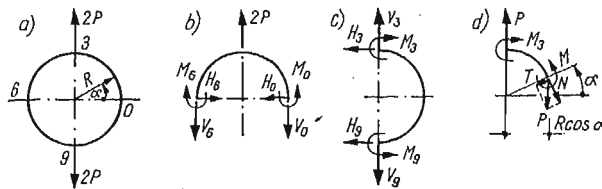


OPTIMALIZACJA PIERŚCIENI SZTYWNO — PLASTYCZNYCH Z WIĘZAMI
GEOMETRYCZNYMI

ANDRZEJ GA WĘCKI, ANDRZEJ GARSTECKI (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest określenie kształtu optymalnych, idealnie plastycznych pierścieni kołowych obciążonych dwoma równoważącymi się siłami średnicowymi o wartości $2P$ (rys. 1). Projekty pierścieni uzyskano w oparciu o teorię nośności granicznej stosując wyłącznie podejście statyczne. Na kształt konstrukcji optymalnej nałożono więzy geometryczne polegające na tym, że przekrój poprzeczny pierścienia w obrębie danego



Rys. 1

kąta γ ma być stały. Podobne zadanie, w którym założono, że przekrój nie może być mniejszy od pewnej z góry określonej wartości, rozwiązał W. Prager [1]. Autor ten rozważał pierścień o przekroju idealnym dwuteowym (sandwiczowym) a projekt optymalny uzyskał w oparciu o kinematyczne kryterium sformułowane w pracy [2]. Porównanie rezultatów niniejszej pracy z rezultatami uzyskanymi przez W. Pragera ma dać odpowiedź na pytanie, jak dalece różnica w sposobie sformułowania ograniczeń geometrycznych w obu zadaniach wpływa na ostateczny kształt konstrukcji optymalnej i na własności rozwiązania.

2. Siły wewnętrzne

W celu uzyskania wzorów na siły wewnętrzne wykorzystamy symetrię zadania i równania równowagi (rys. 1). Z symetrii wynika, że $V_0 = V_6$ a z równań równowagi sił mamy $V_0 = V_6 = V_3 = P$ oraz $H_0 = H_3 = H_6 = 0$. Wobec powyższego siły normalne i pop-

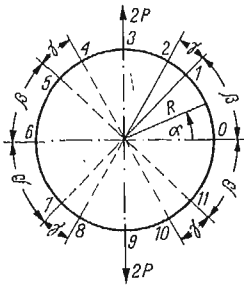
¹⁾ Pracę wykonano w ramach problemu węzłowego 05.12, koordynowanego przez IPPT PAN.

rzeczne można obliczyć korzystając tylko z równań równowagi. Wzór na moment zginający otrzymujemy z równania równowagi momentów (rys. 1d). W wyrażeniu tym występuje moment zginający w punkcie 3, którego wartość uzależniona jest od własności fizycznych materiału i od przekroju pierścienia jako funkcji kąta α . Komplet wzorów na siły wewnętrzne dla $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ przedstawiają równania (2.1):

$$(2.1) \quad \begin{cases} T(\alpha) = P \sin \alpha \\ N(\alpha) = P \cos \alpha \\ M(\alpha) = M_3 + PR \cos \alpha, \end{cases}$$

gdzie T , N i M oznaczają odpowiednio siłę poprzeczną, siłę normalną i moment zginający.

Ponieważ rozważany pierścień jest idealnie sztywno-plastyczny, siły wewnętrzne w obszarach uplastycznionych powiązane są odpowiednią zależnością graniczną. W dalszym ciągu przyjęto, że wpływ sił poprzecznych na uplastycznienie przekroju jest tak mały, że można go pominąć. Odpowiada to przyjęciu hipotezy Bernoulliego. Siła normalna w całym



Rys. 2

pierścieniu jest nieujemna i osiąga wartości równe zero w punktach 3 i 9. Zakładając, że w punktach tych następuje uplastycznienie, siła normalna i moment zginający spełniają warunki:

$$(2.2) \quad \begin{cases} N(\alpha) = P \cos \alpha \\ M(\alpha) = -M_{p3} + PR \cos \alpha, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \Phi(M, N; M_p, N_p) \leq 0.$$

Indeks „p” oznacza graniczne wartości sił wewnętrznych a funkcja Φ przedstawia zależność graniczną. W obrębie kąta γ funkcja $\Phi < 0$, a w pozostałych częściach pierścienia $\Phi = 0$. Założenie powyższe jest naturalnym rozszerzeniem warunku optymalności na konstrukcje, w których wprowadza się więzy geometryczne. W rozważanym zadaniu (rys. 2) zakładamy więc, że w obrębie odcinków 1-2, 4-5, 7-8, 10-11 pierścień jest sztywny a w pozostałych pierścieniach jest uplastyczniony.

