MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 18 (1980)

ZAGADNIENIA ODWROTNE PÓL TEMPERATUR — PRZEGLĄD LITERATURY

KRZYSZTOF GRYSA, MICHAŁ JACEK CIAŁKOWSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

W większości zagadnień praktycznych rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła nie przedstawia większych trudności o ile tylko warunki brzegowe dadzą się określić z wystarczającą dokładnością. Pomiarów przebiegów temperatury na brzegach rozważanego ciała dokonuje się w takich przypadkach przy pomocy termopar lub innych przyrządów pomiarowych, a następnie rachunkowo wyznacza się przebiegi temperatur w punktach wewnętrznych (tzw. wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe).

Zdarzają się jednakże sytuacje, gdy umieszczenie na powierzchni ciała instrumentów pomiarowych jest niemożliwe bądź niewskazane. Z tego typu sytuacją spotykamy się rozważając pole temperatury cylindra, w którego komorze spalania porusza się tłok, silnika odrzutowego — z uwagi na szybki przepływ gazów, czy turbiny cieplnej. W takich przypadkach dużo łatwiej jest rejestrować przebiegi temperatur w punktach wewnętrznych rozpatrywanych ciał, zaś zagadnieniem podstawowym jest określenie warunków termicznych powierzchniowych, które powodują owe wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe. Tego typu podejście do zagadnienia jest istotnie różne od zwykłego problemu brzegowo-początkowego. Chodzi tu bowiem nie tyle o wyznaczenie rozwiązania wewnątrz obszaru ograniczonego brzegiem, na którym zadane są wartości poszukiwanej funkcji lub jej pochodnych, co o ekstrapolację tego rozwiązania poza ten obszar. W literaturze przyjęło się nazywać tego typu zagadnienia problemami odwrotnymi w odróżnieniu od konwencjonalnych zagadnień brzegowo-początkowych, nazywanych problemami prostymi lub bezpośrednimi.

Ogólnie problemy odwrotne w technice to zagadnienia, które wiążą pomiary, metody matematyczne oraz inżynierskie wyczucie. Pomiarów zwykle dokonuje się w miejscach łatwo dostępnych. Poszukiwane wielkości często mogą zostać zmierzone tylko pośrednio. Na przykład w celu określenia przebiegu strumienia ciepła po stronie wewnętrznej naczynia ciśnieniowego dokonuje się pomiaru przebiegu temperatury na jego brzegu zewnętrznym. W konstrukcjach czasami wyznacza się nieznane przebiegi ciśnień czy przemieszczeń, dokonując w kilku punktach pomiarów prędkości. Jest oczywiste, że poprawne rozwiązania tego typu problemów w istotny sposób zależą od prawidłowego wyboru punktów pomiarowych, wielkości, które się mierzy oraz wyczucia inżynierskiego.

Dodatkowym utrudnieniem przy praktycznym zastosowaniu rozwiązań zagadnień odwrotnych jest wpływ instrumentu pomiarowego na przebieg pomiaru. Z tego też względu nie jest wskazane wprowadzanie do wnętrza ciała większej ilości czujników. Niemniej nawet jedna czy dwie termopary zakłócają pole temperatury i powodują niewielkie zafałszowanie wyników. Stąd jednym z podstawowych problemów dotyczących zastosowań rozwiązań zagadnień odwrotnych jest problem pomiarów mało zakłócających przebieg wielkości mierzonych. Wydaje się, że nowe, kompleksowe podejście do zagadnień odwrotnych pól temperatur, jakie jest rozwijane w ostatnich latach tak w Polsce jak i za granicą, może przynieść pozytywne rozwiązanie i tych problemów.

Rozwój tej gałęzi teorii przewodnictwa ciepła, jaką jest problematyka odwrotnych zagadnień pól temperatur, rozpoczął się stosunkowo niedawno. Autorzy najwcześniejszych prac, opublikowanych na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych (można tu wspomnieć prace N. V. SZUMAKOWA [33] czy G. J. STOLZA [35]) powołują się przede wszystkim na znaną monografię CARSLAWA i JAEGERA [8], w której wprawdzie autorzy nie wprowadzają nawet pojęcia zagadnień odwrotnych, ale gdzie podane są liczne przykłady sposobów rozwiązywania zagadnień bezpośrednich, łatwych do zastosowania (choć dosyć mało efektywnych) przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych. W latach sześćdziesiątych tematyka ta była rozwijana głównie dla zagadnień liniowych. Rozważano tylko problemy jednowymiarowe, przyjmując jako punkt wyjścia znaną odpowiedź temperaturową jednego punktu wewnętrznego oraz warunki początkowe, a poszukując temperatury brzegu przy założeniu tzw. warunków symetrii w środku ciała (gdy rozważano walec lub kulę) lub izolacji drugiego brzegu (gdy brano pod uwagę nieskończoną płytę). Wiele prac z tego okresu to prace teoretyczne, rozwijające wprawdzie metody rozwiązań tego typu problemów, ale oferujące wyniki w postaci skomplikowanych wielokrotnych szeregów bądź całek, zupełnie nieprzydatne dla celów praktycznych. Autorzy tych prac, w których przeliczane były przykłady liczbowe, wykorzystywali zwykle metodę różnic skończonych i w zasadzie przede wszystkim sygnalizowali, na jakiego rodzaju trudności i niebezpieczeństwa pomyłek narażeni mogą być eksperymentatorzy, próbujący wykorzystywać wyniki ich prac. Niemniej kilka pomysłów dotyczących rozwiązywania problemów odwrotnych doczekało się, po niewielkich modyfikacjach, pozytywnych realizacji w latach siedemdziesiątych. Do takich pomysłów należy np. metoda dopasowywania funkcji, o której będzie mowa w dalszej części pracy. W latach siedemdziesiątych rozpoczął się burzliwy rozwój metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych i to już nie tylko jednowymiarowych i liniowych, ale także dwu- i trójwymiarowych (dla tych ostatnich nakreślono tylko, co prawda, sposób postępowania) oraz nieliniowych. Wyznaczono rozwiązania dla płyty, rury grubościennej i powłoki kulistej, gdzie przy założeniu znajomości odpowiedzi temperaturowych z dwóch punktów wewnętrznych określono przebiegi temperatur na obu brzegach. Nastąpił gwałtowny rozwój metod numerycznych. Wreszcie w okresie tym pojawiły się pierwsze prace traktujące o zagadnieniach odwrotnych termosprężystości — czyli o problemach wyznaczania warunków termicznych na powierzchni ciała gdy znane są w punkcie wewnętrznym odpowiedzi naprężeniowa bądź przemieszczeniowa.

Niektórzy autorzy pod hasłem „zagadnienia odwrotne" pól temperatury rozumieją treści odmienne od przytoczonych wyżej. W związku z tym warto wyszczególnić jakie zagadnienia są objęte tym określeniem. Są to mianowicie:

1° Zagadnienia wyznaczania temperatury lub strumienia ciepła na powierzchni ciała przy znanym przebiegu temperatury lub strumienia ciepła w jednym lub kilku punktach wewnętrznych ciała;

2° Zagadnienia wyznaczania temperatury lub strumienia ciepła na powierzchni ciała przy znanym przebiegu naprężeń termicznych bądź przemieszczeń w jednym lub kilku punktach wewnętrznych ciała;

3° Zagadnienia wyznaczania zależności funkcji $f(\mathbf{r}, t)$, opisującej źródło ciepła, od zmiennych przestrzennych przy założeniu, że $f(\mathbf{r}, t) = f_1(\mathbf{r}) \cdot f_2(t)$, gdzie $f_2(t)$ jest znaną funkcją, oraz przy komplecie warunków brzegowych i początkowych;

4° Zagadnienia wyznaczania stałych lub zmiennych z temperaturą lub z czasem współczynników dotyczących przewodnictwa cieplnego przy określonych warunkach brzegowych i początkowym oraz znanym bądź łatwym do wyznaczenia polu temperatury wewnątrz ciała.

Spośród prac traktujących o zagadnieniach odwrotnych w sensie określonym w punkcie 3° warto wymienić monografię [27], w której podany jest m.in. spis literatury dotyczącej tego typu odwrotnych problemów przewodnictwa ciepła i nie tylko. Zagadnienia odwrotne w sensie określonym w punkcie 4° były m.in. rozważane w pracach [2, 4, 11, 26, 30 i in].

W niniejszym przeglądzie zajmiemy się wyłącznie zagadnieniami odwrotnymi w sensie punktów 1° i 2°.

2. Liniowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego

Metody rozwiązywania liniowych zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła można podzielić następująco:

2.1. przewidywanie rozwiązania w postaci szeregu.

2.2. analiza transformat Laplace'a

2.3. podejścia oparte na metodzie różnic skończonych

2.4. rozkład na szereg problemów prostych.

Każdą z tych metod omówimy oddzielnie.

