

NIEUSTALONE, KOŁOWO-NIESYMETRYCZNE POLE TEMPERATURY  
W WYDRAŻONYM WALCU OGRZEWANYM NA ZEWNĘTRZNEJ POBOCZNICY

JAN TALER (KRAKÓW)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $A, B, C$  — stałe  
 $a$  — promień wewnętrzny walca
- $B_i = \frac{\alpha a}{\lambda}$  — liczba Biota  
 $b$  — promień zewnętrzny walca  
 $c$  — ciepło właściwe
- $F_o = \frac{\kappa \cdot \tau}{a^2}$  — liczba Fouriera  
 $I_n(z)$  — zmodyfikowana funkcja Bessela I-go rodzaju, n-tego rzędu  
 $J_n(x)$  — funkcja Bessela I-go rodzaju, n-tego rzędu  
 $K_n(z)$  — zmodyfikowana funkcja Bessela II-go rodzaju n-tego rzędu  
 $q'(\varphi, \tau)$  — strumień cieplny na zewnętrznej poboczniczy walca  
 $q_m = q(\varphi = 0)$  — maksymalny strumień cieplny  
 $r$  — promień
- $t = \Theta - \Theta_0$  —  
 $Y_n(x)$  — funkcje Bessela II-go rodzaju, n-tego rzędu  
 $\alpha$  — współczynnik wnikania ciepła od wewnętrznej powierzchni walca do nośnika ciepła  
 $\gamma_{n,m}$  — pierwiastki równania charakterystycznego  
 $\Theta$  — temperatura  
 $\Theta_0$  — temperatura nośnika ciepła i początkowa walca
- $\kappa = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$  — współczynnik przewodzenia temperatury  
 $\rho$  — gęstość  
 $\tau$  — czas  
 $\varphi$  — kąt
- $\omega_0 = \frac{b}{a}$  — stosunek promienia zewnętrznego walca do wewnętrznego

1. Wstęp

W wielu elementach maszyn i urządzeń zachodzi konieczność określenia nieustalonego pola temperatury wywołanego nagłym ich ogrzaniem.

Zagadnienie, stanowiące przedmiot niniejszej pracy występuje przy analizie warunków pracy rur ekranowych kotłów konwertorowych [1] a także przy ogrzewaniu rurociągów służących do przesyłania lepkich produktów przeróbki ropy naftowej i węgla [2, 3]. W wy-

mienionych wyżej przypadkach należy określić nieustalone pole temperatury w nieskończenie długiej rurze grubościennej ogrzanej nagle na zewnętrznej powierzchni zmiennym w czasie, kołowo-niesymetrycznym strumieniem cieplnym i chłodzonej konwekcyjnie na wewnętrznej powierzchni.

## 2. Określenie pola temperatury

Rozkład temperatury w poprzecznym przekroju wydrążonego walca wyznaczony zostanie przy następujących założeniach:

1. Własności cieplne materiału walca są stałe i niezależne od temperatury;
  2. Strumień cieplny na zewnętrznej powierzchni walca jest stały wzdłuż jego osi;
  3. Współczynnik wnikania ciepła od wewnętrznej powierzchni walca do nośnika ciepła jest niezależny od czasu i temperatury;
  4. Temperatura nośnika ciepła  $\Theta_c$  i początkowa walca  $\Theta_p$  są sobie równe i wynoszą  $\Theta_0$ .
- Przy powyższych założeniach pole temperatury określone jest równaniem przewodzenia ciepła

$$(2.1) \quad \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = \kappa \left[ \frac{\partial^2 t(r, \varphi, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \right],$$

warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \lambda \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=b} = f(\tau) q(\varphi), \quad t > 0,$$

$$(2.3) \quad \lambda \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \alpha \cdot t(r, \varphi, \tau) \Big|_{r=a}, \quad t \geq 0$$

i warunkiem początkowym

$$(2.4) \quad t(r, \varphi, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia przeprowadzone zostanie w dwóch etapach. Niżej zostanie określone pole temperatury przy skokowym wzroście strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni rury, tzn., że  $f(\tau) = 1$  dla  $t > 0$  i warunek brzegowy (2.2) przyjmuje postać

$$(2.5) \quad \lambda \frac{\partial t(r, \varphi, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=b} = q(\varphi) \quad t > 0,$$

gdzie

$$(2.6) \quad q(\varphi) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos n\varphi.$$

W następnym punkcie uwzględniona zostanie zależność strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni walca od czasu za pomocą całki DUHAMELA [4].