W dalszych paragrafach rozważymy szczegółowo przypadki pierścienia o przekroju dwuteowym i przekroju pełnym.

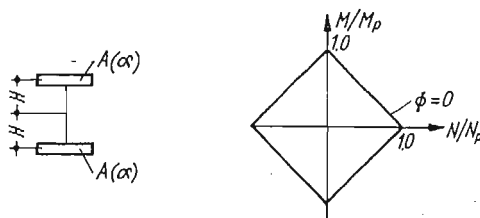
3. Pierścien dwuteowy

Dla idealnego przekroju dwuteowego (sandwiczowego) zależność graniczna (por. rys. 3) składa się z czterech linii prostych opisanych następującym związkiem:

$$(3.1) \quad \Phi = \frac{|M|}{M_p} + \frac{|N|}{N_p} = 1,$$

gdzie

$$(3.2) \quad N_p = 2A\sigma_p, \quad M_p = 2AH\sigma_p.$$



Rys. 3

W równaniach (3.2) σ_p oznacza granicę plastyczności materiału. W uplastycznionych partiach pierścienia wobec zależności (3.1) zachodzą równania:

$$(3.3) \quad M_p(\alpha) = \begin{cases} M(\alpha) + N(\alpha)H, & \text{jeśli } M > 0, N > 0 \\ -M(\alpha) + N(\alpha)H, & \text{jeśli } M < 0, N > 0. \end{cases}$$

Zależność (3.3) wykorzystamy w pierw do wyznaczenia momentów granicznych w punkcie 1 ($M > 0, N > 0$) i w punkcie 2 ($M < 0, N > 0$):

$$(3.4) \quad \begin{cases} M_{p1} = M_p(\beta) = -M_{p3} + PR(1 + \bar{H})\cos\beta, & \bar{H} = H/R \\ M_{p2} = M_p(\beta + \gamma) = M_{p3} - PR(1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma) \end{cases}$$

Momenty graniczne M_{p1} i M_{p2} są sobie równe, gdyż z uwagi na założoną ciągłość funkcji pola przekroju, określają stały przekrój pierścienia w obrębie kąta γ . Wykorzystując ten fakt, z zależności (3.4) obliczamy moment graniczny w punkcie 3, M_{p3} , oraz moment graniczny odpowiadający stałemu przekrojowi pierścienia $M_s = M_{p1} = M_{p2}$:

$$(3.5) \quad M_{p3} = -M_s + PR(1 + \bar{H})\cos\beta = M_s + PR(1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma) = \\ = \frac{1}{2} PR[(1 + \bar{H})\cos\beta + (1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma)].$$

$$(3.6) \quad M_s = \frac{1}{2} PR[(1 + \bar{H})\cos\beta - (1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma)].$$

Funkcję momentów granicznych dla $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ wyznaczono z zależności (3.3) i równań równowagi (2.2). Uwzględniając fakt, że na odcinku 0-1 $M > 0$ i $N > 0$ a na odcinku 2-3 $M < 0$ i $N > 0$ oraz wykorzystując równania (3.5) otrzymujemy:

$$(3.7) \quad M_p(\alpha) = \begin{cases} M_s + PR(1 + \bar{H})(\cos \alpha - \cos \beta), & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ M_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ M_s + PR(1 - \bar{H})[\cos(\beta + \gamma) - \cos \alpha], & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Równania (3.6) i (3.7) stanowią punkt wyjścia w poszukiwaniu rodziny optymalnych projektów pierścienia z różnymi więzami geometrycznymi.