2.1. Przewidywanie rozwiązania w postaci szeregu. W rozdziale II monografii H. S. CARSLAWA i J. C. JAEGERA [8] omówione są proste (bezpośrednie) rozwiązania liniowego równania przewodnictwa ciepła. Przedstawiając możliwe postaci rozwiązań autorzy dali późniejszym badaczom zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła możliwość predykcji temperatury brzegu obszaru, gdy znana jest wewnętrzna odpowiedź temperaturowa. Jedna z postaci rozwiązań przedstawionych w [8] była szczególnie często wykorzystywana. Była to funkcja [8, str. 52]

$$T(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{x^2}{\varkappa} \right)^k \frac{1}{(2k)!} \frac{d^k \Phi}{dt^k} + x \left(\frac{x^2}{\varkappa} \right)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{d^k \psi}{dt^k} \right], \tag{2.1}$$

gdzie Φ i ψ są dowolnymi funkcjami czasu, spełniającymi jednowymiarowe równanie przewodnictwa ciepła

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \nabla \text{ — operator nabla,} \tag{2.2}$$

zaś $\varkappa$ jest dyfuzyjnością temperaturową. Dla funkcji $T(x, t)$ zachodzą związki

$$T(0, t) = \Phi(t) \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi(t). \tag{2.3}$$

Przyjęcie rozwiązania zagadnienia odwrotnego w postaci (2.1) przy zastąpieniu podanych tu współczynników funkcyjnych przez pewne nieznane funkcje pozwalało efektywnie rozwiązywać te zagadnienia w przypadkach gdy znana była odpowiedź temperaturowa w jednym punkcie wewnętrznym ciała. Bazując na tym podejściu BURGGRAF [7] wyznaczył ściśle rozwiązanie dla przebiegów powierzchniowej temperatury i powierzchniowego strumienia ciepła dla danych ciągłych przebiegów temperatury i strumienia ciepła w jednym punkcie wewnętrznym. Wykorzystał on wynikające z równania (2.1) i z prawa Fouriera związki

$$\frac{\partial^n T}{\partial t^n} = \varkappa^n \nabla^{2n} T, \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial^n q}{\partial t^n} = \varkappa^n \nabla^{2n} q, \tag{2.4}$$

gdzie $q = -\lambda \nabla T$ — strumień ciepła, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego. Zadając następnie przebiegi $T(x_0, t) = T_0(t)$ oraz $q(x_0, t) = q_0(t)$ wyznaczył dla płyty, kuli i walca pole temperatury w postaci

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(x) \frac{d^n T_0}{dt^n} - \frac{1}{\varkappa} g_n(x) \frac{d^n q_0}{dt^n} \right], \tag{2.5}$$

gdzie funkcje $f_n(x)$ i $g_n(x)$ spełniają związki następujące:

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_n}{dx^2} = \varkappa^{-1} f_{n-1}, n = 1, 2 \ldots; \quad \frac{d^2 g_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 g_n}{dx^2} = \varkappa^{-1} g_{n-1}, n = 1, 2, \ldots,;$$

$$f_0(x_0) = 1, f_n(x_0) = 0, \left.\frac{df_n}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, n = 0, 1, \ldots; \; g_0(x_0) = 0, \left.\frac{dg_0}{dx}\right|_{x=x_0} = 1,$$

$$g_n(x_0) = 0; \left.\frac{dg_n}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Ciekawy jest fakt, że do wyznaczenia rozwiązania nie jest tu potrzebny warunek początkowy. Wynika to z założenia, że funkcje $T_0(t)$ i $q_0(t)$ są określone dla $t \in \langle 0; \infty)$.

DAVIES [13] i KOVERYANOV [25] również wykorzystali metodę przewidywania rozwiązania w postaci szeregu nieskończonego, przy czym o ile podejście Koveryanova było analogiczne do metody Burggrafa, o tyle Davies zaproponował nieco bardziej złożoną postać rozwiązania, zawierającą funkcje błędu.

Zupełnie nowy sposób atakowania jednowymiarowych zagadnień odwrotnych jest zaprezentowany w pracy IMBERA i KHANA [18]. Przede wszystkim, w odróżnieniu od prac poprzednich, zakładają autorzy znajomość przebiegów temperatury w dwóch punktach wewnętrznych. Jest to znaczne utrudnienie, gdyż nie ma wtedy możliwości zastosowania metod podanych wyżej. Trzeba najpierw rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe, aby móc określić postać rozwiązania dla obszaru zawartego pomiędzy wspomnianymi punktami wewnętrznymi, a następnie ekstrapolować to rozwiązanie poza ten obszar. W pracy [18] wyznaczono w ten sposób rozwiązania dla płyty i dla grubej powłoki kulistej, zaś w pracach [19, 24] również dla rury grubościennej. W niniejszym opracowaniu omówimy tę metodę na przykładzie rozwiązania dla płyty.

Zagadnienie do rozwiązania to równanie przewodnictwa ciepła (2.2) z jednorodnym warunkiem początkowym oraz z dwoma warunkami wewnętrznymi

$$T(x_1, t) = T_1(t) \quad \text{i} \quad T(x_2, t) = T_2(t), \tag{2.6}$$

gdzie $x_i < x_1 < x_2 < x_e$; x_i oraz x_e są współrzędnymi dolnej i górnej powierzchni płyty nieskończonej, która jest równoległa do płaszczyzny Oxy.

Rozwiązanie tego problemu dla $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ nie przedstawia trudności i w transformatach Laplace'a może być zapisane w postaci

$$\bar{T}(x, p) = \frac{\bar{T}_1}{1-e^{-2p\cdot\Delta}} \cdot [e^{-p(x-x_1)} - e^{-p(2\Delta+x_1-x)}] + \tag{2.7}$$

$$+ \frac{\bar{T}_2}{1-e^{-2p\cdot\Delta}} \cdot [e^{-p(\Delta+x_1-x)} - e^{-p(\Delta-x_1+x)}],$$

gdzie nadkreślenie oznacza transformatę Laplace'a, $\Delta = x_2 - x_1$, $p = \sqrt{\frac{s}{\varkappa}}$, zaś s jest parametrem transformacji.

Na zewnątrz przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$ transformata $\bar{T}(x, p)$ nie może zostać odwrócona z uwagi na pojawienie się wtedy w wykładnikach dodatnich argumentów. Okazuje się jednak, że przyjęcie funkcji $T_1(t)$ i $T_2(t)$ w odpowiednich postaciach umożliwia obejście tej trudności. Autorzy stosują dwa, różniące się nieco w szczegółach podejścia: jedno w celu dokonania ekstrapolacji „do tyłu", dla $x \in \langle x_i, x_1 \rangle$, i drugie w celu ekstrapolowania rozwiązania „do przodu", dla $x \in \langle x_2, x_e \rangle$.

Warto tu zaznaczyć, że wobec faktu iż $T_1(t)$ i $T_2(t)$ są sprowadzonymi do postaci funkcyjnej odczytami z dwóch termopar, tego rodzaju manewr jest niegroźny dla wyników końcowych, o ile tylko przyjęte postaci T_1 i T_2 dobrze pasują do wyników pomiarów.

Dokonując ekstrapolacji do tyłu przy założeniu, że $\Delta \geqslant x_1 - x_i$, przyjmuje się, że

$$\bar{T}_1(p) = \bar{T}_2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-m\cdot p\cdot\Delta} \quad \text{oraz} \quad T_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}, \tag{2.8}$$

gdzie współczynniki A_m i b_n należy wyznaczyć na podstawie odpowiedzi temperaturowych zanotowanych w punktach x_1 i x_2. Po wprowadzeniu funkcji T_1 i T_2 określonych związkami (2.8) do (2.7), transformata temperatury daje się odwrócić i wynik końcowy, funkcjonujący dla $x \in \langle x_i, x_1 \rangle$, wyrażony jest przez potrójną sumę, zawierającą potęgi czasu i funkcje erfc od stosunkowo nieskomplikowanego argumentu.

Ekstrapolacja do przodu wymaga założenia, że $x \in \langle x_2, 2\Delta + x_1 \rangle$. Tak więc jeśli $x_e > 2\Delta + x_1$, to osiągnięcie brzegu x_e w jednym kroku jest niemożliwe. Trzeba wówczas przyjąć punkt $x = 2\Delta + x_1$ jako x_3, temperaturę wyliczoną w tym punkcie jako $T_3(t)$ i ponownie stosować ekstrapolację do przodu, tym razem dla danych T_1 i T_3. Co do odczytów z termopar przyjmuje się wówczas, że

$$\bar{T}_2(p) = \bar{T}_1 \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m\cdot p\cdot\Delta} \quad \text{oraz} \quad T_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{t_n}{n!}, \tag{2.9}$$

gdzie B_m i a_n wyznacza się analogicznie, jak poprzednio A_m i b_n. Rozwiązanie dla ekstrapolacji do przodu ma postać zbliżoną do rozwiązania otrzymanego przy ekstrapolowaniu temperatury do tyłu.

Wykorzystując tę metodę wyznaczono w pracy [18] także rozwiązanie zagadnienia odwrotnego dla płyty dwuwarstwowej, jak również nakreślono sposób postępowania przy rozwiązywaniu tego typu problemów dla płyt wielowarstwowych. Okazuje się, że do roz wiązania zagadnienia odwrotnego dla płyty wielowarstwowej o ilości warstw równej 5 lub więcej wystarczą odczyty z czterech termopar, z których po dwie muszą znajdować się w dwóch warstwach zewnętrznych z każdej strony. Termopary nie mogą być rozmieszczone dowolnie, lecz ograniczenia narzucone na ich rozmieszczenie nie stwarzają problemów przy wykorzystaniu praktycznym tej metody.