Najpierw określone zostanie pole temperatury przy skokowym wzroście strumienia cieplnego.

Stosując do równania (2.1) i warunków brzegowych (2.5) i (2.3) przekształcenie Laplace'a i uwzględniając warunek początkowy (2.4) otrzymuje się

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{p}{\varkappa} T,$$

$$(2.8) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = \frac{q_0}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{p} \cos n\varphi,$$

$$(2.9) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} = \alpha \cdot T|_{r=a},$$

gdzie

$$(2.10) \quad T(r, \varphi, p) = \int_0^{\infty} t(r, \varphi, \tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Równanie (2.7) stanowi równanie Helmholtza, które łatwo można rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych. Zakładając rozwiązanie w postaci

$$(2.11) \quad T = T_1(r) T_2(\varphi)$$

i podstawiając je do (2.7) otrzymuje się

$$(2.12) \quad \frac{r^2}{T_1} \cdot \frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{r}{T_1} \frac{dT_1}{dr} - k^2 r^2 = -\frac{1}{T_2} \frac{d^2 T_2}{d\varphi^2} = \mu^2.$$

Z (2.12) otrzymuje się 2 równania różniczkowe

$$(2.13) \quad \frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} - \left( k^2 + \frac{\mu^2}{r^2} \right) T_1 = 0,$$

gdzie

$$(2.14) \quad k^2 = \frac{p}{\varkappa},$$

oraz

$$(2.15) \quad \frac{d^2 T_2}{d\varphi^2} + \mu^2 T_2 = 0.$$

Rozwiązaniem (2.13) jest

$$(2.16) \quad T_1 = A'_\mu I_\mu(kr) + B'_\mu K_\mu(kr),$$

a równania (2.15)

$$(2.17) \quad T_2 = C_\mu \sin(\mu\varphi) + D_\mu \cos(\mu\varphi).$$

Z uwagi na warunek brzegowy (2.5) a także na fakt, że temperatura  $T$  powinna być jednoznaczna funkcją kąta  $\varphi$  rozwiązanie (2.11) powinno być funkcją okresową o okresie  $2\pi$  a zatem  $\mu$  powinno być liczbą całkowitą.

Poza tym z warunku (2.8) wynika, że  $C_\mu = 0$ .

Wprowadzając oznaczenia  $A'_\mu \cdot D_\mu = A_\mu$  i  $B'_\mu \cdot D_\mu = B_\mu$  rozkład temperatury wyraża się zależnością

$$(2.18) \quad T_n = [A_n I_n(kr) + B_n K_n(kr)] \cos n\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Postępując podobnie jak w powyższym przypadku, dla  $n = 0$  pole temperatury określa zależność

$$(2.19) \quad T_0 = (C_0 + D_0 \cdot \varphi) [A'_0 I_0(kr) + B'_0 K_0(kr)]$$

Ze względu na symetrię strumienia  $q'(\varphi, \tau)$ , tj.  $q'(-\varphi, \tau) = q'(\varphi, \tau)$ ,  $D_0 = 0$ . Oznaczając  $C_0 \cdot A'_0 = A_0$  i  $C_0 B'_0 = B_0$ ,  $T_0$  wynosi

$$(2.20) \quad T_0 = A_0 I_0(kr) + B_0 K_0(kr).$$

Ostatecznie pole temperatury w dziedzinie obrazu w wydrążonym walcu określa zależność

$$(2.21) \quad T = A_0 I_0(kr) + B_0 K_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_n(kr) + B_n K_n(kr)] \cos(n\varphi)$$