Objętość materiału półek przekroju wynosi:

$$V = 2R \int_0^{2\pi} A(\alpha) d\alpha.$$

Podstawiając w powyższym wzorze według zależności (3.2)₂, że $A(\alpha) = \frac{M_p(\alpha)}{2H\sigma_p}$ otrzymamy

$$(3.8) \quad V = \frac{4R}{H\sigma_p} \int_0^{\pi/2} M_p(\alpha) d\alpha = \frac{4PR^2}{H\sigma_p} \int_0^{\pi/2} a(\alpha) d\alpha = \frac{4PR^2}{H\sigma_p} v,$$

gdzie $a(\alpha) = \frac{M_p(\alpha)}{PR} = \frac{2H\sigma_p}{PR} A(\alpha)$ oznacza bezwymiarowe pole przekroju półki a v bezwymiarową objętość ćwiartki pierścienia.

W przypadku, gdy więzem geometrycznym jest kąt γ , bezwymiarowe pole przekroju półki $a(\alpha)$ wyznacza się z równań (3.7), podstawiając w nich w miejsce M_s zależność (3.6):

$$(3.9) \quad a(\alpha) = \begin{cases} (1 + \bar{H}) \cos \alpha - \frac{1}{2} [(1 + \bar{H}) \cos \beta + (1 - \bar{H}) \cos(\beta + \gamma)], & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ \frac{1}{2} [(1 + \bar{H}) \cos \beta - (1 - \bar{H}) \cos(\beta + \gamma)] = a_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ -(1 - \bar{H}) \cos \alpha + \frac{1}{2} [(1 + \bar{H}) \cos \beta + (1 - \bar{H}) \cos(\beta + \gamma)], & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bezwymiarową objętość v występującą w zależności (3.8) otrzymano całkując pole przekroju $a(\alpha)$ określone wzorami (3.9):

$$(3.10) \quad v(\beta, \gamma) = \int_0^{\pi/4} a(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha = (1 + \bar{H}) \left[\sin \beta + \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) \cos \beta \right] + \\ + (1 - \bar{H}) \left[-1 + \sin(\beta + \gamma) + \left(\frac{\pi}{4} - \beta - \gamma \right) \cos(\beta + \gamma) \right].$$

Problem optymalizacji można sformułować dwojako:

— Zadanie pierwotne:

Dane jest obciążenie graniczne $2P$, znaleźć taki rozkład materiału, by objętość V osiągała wartość minimalną.

— Zadanie dualne:

Dana jest objętość materiału V , znaleźć taki rozkład materiału, by obciążenie graniczne $2P$ osiągało wartość maksymalną.

Omówimy obecnie rozwiązanie zadania pierwotnego. Minimum funkcji $v(\beta, \gamma)$ bez więzów nałożonych na kąt γ jest minimum globalnym. Minimum to uzyskano dla wartości β_0 i γ_0 obliczonych z warunków znikania pierwszych pochodnych funkcji $v(\beta, \gamma)$ względem γ i β :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \gamma} = (1 - \bar{H}) \left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{4} \right) \sin(\beta + \gamma) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} = (1 + \bar{H}) \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \sin \beta + (1 - \bar{H}) \left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{4} \right) \sin(\beta + \gamma) = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego z równań (3.11) otrzymujemy, że

$$(3.12) \quad \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad \beta + \gamma = 0.$$

Wstawiając (3.12)₁ do (3.11)₂ lub (3.12)₂ do (3.11)₂ dostajemy

$$(3.13) \quad \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad \beta = 0.$$

Pierwsza pochodna funkcji v jest więc równa zero dla dwóch par wartości kątów β i γ :