Bazując na metodzie podanej w pracy [18], CHEN i THOMSEN [9] rozwiązali odwrotne zagadnienie dla rury grubościennej dla małych czasów. Założenie krótkotrwałości rozważanego procesu pozwoliło uwzględnić dane tylko z jednej termopary. Zamiast drugiego czujnika przyjęto założenie, że dla bardzo krótko trwających procesów nagrzewania powierzchnia zewnętrzna rury nie zdąży się nagrzać, w związku z czym można zamiast grubej rury rozważać przestrzeń z pustką walcową.

Metody szeregowe typu zaprezentowanego przez Imbera i Khana wydają się mieć przed sobą liczne zastosowania w zagadnieniach odwrotnych termosprężystości. Cechuje je bowiem nie tylko — jak wykazano w pracy [18] — bardzo duża dokładność przy stosunkowo niewielkim nakładzie pracy ze strony maszyny cyfrowej, ale również precyzyjne określenie obszarów, dla których dokonane ekstrapolacje są wiarygodne.

2.2 Analiza transformat Laplace'a. Metoda analizy rozwiązania równania przewodnictwa w transformatach Laplace'a jest metodą badawczą narzucającą się, jeśli chodzi o zagadnienia odwrotne. Jest to wszakże — jak się okazuje — metoda nieefektywna, jeśli trzymać się jej ściśle. W przeciągu ok. 20 lat jej stosowania dla potrzeb zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła — tzn. począwszy od pracy MASKETA i VASTANO [28] z roku 1962, a skończywszy na artykule CIAŁKOWSKIEGO i GRYSY [12] — udawało się tylko przedstawiać rozwiązania tych zagadnień w transformatach, przy czym były to transformaty nie do odwrócenia ścisłymi metodami. Tak więc prace ściśle stosujące metodę analizy transformat miały raczej wartość tylko poznawczą, zaś rozwiązania w postaci jawnej możliwie były tylko do uzyskania dla punktów brzegowych, dla tzw. brzegowych zagadnień odwrotnych [10]. Dopiero IMBER [22], kombinując analizę transformat z metodą dopasowywania funkcji, podał przybliżony sposób rozwiązywania wewnętrznych zagadnień odwrotnych.

MASKET i VASTANO [28] jak również i SABHERWAL [32] przedstawili transformaty temperatury i strumienia ciepła na powierzchni przy pomocy wyrażeń zawierających transformatę odpowiedzi termperaturowej jednego punktu wewnętrznego. W zagadnieniach przez nich rozważanych zakładano zerową temperaturę początkową oraz warunek symetrii (w przypadku płyty warunek izolacji) dla $x = 0$. W obu pracach autorzy twierdzą, że transformaty rozwiązań można odwrócić, lecz w pracy [28] nie podano oryginałów, zaś w pracy [32] podane oryginały wzięte są „z powietrza", bez najmniejszej wzmianki o metodzie ich uzyskania.

Wyniki ciekawsze z punktu widzenia metodyki rozwiązania, choć też nieefektywne jeśli chodzi o procedurę odwracania transformat rozwiązań, zaprezentowano w pracach [34] i [14]. SPARROW, HAJI-SHEIKH i LUNDGREN w pracy [34] dopuszczają niejednorodny warunek początkowy dla temperatury. Rozważając zagadnienie odwrotne dla kuli otrzymali transformatę temperatury powierzchniowej w postaci

$$\bar{T}(1, s) = \bar{f}(s)\, x^* \frac{\sinh\sqrt{s}}{\sinh(x^*\sqrt{s})}, \tag{2.10}$$

gdzie $f(t) = T(x^*, t)$ jest znanym przebiegiem temperatury w punkcie wewnętrznym $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$, zaś s jest parametrem transformacji. Dla transformaty danej wzorem (2.10) oryginał nie istnieje i z tego powodu autorzy próbowali obejść problem, specyfikując funkcję $f(t)$. Dokonali tego w dwóch etapach. Najpierw zapisali transformatę $\bar{f}(s)$ w postaci

$$\bar{f}(s) = \bar{g}(s)\, e^{-(1-x)^* \sqrt{s}}. \tag{2.11}$$

Następnie, podstawiając (2.11) do (2.10), otrzymali taką postać transformaty temperatury, dla której próbowali określić oryginał metodami przybliżonymi najpierw dla małych czasów, a następnie dla czasów dowolnych. Rozwiązanie dla małych czasów uzyskuje się przez przybliżenie ułamka $\frac{1-e^{-2\sqrt{s}}}{1-e^{-2x^*\sqrt{s}}}$, występującego w iloczynie z $\bar{g}(s)$ po prawej stronie przekształconego wzoru (2.10), przez szereg potęgowy względem $e^{-2x^*\sqrt{s}}$. Otrzymuje się w ten sposób rozwiązanie w postaci całkowej, przy czym funkcja $g(t)$ określona jest przez równanie całkowe wynikające ze wzoru (2.11).

Rozwiązanie dla czasów dowolnych uzyskuje się metodą dopasowywania funkcji [31]. Metoda ta — ogólnie rzecz biorąc — polega na przybliżeniu transformaty funkcji, która jest nieodwracalna, przez zbliżoną do niej transformatę, dla której oryginał jest znany. Sprawdzanie, czy funkcja, przy pomocy której zastępuje się niewygodną transformatę, jest do tej ostatniej dobrze „dopasowana", odbywa się przez ustalenie dla niej wartości w zerze i w nieskończoności, a następnie poprzez graficzne [29] lub numeryczne sprawdzenie, czy dopasowywana funkcja ma wykres (oczywiście dla argumentu s rzeczywistego) zbliżony do wykresu tej transformaty. Z punktu widzenia matematyki metoda ta jest nieścisła, jednakże z punktu widzenia inżynierskiego jest ona pożyteczna, gdyż daje stosunkowo dokładne wyniki w całym zakresie zmienności t.

W pracy [34] zalety metody dopasowania funkcji nie zostały dostatecznie wykorzystane. Metodą tą przybliżano przebieg temperatury powierzchniowej przy znanej funkcji $f(t)$, ale ponieważ po drodze trzeba było rozwiązać równanie całkowe określające $g(t)$, liczba kolejnych aproksymacji była dosyć duża i stąd możliwość dokładnego oszacowania numerycznego temperatury jest raczej wątpliwa. Użyta metoda rozwiązywania równania całkowego określającego funkcję $g(t)$, polegająca na podziale przedziału czasu na podprzedziały, musi być stosowana ostrożnie, gdyż przy zbyt małych podprzedziałach błąd aproksymacji gwałtownie wzrasta i mogą się pojawić oscylacje. Autorzy przestrzegają przed tą ewentualnością i próbują ustalić najmniejszą wielkość podprzedziałów. Do minusów pracy należy zbytnie zaufanie, jakie autorzy pokładają w możliwościach rekonstrukcji temperatury brzegu. Wydaje się, iż ich stwierdzenie, że znajomość odpowiedzi temperaturowej w środku kuli pozwala wyznaczyć temperaturę brzegu, jest przesadzone. Wiadomo bowiem, że wpływ warunków brzegowych jest we wnętrzu ciała tłumiony i dlatego ekstrapolacja temperatury jest zawsze obarczona pewnym błędem.

Metodę użytą w pracy [34] próbowali usprawnić DEVERALL i CHANNAPRAGADA [14]. Jednakże również i oni otrzymali wyniki w postaci skomplikowanych całek.

Klasyczną metodą analizy transformat Laplace'a próbowano także atakować zagadnienia odwrotne w pracach [10] i [12]. Równanie przewodnictwa było tam rozważane wraz z zerowym warunkiem początkowym, warunkiem symetrii (izolacji w przypadku płyty) dla $x = 0$ i przy znanej odpowiedzi temperaturowej jednego punktu wewnętrznego. W odróżnieniu od wszystkich wyżej omówionych prac, zakładano tak w [10] jak i w [12], że na brzegu panują warunki III rodzaju (swobodna wymiana), przez co rozważane zagadnienie odwrotne mogło prowadzić bądź do wyznaczenia temperatury powierzchni, bądź strumienia cieplnego, bądź też liczby Biota. W pracy [12] podano rozwiązanie w postaci splotowej, przy czym jest ono złożone z trzech wyrażeń, opisujących kolejno — transformatę odpowiedzi temperaturowej, transformatę rozwiązania problemu brzegowo-początkowego dla warunku I rodzaju, oraz transformatę tzw. funkcji intensywności grzania. W pracy tej podano również ograniczenia, jakie muszą być spełnione w przypadku funkcji $T(x^*, t)$, jeśli ma ona opisywać wewnętrzną odpowiedź temperaturową. Okazuje się, że dla transformaty $\bar{T}(x^*, s)$ musi być spełniona nierówność

$$\left| s\,\bar{T}(x^*, s)\,\frac{I_{-\beta}(\sqrt{s})}{x^{*\beta} I_{-\beta}(x^*\sqrt{s})} \right| < M, \quad x^* \in \langle 0, 1\rangle, \tag{2.12}$$

gdzie M — dowolna stała dodatnia, $I_{-\beta}(u)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela I rodzaju, rzędu „$-\beta$". β jest tzw. parametrem kształtu. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego staje się rozwiązaniem dla kuli, gdy $\beta = -\frac{1}{2}$, dla walca gdy $\beta = 0$ i dla nieskończonej płyty gdy $\beta = \frac{1}{2}$. Idea wprowadzenia parametru kształtu nie jest nowa; używali go także m.in. IMBER i KHAN w pracy [18].

