

SPRĘŻANIE TERMICZNE NA PRZYKŁADZIE ZAGADNIENIA
KOŁOWO-SYMETRYCZNEGO¹,

JAN HOLNICKI - SZULC (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem pracy jest sformułowanie i analiza zagadnienia sprężania termicznego na przykładzie kołosymetrycznej tarczy wirującej.

Przez sprężanie rozumiemy sterowanie wymuszonym polem dystorsji pierwotnych $\overset{\circ}{\varepsilon}$, w celu uzyskania (samozrównoważonych) stanów naprężeń wstępnych $\overset{R}{\sigma}$ oraz (nierozdzielnych) stanów odkształceń wstępnych $\overset{R}{\varepsilon}$ takich, które korzystnie regulują stany końcowe $\sigma = \overset{L}{\sigma} + \overset{R}{\sigma}$, $\varepsilon = \overset{L}{\varepsilon} + \overset{R}{\varepsilon}$ gdzie pola $\overset{L}{\sigma}$ i $\overset{L}{\varepsilon}$ są znane i związane z danym obciążeniem zewnętrznym (por. [1, 4, 6]).

Prezentowane w pracy „sprężanie termiczne” stanowi szczególny przypadek opisanej wyżej idei „sprężania wewnętrznego”. Wprowadzanie do ustroju dystorsji za pośrednictwem wymuszania pola temperatury ogranicza możliwości regulacji stanów. Ograniczenia te wpływają na fakt, że pewne rozwiązania wyznaczane dla sprężania termicznego mają bardziej złożoną postać niż rozwiązania uzyskiwane w przypadku ogólnym [6].

Przykładem innej technicznej realizacji sprężania wewnętrznego może być wymuszenie pól dystorsji w ustrojach kratowych poprzez generowanie odpowiednich stanów dyslokacji (wydłużeń i skróceń prętów). [7].

Zajmijmy się przypadkiem ciała izotropowego i ustalonego procesu przepływu temperatury. Dystorsje termiczne działające na ciało przyjmują postać:

$$(1) \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = \alpha \theta \delta,$$

gdzie θ — pole temperatury w stosunku do stałej temperatury otoczenia, α — współczynnik rozszerzalności termicznej materiału, δ — tensor jednostkowy.

Pole temperatury musi przy tym spełniać równanie przewodnictwa cieplnego.

$$(2) \quad \nabla \theta = -\frac{W}{\lambda},$$

gdzie λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego w materiale zaś W — pole skalarne źródeł ciepła.

Cechą charakterystyczną sprężania termicznego jest fakt, że nie istnieje możliwość wymuszania beznaprężeniowo odkształceń wstępnych (poza przypadkiem liniowo zmiennych pól $\overset{\circ}{\varepsilon}$) oraz bezodkształceniowo naprężeń wstępnych [6].

¹ Praca wykonana została w ramach współpracy polsko-amerykańskiej (fundusz Marii Skłodowskiej-Curie NO INT 75-08722) na temat „Optymalizacja elementów i systemów konstrukcyjnych”.

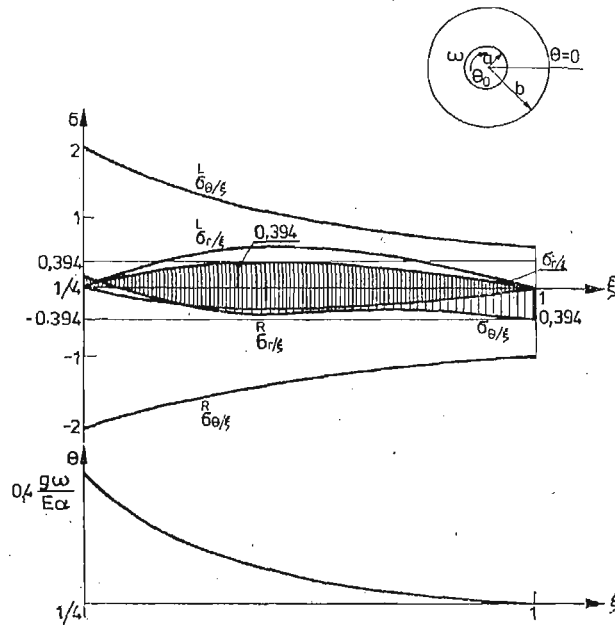
Zatem, poza przypadkiem liniowo zmiennego pola Θ , każdy inny rozkład temperatury wywołuje jednocześnie stany naprężeń i odkształceń wstępnych.