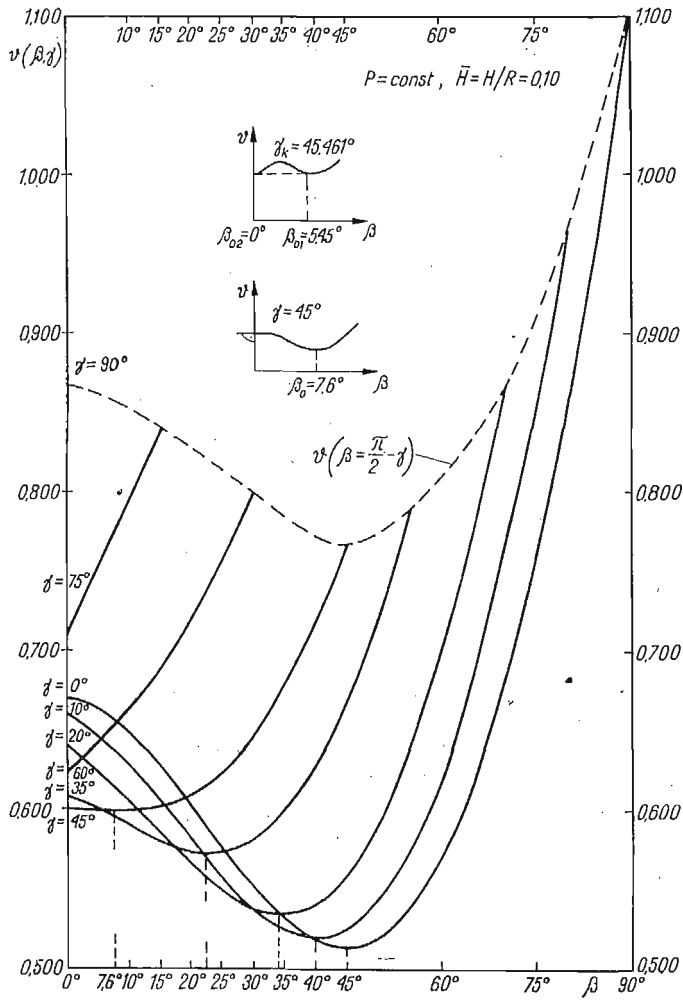
$$(3.14) \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = 0 \quad \text{oraz} \quad \beta = 0, \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Jeżeli podstawimy, że $\frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} = s$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \gamma \partial \beta} = q$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = r$, to o wyborze punktu, w którym funkcja dwóch zmiennych osiąga ekstremum decyduje wyrażenie $\Delta = sr - q^2$ (por. [3] str 412). Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja $v(\beta, \gamma)$ w punkcie (β_0, γ_0) ma maksimum, gdy $s < 0$ a minimum, gdy $s > 0$. Jeżeli $\Delta < 0$, to $v(\beta, \gamma)$ nie ma ani maksimum ani minimum. W rozważanym przypadku mamy:

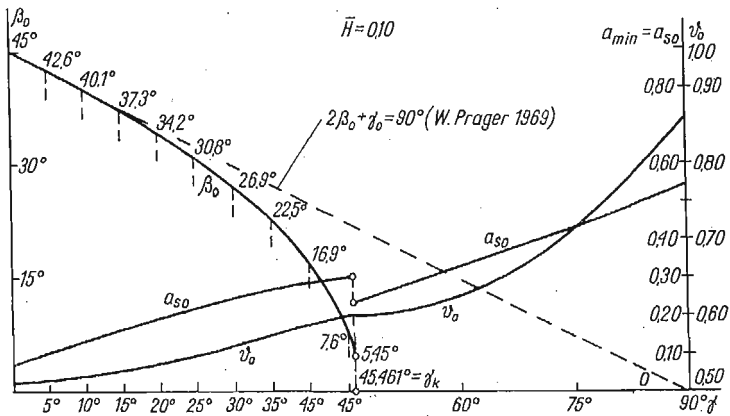
$$(3.15) \quad \begin{cases} s = \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} = (1 - \bar{H}) \left[\sin(\beta + \gamma) + \left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{4} \right) \cos(\beta + \gamma) \right] \\ q = \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma \partial \beta} = s \\ r = \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = (1 + \bar{H}) \left[\sin \beta + \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \cos \beta \right] + q \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że tylko dla $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$ i $\gamma_0 = 0$ są spełnione warunki minimum funkcji $v(\beta, \gamma)$. Identyczny wynik uzyskał W. Prager [1].

Poszukiwanie projektów optymalnych przy więzach nałożonych na kąt γ jest o wiele bardziej pracochłonne. Punkty odpowiadające optymalnym wartościom kąta β dla ustalonych wartości kąta γ otrzymano stosując metodę przekrojów. Wyniki obliczeń ilustrują rysunki 4 - 7. Obliczenia numeryczne wykonano dla stosunku wysokości przekroju do średnicy pierścienia wynoszącego $H/R = 0,10$. Interesujące jest, że dla $\gamma = \gamma_k = 45,461^\circ$ otrzymano dwa równoważnościowe rozwiązania optymalne, a mianowicie dla $\beta_{01} = 5,45^\circ$ i dla $\beta_{02} = 0^\circ$. (por. rys. 4.5). Na rysunku 6 przedstawiono zależność pola przekroju półki od kąta α dla tych rozwiązań. Dla kątów $\gamma > \gamma_k$ optymalne projekty odpowiadają stałej wartości kąta $\beta_0 = 0$.

