, gdzie moduł Younga jest większy, niż przy nienaruszonym masywie sytuacja jest odwrotna.

Należy powiedzieć kilka słów o drugiej stałej sprężystej $-\nu$. Jak pokazują prace M. M. PŁOTNIKOWA [31, 37 i inne], wpływ tego parametru na stan naprężenia jest niewielki. Jednak trzeba tu zauważyć, że w zadaniu o masywie skalnym, przy założeniu ciśnienia hydrostatycznego, zagadnienie wpływu ν na stan naprężenia jest postawione niepoprawnie, ponieważ zakłada się, że $\nu = 0.5$ na zewnątrz wyciętej objętości i byłoby nielogiczne przyjąć inną wartość wewnątrz objętości. Równocześnie zagadnienie wpływu na koncentrację naprężeń jest interesujące w zadaniach nie związanych z założeniami mechaniki górotworu.

Wśród prac poświęconych zagadnieniu sprężystemu dla grubościennnej powłoki kulistej, rozpatrzmy [35, 39, 42], przy czym w [42] rozwiązanie zadania sprężystego jest częścią zagadnienia sprężysto-plastycznego. W pracy [35] przytoczono równania rozwiązujące dla funkcji φ , związanej z naprężeniami zależnościami

$$\sigma_{\theta} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} \sigma_p = \frac{2}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho}$$

Jest to równanie trzeciego rzędu dla przypadku anizotropowego i przy uwzględnieniu pola temperatury

$$(30) \quad \frac{d^3\varphi}{d\rho^3} + \left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{a_{22}} \frac{da_{22}}{d\rho} \right) \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{a_{22}\rho} \left[\frac{d(2a_{12} + a_{22})}{d\rho} - \frac{2(a_{11} + a_{12})}{\rho} \right] \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{a_{22}\rho} \left[(\alpha_e - \alpha_{\theta})\Omega - \rho \frac{d(\alpha_{\theta} T)}{d\rho} \right].$$

Tutaj a_{ij} — stałe sprężyste, $\alpha_e, \alpha_{\theta}$ — współczynniki liniowej rozszerzalności, T — temperatura. Dalej w rozpatrywanej pracy równanie (30) sprowadza się do równań klasycznych dla różnych zależności modułów sprężystości i współczynników poprzecznej deformacji. Tak więc, jeśli moduły sprężystości są funkcjami potęgowymi typu (10), a współczynniki poprzecznej deformacji są stałe, to równania (30) przechodzi w równanie Eulera. Rozpatrzone są także zależności typu (27), wykładnicze i inne. W każdym z tych przypadków otrzymuje się równania znanego typu: Bessela, hipergeometryczne itd.

W pracy [39] otrzymano rozwiązanie dla pustki kulistej w masywie skalnym przy założeniach rozpatrzonego wyżej zadania o pustce walcowej. Przy czym należy zauważyć, że w przedstawionej pracy jest błąd, który doprowadził do błędnych wyników liczbowych. Jakościowy wpływ niejednorodności na stan naprężeń i odkształceń jest taki sam, jak w płaskim zagadnieniu osiowosymetrycznym.

Na zakończenie przeglądu rozpatrzmy dwie prace W. OLSZAKA i W. URBANOWSKIEGO [41, 42], poświęcone rozwiązaniu sprężysto-plastycznemu dla grubościennego walca i kuli.

Sformułowanie tych dwóch zadań, równania i metody rozwiązania ich są bardzo podobne, dlatego zatrzymamy się jedynie na rozpatrzeniu zadania o kuli. Rozpatruje się materiał idealnie plastyczny, którego moduł sprężystości i granica płynięcia są dowolnymi funkcjami promienia. Przyjmuje się, że współczynnik Poissona jest równy 0.5, jak zwykle w zagadnieniach plastyczności. Rozwiązanie w obszarze sprężystym otrzymano przy pomocy całki

$$(31) \quad g_0(r) = \int \frac{G(r)}{r^4} dr,$$

gdzie $G(r)$ moduł odkształcenia postaciowego. Dalej wyprowadzone są zależności określające ciśnienie pomiędzy obszarem sprężystym (zewnętrznym) i plastycznym (wewnętrznym), oraz równanie przestępne dla określenia promienia c rozdzielającego te dwie strefy. Równanie to ma postać

$$(32) \quad p - q = h_0(c) - h_0(a) 2[g_0(c) - g_0(b)] \frac{Q(c)}{G(c)} c^3.$$

Tutaj p i q — wewnętrzne i zewnętrzne równomierne ciśnienie, $Q(r)$ — charakterystyka plastyczności, a $h(r)$ — całka postaci