oraz warunki brzegowe (2.8) i (2.9), które zapisane zostaną w nieco innej postaci dla  $n = 0$

$$(2.22) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_0(r, p)}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{q_0}{p},$$

$$(2.23) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_0(r, p)}{\partial r} \right|_{r=a} = \alpha T_0(a, p),$$

oraz dla  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(2.24) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_n(r, \varphi, p)}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{1}{p} q_n \cos n\varphi,$$

$$(2.25) \quad \lambda \left. \frac{\partial T_n(r, \varphi, p)}{\partial r} \right|_{r=a} = \alpha T_n(a, \varphi, p),$$

Stałe  $A_0$  i  $B_0$  wyznaczone z warunków (2.22) i (2.23) po podstawieniu do nich (2.20) wynoszą

$$(2.26) \quad A_0 = \frac{q_0}{\lambda \cdot p} \frac{kK_1(ka) + \frac{\alpha}{\lambda} K_0(ka)}{k\psi_0(k)}$$

$$(2.27) \quad B_0 = \frac{q_0}{\lambda \cdot p} \frac{kI_1(ka) - \frac{\alpha}{\lambda} I_0(ka)}{k\psi_0(k)}$$

Stałe  $A_0$  i  $B_0$  zostały wyznaczone z wykorzystaniem związków [5]

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial I_0(kr)}{\partial r} &= kI_1(kr), \\ \frac{\partial K_0(kr)}{\partial r} &= -kK_1(kr), \end{aligned}$$

W wyrażeniach (2.26) i (2.27)  $\psi_0(k)$  oznacza

$$(2.29) \quad \psi_0(k) = \frac{\alpha}{\lambda} [K_0(ka)I_1(kb) + K_1(kb)I_0(ka)] + k[K_1(ka)I_1(kb) - K_1(kb)I_1(ka)].$$

Stałe  $A_n$  i  $B_n$  wyznaczone przez podstawienie (2.18) do (2.24) i (2.25) określone są wyrażeniami

$$(2.30) \quad A_n = \frac{q_n}{\lambda \cdot p} \frac{\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + kK_{n-1}(ka)}{\psi_n(k)},$$

$$(2.31) \quad B_n = \frac{q_n}{\lambda \cdot p} \frac{-\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + kI_{n-1}(ka)}{\psi_n(k)},$$

gdzie

$$(2.32) \quad \psi_n(k) = \left[ \frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + kK_{n-1}(ka) \right] \left[ -\frac{n}{b} I_n(kb) + kI_{n-1}(kb) \right] + \\ + \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + kI_{n-1}(ka) \right] \left[ -\frac{n}{b} K_n(kb) - kK_{n-1}(kb) \right].$$

Przy określaniu (2.30) i (2.31) wykorzystane zostały związki [5]

$$(2.33) \quad \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} = -\frac{n}{r} I_n(kr) + kI_{n-1}(kr), \\ \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} = -\frac{n}{r} K_n(kr) - kK_{n-1}(kr).$$

Pole temperatury w ścianie walca określone zostanie za pomocą odwrotnego przekształcenia Laplace'a

$$(2.34) \quad t(r, \varphi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{p\tau} T(r, \varphi, p) dp.$$

Transformata  $T(r, \varphi, p)$  określona wzorem (2.21) jest jednoznaczną funkcją  $p$  tzn.  $T\left(r, \varphi - \sqrt{\frac{p}{\kappa}}\right) = T\left(r, \varphi, \sqrt{\frac{p}{\kappa}}\right)$  oraz stanowi iloraz dwóch uogólnionych wielomianów względem  $p$ , przy czym stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika (Dodatek A). Spełnione są więc warunki zastosowania reguły Heaviside'a [6] (Waszczenki-Zacharczenki [4]) przy wykorzystaniu odwrotnej transformacji Laplace'a. Najpierw określone zostaną bieguny transformaty  $T(r, \varphi, p)$  tj. bieguny (2.21).