Autorzy pracy [12] nie próbowali szukać retransformat rozwiązania dla $x^* \in \langle 0, 1\rangle$. Wyznaczyli natomiast rozwiązanie tak postawionego zagadnienia dla $x = 1$ (brzegowe zagadnienie odwrotne). Oczywiście dla warunku I rodzaju tego typu rozwiązanie jest nieciekawe, lecz dla warunków II rodzaju pozwala ono ustalić relację pomiędzy temperaturą czynnika grzejącego, strumieniem ciepła na brzegu i liczbą Biota (bezwymiarowym współczynnikiem przejmowania ciepła.)

Postać splotową rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego dla walca, kuli i płyty [10, 12] wykorzystano do zdefiniowania miary odległości procesu nagrzewania (chłodzenia) z liczbą Biota ψ_1 od procesu nagrzewania (chłodzenia) tego samego ciała (i w tej samej temperaturze otoczenia) z liczbą Biota ψ_2 (w szczególności $0 < \psi_1 < \infty$, $\psi_2 \to \infty$). Miara ta jest zdefiniowana wzorem

$$\varkappa(F_0, \psi_1, \psi_2, \beta) = \int_0^{F_0} [F_1(\tilde{F}_0, \psi_2, \beta) - F_1(\tilde{F}_0, \psi_1, \beta)]\,d\tilde{F}_0 = \tag{2.13}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_2\cdot e^{-\lambda_{n,2}^2\cdot F_0}}{\psi_2^2+\lambda_{n,2}^2} - \frac{\psi_1\cdot e^{-\lambda_{n,1}^2\cdot F_0}}{\psi_1^2+\lambda_{n,1}^2}\right) \qquad \psi_i \equiv Bi_i,\ i = 1, 2,$$

gdzie liczby $\lambda_{n,i}$, $i = 1, 2$, są pierwiastkami równania przestępnego

$$\lambda\cdot\mathcal{J}_{-\beta+1}(\lambda) - \psi_i\cdot\mathcal{J}_{-\beta}(\lambda) = 0, \qquad i = 1, 2$$

$\mathcal{J}_\nu(\lambda)$ — funkcja Bessela I rodzaju rzędu ν, Bi — liczba Biota, F_0 — liczba Fouriera (bezwymiarowy czas). Wielkość, wprowadzona przy pomocy wzoru (2.13), znakomicie nadaje się do odnoszenia procesu nagrzewania z dowolną liczbą Biota do procesu nagrzewania z warunkiem brzegowym I rodzaju, a co za tym idzie, do decydowania, w jakim stopniu proces nagrzewania może zostać przybliżony procesem z warunkiem I lub II rodzaju. Również w pracy [10] podano rozwiązania zretransformowane tylko dla $x^* = 1$.

Do prac [10] i [12] powrócimy jeszcze w rozdziale 5 z uwagi na inne ciekawe idee w nich zawarte.

Na zakończenie rozważań dotyczących analizy transformat omówimy jeszcze pracę IMBERA [22]. W pracy tej rozważano zagadnienie odwrotne dla walca. Autor bardzo szybko uzyskuje rozwiązanie w transformatach. Następnie dokonuje aproksymacji retransformaty dla małych czasów przy pomocy odpowiedniego przybliżenia wewnętrznej odpowiedzi temperaturowej (szereg quasipotęgowy zawierający funkcje erfc) oraz zastąpienia ułamka $I_0\left(x\sqrt{\frac{s}{\varkappa}}\right)\Big/ I_0\left(x^*\sqrt{\frac{s}{\varkappa}}\right)$ przez rozwinięcie asymptotyczne (x^* — punkt, w którym zarejestrowano wewnętrzną odpowiedź temperaturową). Ta część pracy jest podobna do wcześniej omówionych (np. [34]). Ale następnie autor dokonuje przybliżenia rozwiązania dla całego zakresu zmienności t. Wykorzystuje w tym celu metodę dopasowania funkcji [31, 34]. Poszukuje funkcji $\bar{F}(s)$, posiadającej łatwą do znalezienia retransformatę, a będącą dobrym przybliżeniem ułamka

$$\frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{s}{\varkappa}}(x-x^*)\right] I_0\left(x\sqrt{\frac{s}{\varkappa}}\right)}{I_0\left(x^*\sqrt{\frac{s}{\varkappa}}\right)}. \tag{2.14}$$

Funkcja ta dla $x^* \geqslant 0{,}5x$ odbiega od wartości wspomnianego ułamka, liczonych dla s rzeczywistego, nie więcej niż o 1,1%. Autor zakłada początkowo, że $\bar{F}(s)$ ma postać

$$\bar{F}(s) = \frac{a_2 p x^*}{1+a_3 p x^*} + \frac{a_4}{1+a_6 p x^*}, \quad p = \sqrt{\frac{s}{\varkappa}}, \tag{2.15}$$

gdzie nieznane współczynniki a_2, a_3, a_4 i a_6 są funkcjami zmiennej x. Dopasowując $\bar{F}(s)$ do funkcji (2.14) dla małych i dużych czasów ustala postaci tych współczynników, a następnie, opierając się na numerycznym porównaniu związków (2.14) i (2.15) dla argumentu rzeczywistego, znajduje poprawkę, decydującą o dobrym przybliżeniu ułamka (2.14). Ostatecznie $\bar{F}(s)$ przyjmuje się w postaci

$$\bar{F}(s) = \frac{a_2 p x^*}{1+a_3 p x^*} + \frac{a_4}{1+a_6\cdot p\cdot x^*} - 0{,}46379 p x^* \cdot \left(1-\frac{x^*}{x}\right)^{1,25} \times \\ \times \exp\left[-1{,}39028 p x^* \cdot \left(1-\frac{x^*}{x}\right)^{0,4}\right]. \tag{2.16}$$

Zastępując tą funkcją ułamek (2.14) otrzymuje się takie przybliżone wyrażenie na transformatę temperatury, które daje się w prosty sposób odwrócić. Otrzymana funkcja $T(x, t)$ przybliża wartości temperatury w obszarze $x \in \langle x^*, \bar{x}\rangle$, gdzie $\bar{x}$ jest wartością graniczną, dla której jeszcze funkcjonuje odwracanie funkcji $\bar{T}(x, s)$ przybliżonej poprzez zastąpienie ułamka (2.14) przez $\bar{F}(s)$. Błąd, z jakim Imber przybliżył wartości temperatury we wspomnianym obszarze, był nie większy niż 0,3%.

Metoda dopasowywania funkcji w ujęciu Imbera jest metodą efektywną i dającą w określonym obszarze wyniki bardzo obiecujące. Wadą tej metody jest może zbyt duża przewaga intuicji nad matematyką w doborze funkcji „zastępczej".

2.3. Podejścia oparte na metodzie różnic skończonych. Tego typu podejścia były stosowane w wielu pracach. Było ono badź wykorzystane do wyliczenia wartości liczbowych rozwiązania danego w postaci bardzo skomplikowanej, jak np. w [16], bądź w celu ekstrapolacji temperatury poza obszar wyznaczony przez punkty o danych odpowiedziach temperaturowych [1, 15, 17], przy czym w pracy [17] zastosowana jest metoda elementów skończonych. Żadna ze wspomnianych prac nie wnosi nic nowego do metodyki rozwiązań. Natomiast interesująca właśnie z punktu widzenia sposobu, w jaki wykorzystano metodę różnic skończonych, jest praca TRUJILLO [37].

Trujillo rozważa równanie macierzowe postaci

$$\dot{x} = \boldsymbol{K}\cdot x + \boldsymbol{T}\cdot g, \quad \text{gdzie} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \tag{2.17}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = C\cdot x(t)$ jest wektorem $(n\times 1)$, reprezentującym zmienne stanu, $\boldsymbol{K}$ — pewną macierzą $(n\times n)$ reprezentującą własności rozważanego ciała, $\boldsymbol{T}$ jest pewną macierzą $(n\times m)$, zaś $\boldsymbol{g}$ jest wektorem $(m\times 1)$ reprezentującym wymuszenie.

Problem odwrotny w ujęciu Trujillo jest to tego typu zagadnienie, w którym znane są macierze $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{T}$ oraz wszystkie lub niektóre ze składowych wektora x (zmiennych stanu), podczas gdy nieznane są wielkości wymuszające proces. Równanie (2.17) autor rozwiązuje metodą różnic skończonych, przy czym minimalizacja błędu odbywa się przy użyciu w pewien szczególny sposób metody najmniejszych kwadratów. Autor podaje przykłady rozwiązania równania (2.17) dla przypadku odwrotnego zagadnienia przewodnictwa ciepła jak i dla odwrotnego problemu dynamiki konstrukcji. W bardziej dla nas interesującym pierwszym przypadku wektor $x(t)$ to temperatury punktów reprezentujących plastry, na jakie podzielono pytę (jest to więc metoda dyskretyzacji zmiennych przestrzennych), macierz $\boldsymbol{K}$ wiąże się z dokonanym podziałem i jest oczywiście macierzą pasmową, macierz $\boldsymbol{T}$ zawiera różne od zera elementy tylko dla tych warstw, w których dane są przebiegi temperatur bądź strumieni ciepła, zaś wektor $\boldsymbol{g}$ jest wektorem złożonym ze znanych odpowiedzi temperaturowych. W ten sposób zagadnienie odwrotne zostaje sprowadzone do układu zwyczajnych równań różniczkowych, które daje się stosunkowo prosto rozwiązać numerycznie.