$$(33) \quad h_0(r) = 2 \int \frac{Q(r)}{r} dr.$$

Otrzymano warunki powstawania strefy plastycznej na wewnętrznym brzegu i uplastycznienia się całej kuli. W szczególności, żeby spełnić pierwszy warunek, konieczne jest monotoniczne zmniejszanie się funkcji $\frac{1}{r^3} G(r)Q(r)$. Jako przykład rozpatrzono przypadek, gdy charakterystyki materiału są funkcjami potęgowymi

$$(34) \quad G(r) = Ar^6, \quad Q(r) = Br^3.$$

Zauważmy, że zależności te pozwalają stosunkowo łatwo otrzymać rozwiązanie, dzięki prostej postaci całek (31) i (33). Przy bardziej złożonych funkcjach (34) otrzymanie rozwiązania w zamkniętej postaci jest trudniejsze, przy czym, jak będzie pokazane w II-giej części pracy, odkształcenia plastyczne mogą powstawać nie tylko na wewnętrznym brzegu kuli, ale także wewnątrz jej ścianki. W tym ostatnim przypadku okazuje się, że dla otrzymania rozwiązania zadania nie wystarcza warunków brzegowych w naprężeniach i należy rozpatrzyć przemieszczenia.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости*, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 65, 1935.
2. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости для неоднородной среды*, Тр. сейсм. ин-та АН СССР, № 66, 1935.
3. Ду-Цин-хуа, *Плоская задача теории упругости неоднородной упругой среды*, Проблемы механики сплошной среды, Изд. АН СССР, 1961.
4. P. P. TEODORESCU., M. PREDELEANU, *Über das eben Problem nichgomogener elastischer körper*, Acta techn. Acad. Scient. hung., 1959, 27, N 3—4, 349.

5. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, and W. URBANOWSKI, *Plasticity under non-homogenous conditions*, Acad. Press, New York-London, 1962.
В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский, Теория пластичности неоднородных тел, Изд. „Мир”, Москва, 1964.
6. Г. Б. Колчин, *Плоские задачи теории упругости неоднородных тел*, Кишинев, „Штиинца”, 1977.
7. Г. Б. Колчин, *Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов*, Кишинев, „Картя Молдовеняскэ”, 1971.
8. В. А. Ломакин, *Теория упругости неоднородных тел*, Изд. Моск. университета, 1976.
9. Н. А. Ростовцев, *К теории упругости неоднородной среды*, ПММ, т. 28, 1964, в. 4, 601.
10. M. NIEKE, K. HERRMANN, *Über ein ebenes inhomogenes Problem der Thermoelastizität*, „Acta mech.”, 1968, 6, N1, 42-55.
11. H. BUFLER, A. STEYERL, *Beitrag zum inhomogenen Halbraum beim ebenen und axialsymmetrischen Verzerrungszustand*, „Ing. Arch.” 1963, 32, N5, 304-322.
12. M. MIȘCU, C. TEODOSCU, *Asupra problemei axial simetrice și a problemei plane a teoriei elasticității pentru corpuri izotrope neohomogene*, „Comun. Acad. RPR”, 1962, 12, N 8, 921-927.
13. М. М. Плотноков, *Об одном общем уравнении для функции напряжений неоднородно-анизотропного цилиндра*, „Зап. Воронеж. с/х ин-та”, 1968, 35, 390-393.
14. R. L. HUSTON, *Zeitschrift für angew. Math. Mech.*, 1964, Bd. 44, N12, s. 573.
15. В. П. Стукалов, *Неоднородные уравнения осесимметричной задачи теории упругости*, Кн. Сопр. мат. и теор. соор., Межвед. респ. научн. сб., вып. 8, Киев, 1969, 3-8.
16. С. Г. Лехницкий, *Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости*, ПММ, 26, 1962, в. I.
17. И. Е. Храчевская, *Решение задачи Буссинеска для полупространства, модуль упругости которого является степенной функцией глубины*, „Матер. 7 мат. и 7 физ. межвуз. конф. Дальн. Вост”, Хабар., 1968, 87.
18. В. П. Плевако, *Деформация неоднородного полупространства под действием поверхностной нагрузки*, Прикл. мех., 1973, 9, № 6, 16-23.
19. А. Н. Динник, А. Б. Моргаевский, Г. Н. Савин, *Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок*, Сб. Труды совещания по управлению горным давлением, М-Л, 1938, АН СССР, 7-56.
20. Г. Н. Савин, *Распределение напряжений около отверстий*, Изд. Наукова думка, Киев, 1968.
21. С. Н. Орлов, *Давление весомой упругой среды на цилиндрическую трубу*, Сб. Исследования по теории сооружений, УШ, М. 1959, 473.
22. П. А. Журавлев, А. Ф. Захаревич, *О распределении напряжений в массиве горных пород с горизонтальной выработкой круглого сечения*, Зап. Ленингр. горо. ин-та им. Г. В. Плеханова, т. XXXVI, 3, Л. 1958, 101-105.
23. А. И. Лурье, *Теория упругости*, „Наука”, М., 1970.
24. М. Мишику, К. Теодосиу, *Решение при помощи теории функций комплексного переменного статической задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел*, ПММ, т. 30, в. 2, 1966.
25. В. Н. Торлин, *Прямая и обратная задача плоской теории упругости неоднородных тел*, Прикл. мех., XII, № 8, 1976.
26. Г. Б. Колчин, *О применимости итерационного метода в задачах теории упругости неоднородных тел*, Кн. Прикладная математика и программирование, в. 2, Кишинев, АН МССР, 1969.
27. В. И. Андреев, И. Ю. Шишиц, *Исследование напряжений вокруг отверстий в пространстве из неэластичного материала с переменным модулем упругости*, Сб. трудов МИСИ, № 112, М. 1973, 179.
28. В. И. Андреев, И. Ю. Шишиц, *Исследование напряжений вокруг отверстий в неоднородном пространстве с учетом эластичности материала*, Сб. трудов МИСИ, № 118, М., 1974, 59.
29. И. В. Баклашов, Б. А. Картозия, *Механика горных пород*, Наука, М, 1975.
30. П. Я. Таранов, В. В. Лавриненко, И. И. Антоневич, С. Череслоя, *Разрушение породного массива за контуром выработок в результате взрывных работ*, „Шахтное строительство”, 1969, № 1, 5-8.