2. Sformułowanie zagadnienia sprężenia termicznego tarczy wirującej

Omówimy przykład tarczy z otworem wirującej ze stałą prędkością kątową ω (rys. 1).

Obciążenie zewnętrzne opisane jest w tym przypadku (pomijając ciężar własny) przez pole masowych sił odśrodkowych
gdzie ρ — masa właściwa materiału.

$$(3) \quad R = \rho \omega^2 r,$$



Rys. 1

Uwzględniając wpływ pola dystorsji na stany naprężeń i odkształceń końcowych przez przyjęcie zmodyfikowanych związków konstytutywnych [2, 6], otrzymujemy układ związków zapisanych dla naszego kołosymetrycznego przypadku w układzie współrzędnych biegunowych:

— równania równowagi

$$(4) \quad \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0,$$

$$\sigma_r = 0 \quad \text{dla} \quad r = b,$$

$$\sigma_r = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

— warunki nierozdzielności

$$(5) \quad \varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \varepsilon_{\theta,r} = 0,$$

— związki konstytutywne

$$(6) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \overset{\circ}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \overset{\circ}{\varepsilon},$$

$$(7) \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) - \overset{\circ}{\sigma},$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) - \overset{\circ}{\sigma},$$

gdzie

$$(8) \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = \alpha \Theta, \quad \overset{\circ}{\sigma} = \frac{E}{1-\nu} \alpha \Theta.$$

Wprowadźmy ograniczenia nierównościowe narzucone na końcowy stan naprężeń w postaci:

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma} - &\leq \sigma_r \leq \bar{\sigma}, \\ \bar{\sigma} - &\leq \sigma_\theta \leq \bar{\sigma}, \quad \text{gdzie } \bar{\sigma} > 0. \end{aligned}$$

Jeśli naprężenia $\overset{L}{\sigma}_r$ i $\overset{L}{\sigma}_\theta$, wywołane przez obciążenie zewnętrzne polem sił masowych R ograniczeń tych nie spełniają, interesujący z inżynierskiego punktu widzenia staje się problem poszukiwania pól dystorsji $\overset{\circ}{\varepsilon}$, które minimalizując koszt sprężenia mierzony całką (globalna energia stanu dystorsji):

$$(10) \quad \min \int_V \overset{\circ}{\varepsilon} \overset{\circ}{\sigma} dV$$

wywołują stany wstępne $\overset{R}{\sigma}_r$, $\overset{R}{\sigma}_\theta$ dostosowujące naprężenia końcowe $\sigma_r = \overset{R}{\sigma}_r + \overset{L}{\sigma}_r$, $\sigma_\theta = \overset{R}{\sigma}_\theta + \overset{L}{\sigma}_\theta$ do ograniczeń (9).

Dysponując techniczną możliwością wprowadzania dowolnie rozłożonych źródeł ciepła w, związki (3)+(10) formułują zagadnienie optymalnego sprężania termicznego. Otrzymane zadanie minimalizacji funkcjonatu (10) przy ograniczeniach nierównościowych (9), więzach w postaci czterech równań: (4)¹, (5) i (6) lub (7) oraz dwóch warunków brzegowych (4)² i (4)³ opisuje pięć poszukiwanych funkcji Θ , σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ .

Związek (2) opisuje rozkład źródeł ciepła w, jaki należy wymusić w celu wygenerowania pola temperatur Θ .

3. Przypadek źródeł ciepła rozłożonych na brzegu tarczy

Stan naprężeń użytkowych rozpatrywanej (niesprężonej) tarczy wirującej opisany jest związkami [5]:

$$\overset{L}{\sigma}_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - \xi^2 \right] \overset{a}{=} \zeta s(\xi),$$

$$(11) \quad \overset{L}{\sigma}_{\Theta} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right) - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \xi^2 \right] \overset{a,r}{=} \xi u(\xi),$$

$$\text{gdzie:} \quad \xi = \frac{r}{b} \in \left\langle \frac{a}{b}, 1 \right\rangle, \quad \zeta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2.$$

Omówmy przypadek łagodzenia koncentracji naprężeń w środkowym obszarze tarczy (por. rys. 1) przez zastosowanie sprężania termicznego.