2.4. Rozkład na szereg problemów prostych. Metoda ta została po raz pierwszy użyta przez G. STOLZA [35]. Istotą metody jest wykorzystanie rozwiązania zagadnienia bezpośredniego dla stałego wymuszenia danego poprzez jednostkowy strumień ciepła, przy jednoczesnej dyskretyzacji zmiennej czasowej. Autor wykorzystuje zatem znajomość funkcji $F(x, t)/Z$ (Z — pewna stała), będącej rozwiązaniem problemu brzegowo-początkowego postaci

$$\chi\nabla^2\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial t} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \Theta(x, 0) = 0, \quad k\left.\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right|_{X=R} = 1. \tag{2.18}$$

Dla warunku brzegowego II rodzaju z prawą stroną dowolnej postaci, np. równą — $\Phi(t)$, oraz dla niezerowego (równego pewnej stałej Θ_i) warunku początkowego, można teraz łatwo uzyskać rozwiązanie, wykorzystując twierdzenie o splocie:

$$[\Theta_t - \Theta(x, t)]Z = \int_0^t \Phi(\mu) \frac{\partial}{\partial t} F(x, t-\mu) d\mu. \tag{2.19}$$

Następnym krokiem jest przybliżenie funkcji $\Phi(t)$ funkcją schodkową, która przyjmuje wartości stałe w przedziałach czasowych o długości $\Delta t = \lambda$. Poszczególne składniki sumy przybliżającej $\Phi(t)$ różnią się o $\delta\Phi(j\lambda) \equiv \delta\Phi_j \eta(t-j\lambda)$, gdzie $\eta(x)$ — funkcja Heaviside'a, oraz $j = 0, 1, 2 \ldots n$. Po tym kroku otrzymuje się rozwiązanie (2.19) w postaci przybliżonej

$$\Theta_t - \Theta(x, n\lambda) = \frac{1}{Z} \cdot \sum_{j=0}^{n} \delta\Phi(j\lambda) F(x, (n-j)\lambda). \tag{2.20}$$

Przechodząc teraz do zagadnienia odwrotnego, zakładamy że $\Theta(x^*, t) = f(t)$ jest znane, a wyznaczyć należy przebieg strumienia ciepła na brzegu. Oznacza to potrzebę wyznaczenia wyzstkich wartości $\delta\Phi(j \cdot \lambda)$. Wykorzystując fakt, iż $F(x, 0) = 0$, otrzymuje się.

$$\delta\Phi[(n-1)\lambda] = -\sum_{j=0}^{n-2} \{\delta\Phi(j\lambda) F(x^*, (n-j)\lambda] + Z[\Theta_t - \Theta(x^*, n\lambda)]\} \times \\ \times \frac{1}{F(x^*, \lambda)}. \tag{2.21}$$

Ponieważ każda wartość $\delta\Phi(n \cdot \lambda)$ zależy od wszystkich poprzednich przyrostów strumienia ciepła, więc rozwiązanie może być teraz generowane krok po kroku począwszy od $t = 0$. Dla przyrostu $\delta\Phi(0)$ dostaje się stąd

$$\delta\Phi(0) = \frac{Z}{F(x^*, \lambda)} [\Theta_t - \Theta(x^*, \lambda)], \tag{2.22}$$

a następnie na podstawie (2.21) łatwo wyznacza się pozostałe przyrosty strumienia ciepła.

Autor ostrzega, że krok czasowy nie może być zbyt mały, gdyż występuje wówczas możliwość oscylacji rozwiązania (por. także uwagi zawarte w pracy [34]).

Podobną metodę stosuje także w swoich pracach J. V. Beck. Rozważał on w [5] także problem wyznaczania powierzchniowego strumienia ciepła. Jednakże o ile „wygładzanie" rozwiązania Stolz przeprowadza wykorzystując równowagę cieplną, o tyle Beck robi użytek z metody najmniejszych kwadratów przy wykorzystaniu idei tzw. współczynników wrażliwości [4]. O podejściu Becka będziemy mówić dalej przy omawianiu problemów nieliniowych.

3. Nieliniowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego

Zagadnienia nieliniowe nastręczają wiele trudności już przy rozwiązywaniu problemów bezpośrednich. Problemy odwrotne potęgują te trudności, gdyż nie tylko chodzi wówczas o rozwiązanie niełatwego zagadnienia brzegowo-początkowego, lecz także o ekstrapolację otrzymanego rozwiązania poza obszar wyznaczony przez punkty wewnętrzne ze znanymi odpowiedziami temperaturowymi, i to w taki sposób, aby uwzględnić nieliniowość. Z tej przyczyny prac traktujących o zagadnieniach nieliniowych jest stosunkowo niewiele. Tym niemniej wśród nich daje się wyróżnić dwie metody:

3.1. podejścia oparte na metodzie różnic skończonych, oraz

3.2. rozkład problemu nieliniowego na szereg problemów liniowych (metoda całkowa).

Co do pierwszej metody istnieje pewna liczba prac, w których stosuje się ją z powodzeniem i przy wykorzystaniu interesujących modyfikacji. Metoda druga jest prezentowana na przykładzie jednej pracy, [23], z roku 1979. Podejście zaproponowane w tej pracy dotychczas nie było stosowane w rozważaniach dotyczących zagadnień odwrotnych.

3.1. Podejście oparte na metodzie różnic skończonych. Podejście to stosowane było m. in. w pracach [3, 6, 10, 11 i in.,]. Prace [3, 10 i 11] to wykorzystanie klasycznego aparatu metody różnic skończonych, przy czym w pracy [3] zarysowana jest, wykorzystana w [6], a omówiona dokładniej w [4], metoda tzw. współczynników wrażliwości. Prace [10] i [11] zawierają, m. in., przybliżone rozwiązania nieliniowych zagadnień odwrotnych w sensie p. 4° ze wstępu.

Pracą, którą warto tu nieco szerzej omówić, jest praca BECKA [6]. Modyfikacja metody różnic skończonych, którą się on posługuje, opiera się na koncepcji tzw. nieliniowej estymacji. Metoda ta jest przedstawiona na przykładzie płyty nieskończonej. Autor formułuje problem następująco:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad T(x^*, t) = Y(t), \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_l} = 0, \tag{3.1}$$

oraz

$$T(x, 0) = T_i(x),$$

gdzie $Y(t)$ oraz $T_i(x)$ są znanymi funkcjami, $x^* \in (x_e, x_l)$ przy czym autor przyjmuje $x_e = 0$, $x_l = L$, $x^* = E < L$. O λ i c_p zakłada się, że mogą być funkcjami temperatury i zmiennych przestrzennych.

Wielkościami poszukiwanymi są powierzchniowy strumień ciepła i powierzchniowa emperatura.

Rozwiązanie tego problemu może zostać wyznaczone przez zastosowanie kilku przybliżeń przy pomocy różnic skończonych, jak zrobiono np. w [3]. Jednakże z pracy [7] wynika m. in., że jeśli zmniejszać kroki czasowe, to coraz wyższe pochodne po czasie funkcji $Y(t)$ i strumienia w punkcie $x^* = E$ stają się nie do pominięcia. Przy użyciu formalizmu różnic skończonych oznaczałoby to konieczność uwzględnienia różnic wyższych rzędów. Z drugiej strony wiadomo [6, 34, 35], że zmniejszanie kroku czasowego prowadzi do utraty stabilności procedury numerycznej.

Idea nieliniowych estymacji pozwala po części ominąć te trudności, aczkolwiek kosztem pojawienia się nowych, o których mowa poniżej.

Jako zerowe przybliżenie dla q tzn. jako q° przyjmuje się rozwiązanie problemu liniowego. Następnie wyznacza się, rozwiązując nieliniowe zagadnienie brzegowo-początkowe $(3.1)_1$, $(3.1)_3$ $(3.1)_4$ przy wykorzystaniu wyznaczonego q°, przebieg temperatury T stanowiącej odpowiedź temperaturową punktu E na wymuszenie q°. Procedura wyznaczania strumienia q polega na minimalizowaniu funkcjonału

$$F(\bar{q}) = \sum_{i=1}^{J} (T_{\eta+i} - Y_{\eta+i})^2, \tag{3.2}$$

gdzie $\bar{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_N]$ jest wektorem, którego współrzędne określone są następująco:

$$q(0, t) = q_n \quad \text{dla} \quad \Theta_{n-1} < t < \Theta_n,$$

$Y_{\eta+i}$ jest wartością zmierzonej w punkcie E temperatury w chwili $t_{\eta+i}$, $T_{\eta+i}$ jest temperaturą wyliczoną dla chwili $t_{\eta+i}$ przy założeniu, że wartość umienia ciepła na powierzchni wynosi q. (Zatem dla q° otrzymuje się temperaturę T°).

Krok czasowy dla wyznaczenia $Y_{\eta+i}$ czy $T_{\eta+i}$ może się różnić od kroku czasowego dla wyznaczenia q_n. Zachodzi między nimi relacja $\Delta\Theta = m \cdot \Delta t$, gdzie m — liczba naturalna, $\Delta\Theta$ — krok czasowy przy dyskretyzacji strumienia, zaś Δt dotyczą Y i T. Oznacza to, że Θ_M i t_n są tą samą chwilą czasu gdy $m\, M = \eta$.