Z analizy (2.21) widać, że pojedynczy biegun istnieje w  $p = 0$  oraz wielokrotne bieguny równe pierwiastkom równań charakterystycznych:

$$(2.35) \quad \psi_0(k) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0$$

$$(2.36) \quad \psi_n(k) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dla wyrażenia (2.35) i (2.36) w funkcjach Bessela od argumentu rzeczywistego wprowadzone zostanie podstawienie

$$(2.37) \quad k_{n,m}a = i\gamma_{n,m} = \sqrt{\frac{p_{n,m}}{\alpha}} a,$$

stąd

$$(2.38) \quad k_{n,m} = \frac{i\gamma_{n,m}}{a}, \quad \text{zatem} \quad k_{n,m}b = i\gamma_{n,m}\omega_0.$$

Podstawiając (2.37) i (2.78) do (2.29) otrzymuje się dla  $n = 0$

$$(2.39) \quad \frac{\alpha}{\lambda} [K_0(i\gamma_{0,m})I_1(i\omega_0\gamma_{0,m}) + K_1(i\omega_0\gamma_{0,m})I_0(i\gamma_{0,m})] + \\ + \frac{i\gamma_{0,m}}{a} [I_1(i\omega_0\gamma_{0,m})K_1(i\gamma_{0,m}) - K_1(i\omega_0\gamma_{0,m})I_1(i\gamma_{0,m})],$$

które po przekształceniach można zapisać w postaci

$$(2.40) \quad Bi[J_0(\gamma_{0,m})Y_1(\omega_0\gamma_{0,m}) - J_1(\omega_0\gamma_{0,m})Y_0(\gamma_{0,m})] + \\ + \gamma_{0,m}[J_1(\gamma_{0,m})Y_1(\omega_0\gamma_{0,m}) - J_1(\omega_0\gamma_{0,m})Y_1(\gamma_{0,m})] = 0,$$

gdzie

$$Bi = \frac{\alpha a}{\lambda}.$$

Następnie rozważone zostanie równanie charakterystyczne (2.36). Podstawiając (2.37) i (2.38) do (2.36) otrzymuje się

$$(2.41) \quad \psi(p) = [BiK_n(i\gamma_{n,m}) + nK_n(i\gamma_{n,m}) + i\gamma_{n,m}K_{n-1}(i\gamma_{n,m})] \left[ -\frac{n}{b} I_n(i\omega_0\gamma_{n,m}) + \right. \\ \left. + kI_{n-1}(i\omega_0\gamma_{n,m}) \right] + [-BiI_n(i\gamma_{n,m}) - nI_n(i\gamma_{n,m}) + \\ + i\gamma_{n,m}I_{n-1}(i\gamma_{n,m})] \left[ -\frac{n}{b} K_n(i\omega_0\gamma_{n,m}) - kK_{n-1}(i\omega_0\gamma_{n,m}) \right] = 0.$$

Przekształcając równanie (2.41) otrzymuje się równanie charakterystyczne wyrażone w funkcjach Bessela od argumentu rzeczywistego

$$(2.42) \quad [-BiY_n(\gamma_{n,m}) - nY_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}Y_{n-1}(\gamma_{n,m})] [-nJ_n(\omega_0\gamma_{n,m}) + \\ + \omega_0\gamma_{n,m}J_{n-1}(\omega_0\gamma_{n,m})] + [-BiJ_n(\gamma_{n,m}) - nJ_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}J_{n-1}(\gamma_{n,m})] [nY_n(\omega_0\gamma_{n,m}) - \\ - \omega_0\gamma_{n,m}Y_{n-1}(\omega_0\gamma_{n,m})] = 0.$$

Wyznaczanie pierwiastków równań charakterystycznych (2.40) i (2.42), które są równaniami przestępnymi jest dosyć kłopotliwe. Z tego też powodu brak jest dostatecznie obszernej tablic tych pierwiastków. Wartości pierwszych dziesięciu pierwiastków równania (2.40), dla  $\omega_0 = 1,1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$  i  $2,0$  oraz  $Bi = 5, 10, 20, 40, 60$  i  $80$  podano w pracy