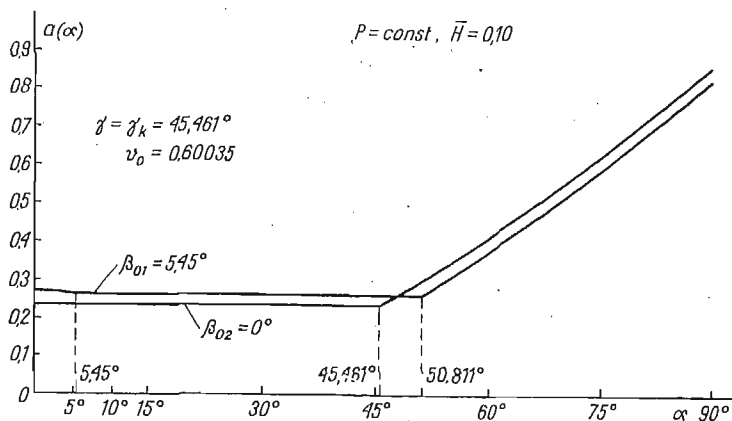


Rys. 4

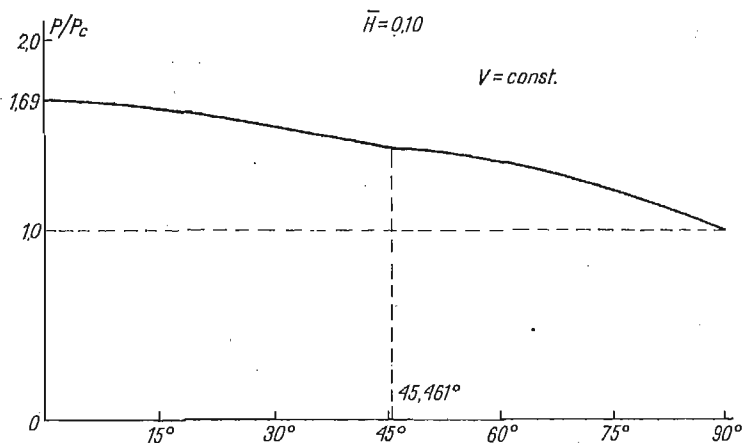


Rys. 5

Ilustracją wyników zadania dualnego, to jest zadania maksymalizacji obciążenia granicznego przy stałej objętości materiału pólek, jest rysunek 7. Przedstawia on zależność obciążenia granicznego dla rozwiązań optymalnych od wartości kąta γ . Siła P_c zaznaczona na rys. 7 odpowiada obciążeniu granicznemu pierścienia o stałym przekroju, którego objętość jest taka sama jak objętość pierścieni optymalnych.



Rys. 6



Rys. 7

Powróćmy jeszcze do zadania sformułowanego przez W. Pragera. Zadanie to polega na znalezieniu optymalnych kątów β_0 i γ_0 minimalizujących objętość w zadaniu pierwotnym lub maksymalizujących obciążenie graniczne w zadaniu dualnym, przy czym moment graniczny w obrębie całego pierścienia nie powinien być mniejszy od danej z góry wartości M_s . Omówimy bliżej zadanie pierwotne stosując nadal podejście statyczne. Wyjściowe równania (3.7) i (3.6) zapiszemy wprawdzie w postaci bezwymiarowej.

$$(3.16) \quad a(\alpha) = \begin{cases} m_s + (1 + \bar{H})(\cos \alpha - \cos \beta), & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ m_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ m_s + (1 - \bar{H})[\cos(\beta + \gamma) - \cos \alpha], & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

gdzie $m_s = M_s/PR$.

Równanie (3.6) pełniące obecnie rolę równania więzów ma postać:

$$(3.17) \quad g(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} [(1 + \bar{H})\cos \beta - (1 - \bar{H})\cos(\beta + \gamma)] - m_s = 0.$$

Poszukiwanie minimum bezwymiarowej objętości v przy więzach (3.17) sprowadza się do badania funkcjonału pomocniczego v' :

$$(3.18) \quad v'(\beta, \gamma) = \int_0^{\pi/2} a(\alpha) d\alpha + \lambda g(\beta, \gamma),$$

gdzie λ jest mnożnikiem Lagrange'a przyjmującym pewną wartość stałą.