31. В. В. Рукин, К. В. Рупшенейт, *Механизм взаимодействия обделки напорных тоннелей с массивом горных пород*, М., Наука, 1969.
32. В. С. Ямщиков, В. Г. Бондаренко, В. А. Щетинин, *О контроле качества укрепительной цементации*, „Шахтное строительство”, 1970, № 9, 14.
33. Н. А. Евстропов, *Взрывные работы в строительстве*, М., Стройиздат, 1965.
34. В. И. Смирнов, *Сооружение подземных емкостей камуфлетными взрывами и выбор методов их закрепления*, „Шахтное строительство”, 1973, № 12, 14-17.
35. В. М. Соболевский, *Некоторые случаи интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего напряженное состояние анизотропного, неоднородного и неравномерно нагретого шара*, Изв. АН БССР, Сер. физ.-техн. наук, 1963, № 2, 20-29.
36. Л. И. Дятловский, Э. Д. Лемберг, *Плоская задача с центральной симметрией*, Прикл. мех., т. IV, в. 8, 1968.
37. М. М. Плотноков, *О влиянии коэффициента Пуассона на поле напряжений неоднородного анизотропного цилиндра*, Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 3.
38. В. Менцель, В. Шрейнер, *Закономерности механического поведения каменных солей в лабораторных и природных условиях*, Сб. Механика горных пород, Наука, Каз. ССР, Алма-Ата, 1975, 64-78.
39. И. В. Баклашов, Б. А. Картозия, *Учет технологической неоднородности и анизотропии породного массива в решении вопросов горного давления*, „Шахтное строительство”, 1971, 12, 10-14.
40. И. В. Баклашов, Б. А. Картозия, *Влияние трещиноватости взрывного происхождения на величину нагрузки на крепь выработок*, Кн. Горностроительные и взрывные работы, Тула, изд. ТПИ, в. I, 1973, 136.
41. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. mech. stos., VII, 3, 1955, 315-336.
42. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Sprężysto-plastyczna grubościenna powłoka kulista z materiału niejednorodnego, poddana działaniu wewnętrznego i zewnętrznego ciśnienia*, Rozpr. inż., IV, 1, 1956, 23.

Резюме

ВОПРОСЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЙ
В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. ЧАСТЬ I. ОБЗОР

В работе приведен обзор работ решенных задач когда механические характеристики материала являются непрерывными функциями координат. Обсуждаются задачи теории упругости и пластичности.

Summary

STRESS CONCENTRATION IN THE NEIGHBOURHOOD OF CAVITIES IN
NONHOMOGENEOUS MEDIA. PART I-REVIEW

A review is given of the papers concerning the solved problems. When the mechanical properties of the material are the continuous functions of the coordinates. The problems of the theory of elasticity and plasticity are discussed.

MOSKWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 czerwca 1979 roku. Tłumaczył mgr inż. J. Olszewski.