Liczba J, do której następuje sumowanie po prawej stronie (3.2), jest równa $J = mr$, gdzie $r = 1, 2, 3$ lub 4; rzadko trzeba przyjmować r większe od czterech. Dzięki temu dla $r > 1$ przy wyznaczaniu strumienia wykorzystuje się „przyszłe" temperatury. Jeśli bowiem wyznaczana jest wartość q_{M+1}, to sumowanie obejmuje wskaźniki od $\eta = m \cdot M$ poprzez $\eta + m = m(M+1)$ aż do $\eta + r\, m = \eta + J$. Dzięki temu autor uzyskuje bardziej precyzyjne wyniki; chwyt dotyczący możliwości wprowadzenia do (3.2) temperatur $T_{\eta+i}$ gdzie $i > m$, polega na założeniu (tylko na użytek chwilowo wykonywanych rachunków), że $q_{M+1} = q_{M+2} = \ldots q_{M+r}$.

Aby zilustrować sposób, w jaki funkcjonuje metoda, załóżmy że wyznaczone jest q_{M+1}^{l-1}, tzn $l-1$ przybliżenie strumienia ciepła w chwili $(M+1)\,\Delta\Theta$. Oznacza to, że znamy również T_{M+1}^{l-1}. Rozkładamy teraz $T_{\eta+1}^{l}$ w szereg Taylora:

$$T_{\eta+i}^{l} \approx T_{\eta+i}^{l-1} + \Phi_{M,\eta,i}^{l-1}\, \nabla q_{M+1}^{l}, \tag{3.3}$$

gdzie $\nabla q_{M+1}^{l} = q_{M+1}^{l} - q_{M+1}^{l-1}$ zaś $\Phi_{M,\eta,i}^{l-1}$ jest tzw. współczynnikiem wrażliwości [4], określonym następująco:

$$\Phi_{M,\eta,i}^{l-1} \equiv \frac{\partial T_{\eta+i}^{l}}{\partial q_{M+i}^{l}} \approx \frac{T_{\eta+i}\,[q_{M+1}^{l-1}\,(1+\varepsilon)] - T_{\eta+1}[q_{M+1}^{l-1}]}{\varepsilon \cdot q_{M+1}^{l-1}}, \qquad \varepsilon \ll 1$$

Za ε przyjmuje autor wartość 0,001.

Jak więc widać, przyjmuje się zależność funkcyjną pomiędzy $T_{\eta+i}$ oraz q_{M+1}. Wykorzystując następnie fakt, że $F(\bar{q})$ ma osiągnąć minimum, oraz związek (3.3), otrzymuje się wzór na zmianę wartości strumienia po l-tym przybliżeniu:

$$\nabla q_{M+1}^{l} = \Big[\sum_{i=1}^{J} [(\Phi_{M,\eta,i}^{L-1})^2]\Big]^{-1} \sum_{i=1}^{J} (Y_{\eta+i} - T_{\eta+i}^{l-1})\, \Phi_{M,\eta,i}^{l-1}. \tag{3.4}$$

Kolejne przybliżenia prowadzi się aż do chwili, gdy zmiana ∇q_{M+1}^{l} będzie znikoma, np. będzie równa $0{,}005 q_{M+1}^{l-1}$.

Metoda daje zadowalające wyniki dla $r = 3$ lub 4 nawet przy $m = 1$. Dla $r = 2$ rozwiązanie silnie oscyluje wokół rozwiązania ścisłego, zaś dla $r = 1$ procedura numeryczna jest niestabilna. Metodę tę można także stosować w celu rozwiązania liniowego problemów odwrotnych. W tych przypadkach funkcjonuje ona na zasadach zbliżonych do procedury opisanej w pracy [35].

3.2. Metody całkowe. Zasadnicza różnica pomiędzy metodą całkową, użytą przez IMBERA [23], a metodą omówioną wyżej, polega na tym, że Imber wyznacza rozwiązanie zagadnienia odwrotnego jako funkcję ciągłą, podczas gdy BECK [6] wyznacza tylko ciąg wartości dyskretnych.

Rozwiązanie Imbera składa się z dwóch części. W części pierwszej rozważa on bezpośrednie nieliniowe zagadnienie wyznaczenia pola temperatury dla półprzestrzeni. Dokonuje tego metodą kolejnych przybliżeń. Jako przybliżenie zerowe T_0 rozwiązania równania $(3.1)_1$ z warunkiem początkowym $(3.1)_4$ przyjmuje rozwiązanie dla problemu liniowego. Znając rozwiązanie będące n-tym przybliżeniem ($n = 0, 1, 2, \ldots$), uzyskuje się $n+1$ — przybliżenie następująco. Konstruuje się funkcjonał

$$I(a, C_0, C_1, \ldots, C_n) = \int_0^\infty \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{n} C_k \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} \right\}^2 dx dt, \tag{3.5}$$

który następnie należy zminimalizować, przy czym współczynnik a musi być równy części stałej współczynnika przewodnictwa cieplnego λ, oznaczonej λ_i. Funkcja $T(x, t)$ wchodząc w skład prawej strony związku (3.5) jest rozwiązaniem równania

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sum_{k=0}^{n} C_k \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}; \tag{3.6}$$

stałe C_k dla $k = 1, 2, \ldots, n$ wyznacza się na podstawie warunków koniecznych osiągnięcia minimum przez funkcjonał I. Zatem aby otrzymać $T_{n+1}(x, t)$, trzeba wyznaczyć współczynniki $C_0, C_1, \ldots, C_n$ z równań

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial C_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.7}$$

przy jednoczesnym podstawieniu $a = \lambda_i$.

Jak więc widać, rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego otrzymane jest metodą rozkładu problemu nieliniowego na ciąg problemów liniowych.

Natomiast nieliniowe zagadnienie odwrotne autor rozwiązuje w oparciu o zreferowaną już metodę rozwiązywania odwrotnych zagadnień liniowych [18]. Na podstawie rozwiązania zagadnienia bezpośredniego stwierdza on, iż krzywa opisująca przebieg odpowiedzi temperaturowej w punkcie wewnętrznym dla zagadnienia nieliniowego daje się lokalnie przybliżyć odpowiednimi krzywymi otrzymanymi dla zagadnień liniowych. W związku z tym przy nieliniowym zagadnieniu odwrotnym traktuje się współczynnik przewodnictwa λ jako odcinkowo stały i otrzymuje się rozwiązanie jako sklejenie rozwiązań dla poszczególnych zagadnień liniowych. Dla stwierdzenia, czy otrzymane przybliżenie, na podstawie odczytów z dwóch termopar, jest w poszczególnych przedziałach czasu wystarczająco ścisłe, proponuje Imber, aby umieścić pomiędzy tymi termoparami trzeci, kontrolny czujnik.

4. Zagadnienia odwrotne wielowymiarowe przewodnictwa cieplnego

Po raz pierwszy dwu- i trójwymiariowe zagadnienia odwrotne przewodnictwa ciepła rozważał IMBER [20] w 1974 roku. Rozważał on zagadnienie dwuwymiarowe dla ciała o dowolnych kształtach, natomiast dla zagadnień trójwymiarowych określił sposób otrzymania rozwiązania.

Aby rozważać zagadnienie odwrotne wielowymiarowe, trzeba znać a priori temperaturę w zamkniętym obszarze wewnątrz ciała. Z tego powodu termopary winny być usytuowane na brzegu tego obszaru, tzn. na krzywych w przypadku dwuwymiarowym lub na powierzchniach w przypadku trójwymiarowym. Staje się jasne, że w przypadkach wielowymiarowych dokładność predykcji temperatury w dowolnym punkcie na zewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywe (powierzchnie) na których przebiegi temperatur są znane, w istotny sposób zależy od ilości termopar użytych do wyznaczenia tych przebiegów.

Ograniczając się w rozważaniach do zagadnienia dwuwymiarowego, konstruuje Imber rozwiązanie w sposób analogiczny jak dla problemu jednowymiarowego [18, 19]. Rozwiązuje on zatem równanie

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{4.1}$$

z jednorodnym warunkiem początkowym oraz z warunkami opisującymi temperaturę w rogach pewnego prostokąta

$$T(x_i, y_j, t) = \sum_{n=1}^{N} b_n^{ij} t^n, \quad i, j = 1, 2, \tag{4.2}$$

oraz na bokach tegoż prostokąta

$$T(x, y_j, t) = f_j(t) \quad \text{przy czym } x \in (x_1, x_2), \tag*{(4.3)$_1$}$$

$$T(x_i, y, t) = g_i(t) \quad \text{przy czym } y \in (y_1, y_2). \tag*{(4.3)$_2$}$$

W celu otrzymania rozwiązania we wnętrzu prostokąta, wykorzystuje transformację Laplace'a. Specjalnych metod trzeba użyć dopiero przy eksploatacji rozwiązania poza ten obszar. Istota metody ekstrapolacji temperatury w przypadku wielowymiarowym polega na sprowadzeniu zagadnienia do jednowymiarowego. Dokonuje się tego, dobierając odpowiednie drogi, na których przeprowadza się operację ekstrapolacji. W rozważanym, dwuwymiarowym przypadku autor wybiera przedłużenia boków prostokąta. Uzyskuje w ten sposób do predykcji temperatury na zewnątrz obszaru te same dane, które posłużyły mu do wyznaczenia rozwiązania wewnątrz prostokąta. Postępując teraz zgodnie z omówioną w rozdziale 2.1. pracy metodą, [18], otrzymuje w ten sposób po jednym lub kilku krokach przebiegi temperatur w ośmiu punktach na brzegu rozważanego ciała. Aby wyznaczyć przebiegi temperatur w punktach wewnętrznych bądź brzegowych nie leżących na wspomnianych wyżej drogach, należy obrać jako nowe drogi ekstrapolacji bądź proste przechodzące przez prostokąt (równoległe do poprzednich), bądź przecinające obszar wyznaczony przez te proste. W ten sposób można wyznaczyć przebiegi temperatur w każdym punkcie dwuwymiarowego ciała o dowolnych kształtach, tyle tylko, że część wyznaczonych przebiegów będą to wyniki niejako drugiej generacji (w oparciu o dane — wyniki ekstrapolacji na drogach przechodzących przez obszar prostokąta).