Podstawiając równania (3.17) i (3.16) do równania (3.18) i wykonując przepisane całkowanie otrzymujemy:

$$v'(\beta, \gamma) = \frac{\pi}{2} m_s + (1 + \bar{H})(\sin \beta - \beta \cos \beta) + (1 - \bar{H}) \left(\frac{\pi}{2} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon - 1 \right) + \\ + \lambda \left\{ \frac{1}{2} [(1 + \bar{H})\cos \beta - (1 - \bar{H})\cos \varepsilon] - m_s \right\},$$

gdzie $\varepsilon = \beta + \gamma$.

Wariacja v' względem β i ε prowadzi do równania:

$$(3.19) \quad \delta v' = (1 + \bar{H}) \left(\beta - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \beta \delta \beta - (1 - \bar{H}) \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \varepsilon \delta \varepsilon = 0.$$

Z zależności (3.19) wynikają równania Eulera:

$$\left(\beta_0 - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \beta_0 = 0 \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0 - \frac{1}{2} \lambda \right) \sin \varepsilon_0 = 0,$$

skąd dla kątów zawartych w przedziale $< 0, \frac{\pi}{2} >$ dostajemy

$$(3.20) \quad \begin{cases} \beta_0 = 0 & \text{lub} & \beta_0 = \frac{1}{2} \lambda \\ \varepsilon_0 = 0 & \text{lub} & \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lambda. \end{cases}$$

Badając wszystkie kombinacje β_0 i ε_0 okazuje się, że tylko jedna spełnia warunki zadania, a mianowicie $\beta_0 = \frac{1}{2} \lambda$ i $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lambda$. Ponieważ $\varepsilon_0 = \beta_0 + \gamma_0$, rozwiązanie optymalne

charakteryzuje warunek:

$$(3.21) \quad 2\beta_0 + \gamma_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Warunek ten uzyskał również W. Prager na innej drodze [1]. Prostą (3.21) zaznaczono na rys. 5 linią przerywaną.

Tablica 1

$\gamma \geq \gamma_{\min}$	$M_p \geq M_s$
1. $\gamma = 19,88^\circ$ $\beta_0 = 34,17^\circ$ $v_0 = 0,534962$ $m_{s0} = 0,190871$	2. $\gamma_0 = 19,88^\circ$ $\beta_0 = 35,06^\circ$ $v_0 = 0,535090$ $m_s = 0,191634$
3. $\gamma = 60^\circ$ $\beta_0 = 0^\circ$ $v_0 = 0,62555$ $m_{s0} = 0,32500$	4. $\gamma_0 = 43^\circ$ $\beta_0 = 23,5^\circ$ $v_0 = 0,60785$ $m_s = 0,32500$

Jak widać oba rozważane zadania: przy nałożeniu więzów na kąt γ oraz więzów na minimalny przekrój pierścienia prowadzą do różnych optymalnych kątów β_0 , określających usytuowanie odcinka sztywnego o stałym przekroju. Dodać należy, że rozwiązania optymalne obu zadań przy założeniu tej samej nośności granicznej pierścienia wykazują niewielkie różnice w objętości materiału a niejednokrotnie bardzo duże różnice, jeżeli chodzi o konfigurację przekroju na obwodzie pierścienia. W Tablicy 1 podano wartości liczbowe charakteryzujące cztery rozwiązania optymalne zadania pierwotnego dla obu postaci formułowania więzów geometrycznych. Warto zwrócić uwagę na to, że w obu zadaniach objętość jest monotoniczną funkcją wartości ograniczeń (γ , m_s). Oznacza to, że optimum wypada na brzegu obszaru dopuszczalnego wyznaczonego nałożonymi więzami geometrycznymi.