Wartość $\bar{\sigma}$ występującą w ograniczeniach (9) — mniejszą od maksymalnych wartości $\overset{L}{\sigma}_r, \overset{L}{\sigma}_{\Theta}$, przyjmiemy później.

Wprowadźmy dodatkowo ograniczenie dowolności pól temperatur Θ do takich, które mogą być wywołane przez źródła ciepła przyłożone jedynie do brzegu wewnętrznego otworu tarczy (rys. 1). Ograniczenie to uwarunkowane jest względami technologicznymi, ułatwiając realizację wyznaczonego rozkładu temperatur.

Kryterium optymalizacji (10) zbieżne jest w tym przypadku z minimalizacją intensywności źródeł ciepła na obwodzie $r = a$.

Poszukiwane pole temperatury Θ musi spełniać w stanie ustalonym równanie przewodnictwa cieplnego (2) (bez źródeł wewnątrz tarczy: $\nabla\Theta = 0$), które w omawianym zadaniu kołowsymetrycznym przyjmuje postać:

$$(12) \quad \Theta_{rr} + \frac{1}{r} \Theta_r = 0,$$

z warunkiem na brzegu $r = b$;

$$(13) \quad \Theta = 0,$$

Z powyższych związków wynika postać rozkładu temperatur:

$$(14) \quad \Theta = \frac{C}{b} \ln \left(\frac{r}{b} \right)$$

z dokładnością do parametru C , zależnego od intensywności źródła ciepła rozłożonego na obwodzie $r = a$.

Znając pole dystorsji termicznych (14) można określić pole naprężeń wstępnych przez nie wywoływanych (z dokładnością do stałej C).

Podstawiając w tym celu (14) do (6) a następnie wyrażając warunek nierozdzielności (5) przez naprężenia otrzymujemy wraz z równaniem równowagi (pomijając obciążenia zewnętrzne R) układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na dwie niewiadome funkcje opisujące naprężenia wstępne: $\overset{R}{\sigma}_r(r), \overset{R}{\sigma}_{\Theta}(r)$ o warunkach brzegowych (4)^{2,3} na okręgach $r = a$ oraz $r = b$. Rugując z tego układu funkcję naprężeń obwodowych dochodzimy do opisu wstępnych naprężeń promieniowych $\overset{R}{\sigma}_r$:

$$(15) \quad r^2 \overset{R}{\sigma}_{rrr} + (2\nu+1)r \overset{R}{\sigma}_{r,r} + rE\alpha\Theta_r = 0,$$

$$\overset{R}{\sigma}_r|_{r=a} = \overset{R}{\sigma}_r|_{r=b} = 0,$$

gdzie:

$$\Theta_{ir} = \frac{G}{r}.$$

Można sprawdzić, że całka ogólna równania różniczkowego (15)¹ ma postać:

$$(16) \quad \sigma^r = \frac{E\alpha G}{2\nu} \left(\ln r + \frac{a_1}{r^{2\nu}} \right) + a_2,$$

określoną z dokładnością do stałych a_1, a_2 .

Wyznaczając je z warunków brzegowych (15)² otrzymujemy ostatecznie

$$(17) \quad \sigma^r = -z \left[\ln \xi + \frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right) a^{2\nu}}{a^{2\nu} - b^{2\nu}} \right] \left(\frac{1}{\xi^{2\nu}} - 1 \right) \stackrel{a^r}{=} zt(\xi),$$

gdzie:
$$z = \frac{E\alpha C}{2\nu}, \quad \xi = \frac{r}{b} \in \left\langle \frac{a}{b}, 1 \right\rangle.$$

Znając rozkład naprężeń promieniowych, można wyznaczyć z (4)¹ naprężenia obwodowe:

$$(18) \quad \sigma_{\theta}^r = -z \left[\ln \xi + \frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right) a^{2\nu}}{a^{2\nu} - b^{2\nu}} \left((1-2\nu) \frac{1}{\xi^{2\nu}} - 1 \right) \right] \stackrel{a^r}{=} zw(\xi).$$