Metoda Imbera jest dosyć uciążliwa w zastosowaniu do problemów więcej niż jednowymiarowych. Potrzeba wykorzystania jako danych wyznaczonych uprzednio poza obszarem przebiegów temperatury znacznie zwiększa możliwość błędnej aproksymacji. Ponadto minusem metody jest konieczność wprowadzenia do badanego obiektu dużej ilości termopar. Imber podaje, że przy ośmiu czujnikach (w każdym narożu i w środku każdego boku prostokąta) otrzymane wyniki są obarczone blisko 10% błędem. Wspomina on także o „wąskim gardle" metody, jakim jest — przy dużej liczbie termopar — wielkość układu równań na wyznaczenie stałych w związkach typu (2.8). Przy dwunastu termoparach (po dwie termopary pomiędzy narożami) i przy uwzględnieniu tylko pięciu pierwszych wyrazów szeregów typu $(2.8)_2$ (zawierają one — z uwagi na dwuwymiarowość zagadnienia — wyrazy o dwóch wskaźnikach, podobnie jak po prawej stronie związku (4.2)) — liczba niewiadomych wynosi 40 [21], tzn. do wyliczenia są wyznaczniki o rozmiarach 40×40 i to jeszcze na etapie przygotowywania danych do wyznaczenia ekstrapolowanej temperatury! Z tej przyczyny Imber proponuje [21], aby termopary umieszczać blisko interesującego nas obszaru, a wymiar prostokąta i liczba termopar powinny być jak najmniejsze.

Wydaje się, że stosowanie metody Imbera nie może dać wyników bliskich rzeczywistości, gdyż wprowadzenie dużej liczby czujników spowoduje niewątpliwie zmiany w polu temperatury.

5. Odwrotne zagadnienia temperaturowe w termosprężystości

Zupełnie nowe możliwości, szczególnie jeśli chodzi o wyznaczanie pola temperatury na zewnątrz obszaru o znanych warunkach brzegowych, wprowadzają idee zawarte w pracach [10] i [12]. W pracach tych omówione są metody wyznaczania temperatury i strumienia ciepła na powierzchni ciał, gdy uwzględnia się efekt sprzężenia pola temperatury z polem przemieszczeń. Dokonana analiza dotyczyła jednowymiarowych zagadnień teorii naprężeń cieplnych (a więc bez uwzględnienia tzw. efektów krzyżowych). Sformułowanie problemu zawierało równanie przewodnictwa cieplnego (2.1) z jednorodnym warunkiem początkowym, warunkiem symetrii (izolacji w przypadku płyty) dla $x = 0$ oraz równanie ruchu w przemieszczeniach.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\beta}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1-2\beta}{x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] u(x, t) = k_\beta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, \tag{5.1}$$

z warunkami brzegowymi i początkowymi

$$u(x, 0) = \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0; \quad \sigma_{xx}(1, t) = 0, \tag{5.2}$$

gdzie $c^2 = \dfrac{2G\,(1+2\beta\nu)}{\varrho[1-(1-2\beta)\nu]}$, G — moduł ścinania, ν — liczba Poissona, ϱ — gęstość, β — współczynnik kształtu, omówiony w rozdziale 2.2, $u(x, t)$ — przemieszczenie w kierunku osi x, $k_\beta = \dfrac{1+\nu}{1+2\beta\nu}\alpha_t$, α_t — rozszerzalność cieplnej. W rozpatrywanym zagadnieniu $\beta \neq 0{,}5$. σ_{xx} jest współrzędną tensora naprężenia, określoną następująco:

$$\sigma_{xx} = \frac{2G}{1-(1-2\beta)\cdot\nu}\left[(1+2\beta\cdot\nu)\frac{du}{dx} + (1-2\beta)\nu\frac{u}{x} - (1+\nu)\alpha_t T\right] \tag{5.3}$$

W celu otrzymania rozwiązania zagadnienia odwrotnego pola temperatury stosuje się tu, podobnie jak i w wielu poprzednio omówionych pracach, analizę transformat Laplace'a. Pozwala ona wyrazić temperaturę powierzchniową lub strumień ciepła na brzegu, gdy np. znany jest przebieg przemieszczenia w punkcie x^*, tzn. $u(x^*, t) = u_1(t)$. Dla transformaty temperatury oraz strumienia ciepła na powierzchni ciała zachodzą wówczas związki [10]

$$
\begin{cases}
\bar{T}(1, s) = \bar{u}_1(s) \dfrac{c^2 - s}{c^2 x^{*\beta} k} \cdot \dfrac{\sqrt{s}\, I_{-\beta}(\sqrt{s})\, L_1(s, \beta)}{I_{-\beta+1}(x^* \sqrt{s})\, L_1(s, \beta) - I_{-\beta+1}\left(x^* \dfrac{s}{c}\right) L_2(s, \beta)} \\[2ex]
\bar{q}(1, s) = \bar{u}_1(s) \dfrac{c^2 - s}{c^2 x^{*\beta} k} \cdot \dfrac{s\, I_{-\beta+1}(\sqrt{s})\, L_1(s, \beta)}{I_{-\beta+1}(x^* \sqrt{s})\, L_1(s, \beta) - I_{-\beta+1}\left(x^* \dfrac{s}{c}\right) L_2(s, \beta)}
\end{cases}
\tag{5.4}
$$

gdzie

$$L_1(s, \beta) = (1+2\nu)\, I_{-\beta}\left(\frac{s}{c}\right) - (1-2\beta)\,[1-(1-2\beta)\nu]\,\frac{c}{s} \cdot I_{-\beta+1}\left(\frac{s}{c}\right)$$

$$L_2(s, \beta) = (1+2\beta\nu) \cdot \frac{\sqrt{s}}{c}\, I_{-\beta}(\sqrt{s}) - (1-2\beta)\,[1-(1-2\beta)\nu]\,\frac{c}{s}\, I_{-\beta+1}(\sqrt{s})$$

Podobne związki można podać dla przypadku, gdy znany jest w punkcie wewnętrznym przebieg naprężeń cieplnych [10, 12]. Aby transformaty związków (5.4) były odwracalne, funkcja $u_1(t)$ musi być odpowiednio regularna tak, że będą spełnione dla niej warunki analogiczne do warunku (2.12) [10, 12]. Przy zastosowaniu pomiaru przemieszczeń metodą np. znaczonych atomów (umieszczenie w odlewie np. cylindra silnika śladowych ilości izotopu pierwiastka promieniotwórczego) uzyskuje się możliwość dokonywania pośrednio pomiarów temperatury na tej powierzchni cylindra, która współpracuje z tłokiem.

6. Podsumowanie

Niniejsza praca zawiera przegląd ważniejszych metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła. Jednakże oczywistym jest, że nie wszystkie prace dadzą się jednoznacznie „zaszufladkować". Do takich należy np. praca TULISZKI [38], gdzie nie tylko rozwiązano złożony problem pól temperatury i naprężeń, ale także podano sposób wyznaczania temperatury powierzchniowej, którego nie da się porównać z żadnym z omówionych. Należy jednak przy tym zaznaczyć, iż z uwagi na złożoność rozważanego zagadnienia metoda podana w pracy [38] nie jest tak prosta i elegancka jak metoda IMBERA [18, 22] czy BECKA [6]. Niniejszy przegląd nie zawiera również wszystkich prac napisanych na temat zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła. Pominięto np. prace cytowane w monografii TIEMKINA [36], jak również samą monografię, która — choć traktuje o zagadnieniach odwrotnych — jest stosunkowo mało czytelna i nie zawiera treści przydatnych dla eksperymentatora. Niewątpliwie niektóre z podejść zaprezentowanych w tej monografii, jak np. rozwijanie splotu w szereg, może jeszcze znaleźć zastosowanie, lecz wydaje się, że metody omówione w rozdziałach 2.1, 2.4. czy 3.1. naszego opracowania są znacznie prostsze i bardziej eleganckie.

Dalsze kierunki badań dotyczących zagadnień odwrotnych, to rozważania dotyczące problemów nieliniowych jak również rozwijanie metod predykcji temperatury przy znanych odpowiedziach przemieszczeniowych czy naprężeniowych w punkcie (punktach) wewnętrznym. Te drugie problemy stanowią przedmiot badań autorów tego przeglądu. Warto podać, że w ogólności zagadnienia odwrotne w sensie punktów 1° i 2° ze wstępu można podzielić na

a) zagadnienia odwrotne jednorodne, tzn. dane i poszukiwane są przebiegi funkcji tego samego rodzaju, np. temperatury, oraz

b) zagadnienia odwrotne niejednorodne, tzn. dane i poszukiwane są przebiegi funkcji różnych rodzajów (por. rozdział 5 pracy).