4. Pierścień o przekroju prostokątnym

Przedstawimy tutaj jedynie zasadnicze wyniki charakteryzujące rozwiązania optymalne przy więzach nałożonych na kąt γ . Dla przekroju prostokątnego zależność graniczna składa się z dwóch gałęzi paraboli II stopnia (rys. 8):

$$(4.1) \quad \Phi = \frac{|M|}{M_p} + \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 - 1 = 0.$$

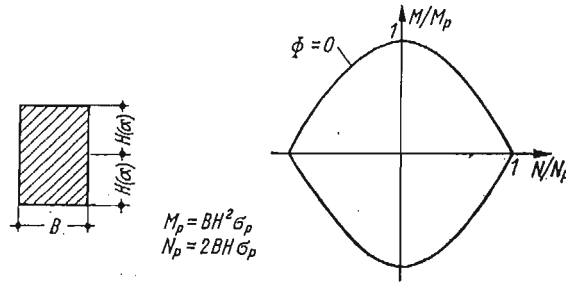
Wzory na funkcję zmiany przekroju i objętość pierścienia uzyskano w analogiczny sposób jak dla pierścienia o przekroju sandwiczowym. Istotną różnicą polega na tym, że zależność między objętością a obciążeniem granicznym jest teraz nieliniowa.

Przyjmując, że szerokość przekroju B jest stała, funkcję wysokości przekroju obliczono za pomocą następującego wzoru:

$$(4.2) \quad h(\alpha) = \begin{cases} \left\{ \cos^2 \alpha + \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2}, & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ \left\{ \cos^2 \beta + \frac{1}{p} [\cos \beta - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2} = h_s, & \beta \leq \alpha \leq \beta + \gamma \\ \left\{ \cos^2 \alpha - \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2}, & \beta + \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{gdzie} \quad C(p, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} p [\cos \beta + \cos(\beta + \gamma)] \left[\cos \beta - \cos(\beta + \gamma) + \frac{1}{p} \right]$$

$$p = P/(4BR\sigma_p), \quad h(\alpha) = H(\alpha)/(2pR).$$



Rys. 8

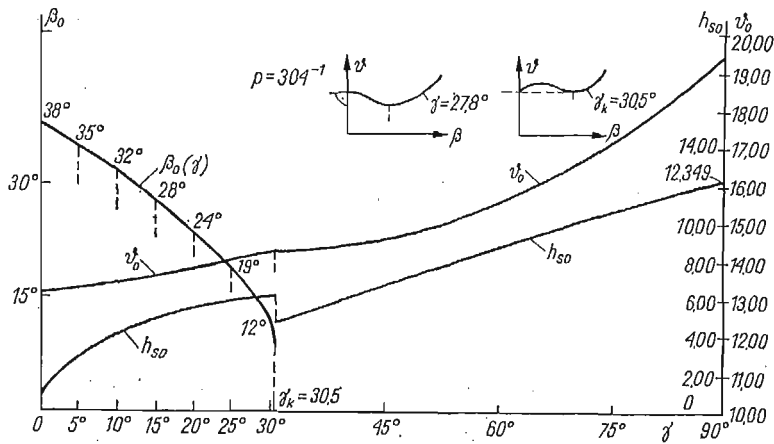
Objętość pierścienia obliczono z zależności

$$(4.3) \quad V(p, \beta, \gamma) = 2BR \int_0^{\pi/2} H(\alpha) d\alpha = 16BR^2 p v(p, \beta, \gamma),$$

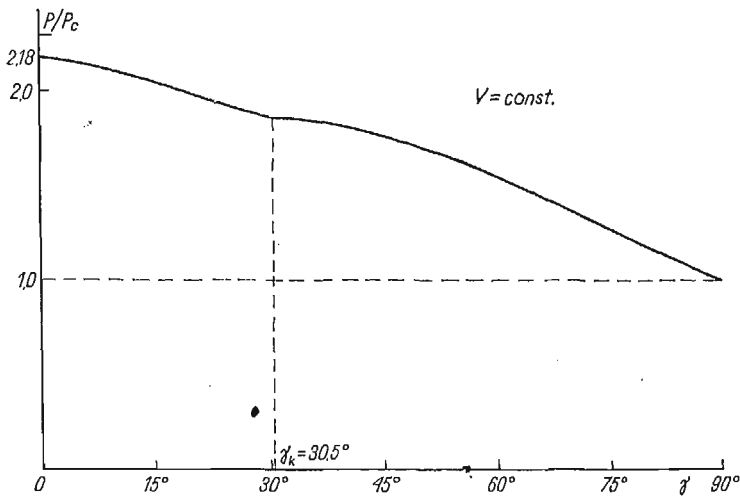
$$(4.4) \quad v(p, \beta, \gamma) = \int_0^{\beta} \left\{ \cos^2 \alpha + \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2} d\alpha +$$

$$+ h_s(p, \beta, \gamma) \gamma + \int_{\beta+\gamma}^{\pi/2} \left\{ \cos^2 \alpha - \frac{1}{p} [\cos \alpha - C(p, \beta, \gamma)] \right\}^{1/2} d\alpha.$$