Znając naprężenia wstępne wywoływane przez pole temperatur (14), zadanie termosprężania ze względu na spełnienie ograniczeń (9) minimalnym kosztem wprowadzanych dystorsji sprowadza się do minimalizacji parametru:

$$(19) \quad \min z^2,$$

przy ograniczeniach

$$(20) \quad \begin{aligned} \zeta s(\xi) + zt(\xi) &\leq \bar{\sigma}, & \zeta s(\xi) + zt(\xi) &\geq -\bar{\sigma}, \\ \zeta u(\xi) + zw(\xi) &\leq \bar{\sigma}, & \zeta u(\xi) + zw(\xi) &\geq -\bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Jeśli wartość $\bar{\sigma}$ ograniczająca naprężenia dopuszczalne jest określona, to przy funkcjach $s(\xi)$, $i(\xi)$, $t(\xi)$, $W(\xi)$ zdefiniowanych wyrażeniami (11), (17), (18), związki (20) opisują zespół warunków określających obszar dopuszczalny na osi liczbowej z , który jest zgodny dla każdego ξ z warunkami (20).

Po znalezieniu tego obszaru, oraz określeniu minimalnej wartości z , można wyznaczyć poszukiwany parametr C (17) określający (por. 14) intensywność źródła ciepła

$$(21) \quad \Theta_b = \frac{c}{b} \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

jakie należy wprowadzić na obwodzie otworu wewnętrznego tarczy wirującej w celu optymalnego termosprężania.

Omawiane zadanie rozwiązano numerycznie przyjmując dane:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 1, \quad \nu = \frac{1}{4}, \quad \bar{\sigma} = 0,3941\zeta.$$

Wartość $\bar{\sigma}$ ograniczającą naprężenia dobrano tak, aby efekt sprężania był największy. Omawiany przykład reprezentuje zatem zadanie maksymalnego łagodzenia koncentracji naprężeń. Można go wykorzystać do maksymalnego zwiększania nośności ustroju poprzez sprężanie.

Parametr z przybiera w omawianym przykładzie optymalną wartość

$$(22) \quad z = -1,4151\zeta,$$

skąd wynika, obliczając parametr C , że poszukiwane pole temperatury (14) ma rozkład

$$(23) \quad \Theta = -1,4151 \frac{2\nu\zeta}{E\alpha b} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

i może być wywołane przez ogrzewanie brzegu otworu wewnętrznego tarczy źródłami ciepła (21) o intensywności (podstawiając dane przykładu)

$$(24) \quad \Theta_0 = 0,3985 \frac{\sigma\omega^2}{E\alpha}.$$

Rozkłady naprężeń radialnych i obwodowych w stanach użytkowym, wstępnym i końcowym pokazano na rys. (1). Widać, że w wyniku termosprężania uzyskano ponad pięciokrotne zmniejszenie ekstremalnych wartości naprężeń.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. MRÓZ, J. E. TAYLOR *Prestress for maximum strength*, Int. J. Solid. Struct. 9, (1973) 1535-1541.
2. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, §§ 4, 8 PWN Warszawa 1970.
3. A. STODOLA, *Dampf — und Gas Turbinen*, wyd. G str. 312 i 889-1924.
4. J. E. TAYLOR *Optimal prestress against buckling. An energy approach*, Int. J. Solid. Struct. 2, 7 (1971).
5. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*. § 14. Arkady Warszawa 1962.
6. J. HOLNICKI-SZULC, *Theory of prestressing I, II*, Bull Acad. Pol. Sci. Techn. 1, 24 (1976).
7. J. HOLNICKI-SZULC, *Prestress of truss and frame structures*, J. Struct. Div. ASCE vol. 105 No ST 3, March 1979.

Резюме

ОБРАЗОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ОСЕСИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В работе рассматривается проблема предварительных термических напряжений. Задача заключается в управлении термическим полем с целью получения требуемого перераспределения напряжений и деформаций в нагруженном упругом сооружении.

Подробно обсуждаются результаты полученные в случае вращающегося диска. Получено оптимальное распределение температуры и указан способ гео реализации.

Summary

THERMAL PRESTRESSING — AN EXAMPLE OF ROTATING DISK

A thermal prestressing problem is formulated in the paper. The prestressing is understood as a control of temperature field in order to produce a convenient redistribution of stress and strain states in a loaded structure.

An example of rotating disk is examined in details. In the result, the optimal distribution of temperature is determined. A technical way producing of such a distribution is also discussed.

IPPT
PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 czerwca 1979 roku.