Rozpatrując zagadnienia odwrotne niejednorodne, gdy dane są przebiegi dwóch różnych wielkości, każda w innym punkcie wewnętrznym, dochodzi się do wniosku, że ilość problemów czekających na rozwiązania (zastosowania?) jest znaczna. Zwrócimy chociażby uwagę na to, że w punktach x_1 i x_2 mogą być znane przebiegi, odpowiednio, temperatury i przemieszczeń, temperatury i naprężeń, przemieszczeń i strumienia ciepła itd., a wobec tego zagadnienia odwrotne mogą dotyczyć np. w obszarze,, do tyłu" temperatury, a w obszarze „do przodu" przemieszczeń, jak to jest w przypadku pierwszej ze wspomnianych par znanych przebiegów. Jednocześnie proste (bezpośrednie) zagadnienie brzegowo-początkowe z warunkami typu Dirichleta bądź Neumanna okazuje się być szczególnym przypadkiem problemu odwrotnego. Są to wspomniane w rozdziale 2.2. brzegowe zagadnienia odwrotne, wśród których tylko jeden rodzaj problemów — z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju [10, 12] — to brzegowe zagadnienia odwrotne właściwe.

Ponad połowa prac omówionych w przeglądzie to publikacje z dziesięciolecia 1970 - 1980. Wydaje się, że obecnie, przy burzliwym rozwoju metod badań nieniszczących, problematyka zagadnień odwrotnych, nie tylko dotyczących pól temperatury, jest szczególnie aktualna i istotna.

Literatura cytowana w tekście

1. R. G. ARLEDGE, A. HAJI-SHEIKH, *An Iterative Approach to the Solution of Inverse Heat Conduction Problems*, ASME Paper 77 — WA/TM — 2.
2. E. A. АРТЮХИН, *Определение коеффициента темпеpатуропроводности по данным эксперимента*. Инж.-Физ. Журнал, 1, **29**, (1975).
3. J. V. BECK, H. WOLF, *The Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem*, ASME Paper 65 — HT — 40 (1965).
4. J. V. BECK, *Transient Sensitivity Coefficients for the Thermal Contact Conductance*, Int. J. Heat Mass Transfer, **10**, 1615-1617 (1967).
5. J. V. BECK, *Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method*, Nucl. Engng. Design, 7, 170-178 (1968).
6. J. V. BECK, *Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, **13**, 703—716 (1970).
7. O. R. BURGGRAF, *An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Application*, Trans. ASME, s. C. J. Heat Transfer, **86**, 373 - 382 (1964).
8. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press, (1959).

9. C. J. CHEN, D. M. THOMSEN, *On Transient Cylindrical Surface Heat Flux Predicted from Interior Temperature Response*, AIAA Journal, **13**, 697 - 699 (1975).
10. M. J. CIAŁKOWSKI, *Metoda wyznaczania pól temperatury w elementach maszyn cieplnych w dowolnych warunkach nagrzewania*, praca doktorska, Polit. Pozn., Poznań (1978).
11. M. J. CIAŁKOWSKI, K. TUSTANOWSKA, *Nieliniowe zagadnienie brzegowe dls jednowymiarowego problemu nagrzewania (chłodzenia) kuli, walca i plyty nieskończonej. Zagadnienie odwrotne pola temperatury*, Arch. Bud. Maszyn, 2, **26**, 291 - 305 (1979).
12. M. J. CIAŁKOWSKI, K. GRYSA, *On a Certain Inverse Problem of Temperature and Thermal Stress Fields*, Acta Mechanica, 36, 169—185 (1980).
13. J. M. DAVIES, *Input Power Determined from Temperatures in a Simulated Skin Protected Against Thermal Radiation*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **88**, 154 - 160 (1966).
14. L. I. DEVERALL, R. S. CHANNAPRAGADA, *A New Integral Equation for Heat Flux in Inverse Heat Conduction*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **88**, 327 - 328 (1966).
15. N. D'SOUZA, *Numerical Solution of One-Dimensional Inverse Transient Heat Condcution by Finite Difference Method*, ASME Paper 75 - WA/HT — 81.
16. I. FRANK, *An Application of Least Squares Method to the Solution if the Inverse Problem of Heat Conduction*, Trans. ASME, s. C.: J. Heat Transfer, **85**, 378 (1963).
17. P. S. HORE, G. W. KRUTZ, R. J. SCHOENHALS, *Application of the Finite Element Method to the Inverse Heat Conduction Problem*, ASME Paper 75-WA/TM-4.
18. M. IMBER, J. KHAN, *Prediction of Transient Temperature Distributions with Embedded Thermocouples* AIAA Journal, 6, **10**, 784 - 789 (1972).
19. M. IMBER, *A Temperature Extrapolation Method for Hollow Cylinder*, AIAA Journal, 1, **11**, 117 - 118 (1973).
20. M. IMBER, *Temperature Extrapolation Mechanism for Two-Dimensional Heat Flow*, AIAA Journal, 8, **12**, 1089 - 1093 (1974).
21. M. IMBER, *Two-Dimensional Inverse Conduction Problem — Further Observations*, AIAA Journal, 1, **13**, 114 - 115 (1975).
22. M. IMBER, *Inverse Problem for the Solid Cylinders*, AIAA Journal, 1, **17**, 91 - 94 (1979).
23. M. IMBER, *Nonlinear Heat Transfer in Planar Solids: Direct and Inverse Applications*, AIAA Journal, 2, **17**, 204 - 212 (1979).
24. J. KHAN, *A New Analytical Solution of the Inverse Heat Conduction Problem*, Ph. D. Thesis, Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York (1972).
25. V. A. KOVERYANOW, *Inverse Problem of Nonsteady-State Thermal Conductivity*, Teplofizika Vysokich Temperatur, 1, **5**, 141 - 143 (1967).
26. Л. А. Коздова, *Решения нелинейных задач теплопроводности*. Наукова Думка, Киев (1976).
27. M. M. LAVRENTIEV, V. G. ROMANOV, V. G. VASILIEV, *Multidimensional Inverse Problems for Differential, Equations*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).
28. A. V. MASKET, A. C. VASTANO, *Interior Problems of Mathematical Physics, Part II Heat Conduction* Am. J. of Phys., **30**, 796 - 803 (1962).
29. T. J. MIRSEPASSI, *Heat-Transfer Charts for Time-Variable Boundary Conditions*, British Chem. Engng., **4**, 130 - 136 (1959).
30. К. Г. Омельченко, В. Г. Пчелкина, *Решение обратной задачи нелинейной теплопроводности по определению теплофизических характеристик*. Инж.-Физ. Журнал, 1, **29**, (1975).
31. M. L. ROSENZWEIG, *The Response of the Laminar Boundary Layer to Impulse Motion*, Ph. D. Dissertation in Aeronautical Engng. Cornell Univ., (1959).
32. K. C. SABHERWAL, *An Inverse Problem of Transient Heat Conduction*, Indian J. Pure and Appl. Phys., **3**, 397 - 398 (1965).
33. Н. В. Шумаков, *Метод экспериментального изучения процесса нагрева твердого тела*. Журнал Техн. Физ., 4, **27**, 844-855, (1957).
34. E. M. SPARROW, A. HAJI-SHEIKH, T. S. LUNDGREN, *The Inverse Problem in Transient Heat Conductional*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **86**, 369 - 375 (1964).
35. G. STOLZ, Jr, *Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes*, Trans. ASME, s. C: J.Heat Transfer, **82**, 20 - 26 (1960).

36. А. Г. ТЕМКИН, *Обратные методы теплопроводности*. Изд. Энергия, Москва, (1963).
37. D. M. TRUJILLO, *Application of Dynamic Programming to the General Inverse Problem*, Int. J. Num. Meth. in Engng., 12, 613 - 624 (1978).
38. E. TULISZKA, *An Analysis of the Unsteady Fields of Temperature and Thermal Stresses in a Rotating Disk of Thermal Axial-Flow Turbines*, Joint Gas Turbine Congress, Paper No 63, Tokyo (1977).

Р е з ю м е

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ — ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В работе продискутировано публикации, относящиеся к вопросом обратных полей температур. Этот ряд вопросов, который интересовал авторов обзора особенно, связянный с проблемами определения разрешения вопроса краево- начального вне области, определённой через берег, на котором заданы условия. Описано задачи линейные и нелинейные, одно и двухмерные, а также обратные задачи для сопряженных полей. В конце работы даны актуальные направления изучения и возможности практических применений обратных задач.

S u m m a r y

THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS — REVIEW

The papers dealing with the inverse heat conduction problems are being reviewed. The concerns the following problems: to find a solution of an initial-boundary value problem outside the region determined by the boundary with prescribed conditions. The linear and nonlinear as well as one- and two-dimensional problems are discussed. Also some inverse problems of the coupled fields are briefly presented. In the last part of the review some new aspects and approaches to the problems as well as the possibilities of application of their solutions are given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ I SILNIKÓW SPALINOWYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 listopada 1979 roku