Całki eliptyczne występujące we wzorze (4.4) utrudniają w istotny sposób analizę funkcji $v(p, \beta, \gamma)$. Obliczenia numeryczne, których zasadnicze wyniki przedstawiono na rysunkach 9 i 10, przeprowadzono dla $p = 1/304$ w zadaniu pierwotnym oraz dla objętości pierścienia o stałej wysokości przenoszącego obciążenie graniczne $p = 1/662 \cdot 6$ w zadaniu dualnym. Z zamieszczonych rysunków widać, że rozwiązanie optymalne pierścienia o przekroju prostokątnym nie zawiera istotnych różnic jakościowych, jeżeli chodzi o przebieg i charakter wykresów, w porównaniu z pierścieniem sandwiczowym. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że minimum globalne dla $\gamma = 0$ odpowiada kątowi $\beta_0 = 38^\circ$ wobec 45° w pierścieniu sandwiczowym.



Rys. 9



Rys. 10

5. Uwagi końcowe

Przytoczone przykłady optymalizacji z więzami geometrycznymi uwiadcniają, jak silny jest wpływ sposobu formułowania ograniczeń na ostateczny kształt konstrukcji optymalnych. Drogą różnorodnego formułowania więzów można na przykład uzyskać projekty o praktycznie takim samym koszcie (np. objętości materiału) i identycznym efekcie globalnym optymalizacji (np. nośności granicznej) przy różniącej się zasadniczo konfiguracji rozkładu materiału w obrębie konstrukcji (por. np. projekty 3 i 4 zestawione w Tabelcy 1). Okoliczność ta pozwala dokonywać dodatkowego wyboru spośród równoważnościowych projektów tego rozwiązania, za którym przemawiają względy praktyczne (np. prostsza technologia) lub inne cechy konstrukcji (np. zachowanie się konstrukcji w obszarze dużych przemieszczeń).

Wydaje się, że niniejsza praca jest dobrą ilustracją skutków pozornie nieistotnej zmiany w sformułowaniu ograniczeń. Wyniki zamieszczone w pracy zwracają uwagę na rozległość tematyki optymalnego projektowania konstrukcji w przypadkach wprowadzania dodatkowych więzów.

Optymalizacja pierścienia przy ograniczeniu kąta γ prowadzi do zadania niewypukłego, wielomodalnego. Odnotowano nawet przypadki zadań dających dwa równoważnościowe rozwiązania optymalne.

Literatura

- 1 W. PRAGER, *Optimal plastic design of rings*, Contributions to Mechanics, Pergamon Press, 1969, 163-169.
- 2 P. V. MARCAL, W. PRAGER, *A method of optimal plastic design*, Journal de Mécanique, 3, 4, 1964, 509 - 530.
- 3 I. N. BRONSZTEJN, K. A. SIEMIENDIAJEW, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1968.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ КОЛЕЦ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В работе представлено оптимальное проектирование пластических колец предполагая, что в области данного угла размеры поперечного сечения постоянные. Решения примальной и дуальной задачи для колец имеющих двухтавровое и прямоугольное сечения получено применяя статический метод. Результаты настоящей работы сравнено с решением полученным В. Прагером [1], где ограничено минимальное сечение кольца. Примеры представлены в работе доказуют, что способ формулирования ограничений сильно влияет на форму оптимальной конструкции и на однозначность решения.

Summary

OPTIMAL PLASTIC DESIGN OF RINGS WITH GEOMETRIC CONSTRAINTS

The static approach to optimal plastic design of circular rings with geometric constraints is described in the paper. These constraints consist in an assumption that the cross-section area within the region of a given angle is constant. Solutions of primal and dual problems for rings of sandwich and rectangular cross-section are presented. Final results are compared with the solution obtained by W. Prager [1] where the minimum cross-section constraint had been imposed. Numerical examples show that the form of constraint conditions strongly affect the form of optimal structure and uniqueness of solution.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1978 r.