[7]. Jest to jedno z najbardziej obszernych, w dotychczasowej literaturze zestawień pierwiastków równania (2.40). W pracy [8] obliczono dwa pierwsze pierwiastki dla  $\omega_0 = 1,25$  i  $1,5$  oraz  $Bi = 0,5; 1; 3; 5; 7; 10$  a w pracy [9] również dwa pierwsze pierwiastki dla  $\omega_0 = 1,5; 1,7; 2,0; 2,5; i 3,0$  oraz  $Bi = 0,2; 0,5; 1; 2; 3; 4$  i  $5$ .

Kilka wartości pierwiastków omawianego równania przytoczono również w [10].

Pierwsze 10 pierwiastków równania (2.42) dla  $n = 1$  i  $\omega_0 = \frac{5}{3}$  i  $\omega_0 = 1,6$  oraz  $Bi = 3; 5; 10$  i 20 obliczono w pracy [1]. Bieguny transformaty (2.21) leżą na osi rzeczywistej, niedodatniej płaszczyzny zespolonej  $p$ , gdyż  $p = 0$  i  $p_{n,m} = -\frac{\kappa\gamma_{n,m}^2}{a^2}$

Jak już było powiedziane, odwrotne przekształcenie Laplace'a wykonane zostanie wg wzorów podanych przez Heaviside'a [6]. Ponieważ  $p = 0$  stanowi biegun pojedynczy a  $p_{n,m}$  pojedyncze bieguny wielokrotne, więc  $t(r, \varphi, \tau)$  określona jest wyrażeniem

$$(2.43) \quad t(r, \varphi, \tau) = \frac{\kappa\Phi_0(0)}{[k^3\psi_0(0)]'} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_n(0)}{[k^2\psi_n(0)]'} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_0(p_{0,m})}{[k^3\psi_0(p_{0,m})]'} e^{p_{0,m}\tau} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_n(p_{n,m})}{[k^2\psi_n(p_{n,m})]'} e^{p_{n,m}\tau}.$$

Wyrażenia  $\Phi_0, \Phi_n$  i  $\psi_0$  i  $\psi_n$  określone są w dodatkach i wynikają z zapisu transformaty (2.21) w postaci

$$(2.44) \quad T = \frac{\kappa\Phi_0(k)}{k^3\psi_0(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa\Phi_n(k)}{k^2\psi_n(k)}.$$

Pole temperatury w walcu, wyznaczone wg (2.43), po wykonaniu odpowiednich przekształceń (Dodatek B) określone jest wyrażeniem

$$(2.45) \quad t(r, \varphi, \tau) = \frac{q_0 b}{\lambda} \left( \frac{1}{Bi} + \ln \frac{r}{a} \right) + \\ + \frac{\pi q_0 a}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_0(\gamma_{0,m}) J_0 \left( \frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right) - L_0(\gamma_{0,m}) Y_0 \left( \frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right)}{\gamma_{0,m} \left[ \frac{L_0(\gamma_{0,m})}{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})} - (Bi^2 + \gamma_{0,m}^2) \frac{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})}{L_0(\gamma_{0,m})} \right]} e^{-\gamma_{0,m}^2 F_0 \tau} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi + n)}{Bi(\omega_0^{2n} + 1) + n(\omega_0^{2n} - 1)} \left( \frac{r}{a} \right)^n - \frac{\frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi - n)}{Bi(\omega_0^{2n} + 1) + n(\omega_0^{2n} - 1)} \left( \frac{a}{r} \right)^n \right] \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi q_n a}{\lambda} \frac{N_n(\gamma_{n,m}) J_n \left( \gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right) + L_n(\gamma_{n,m}) Y_n \left( \gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right)}{G_n(\gamma_{n,m})} e^{-\gamma_{n,m}^2 F_0 \tau} \cos n\varphi,$$

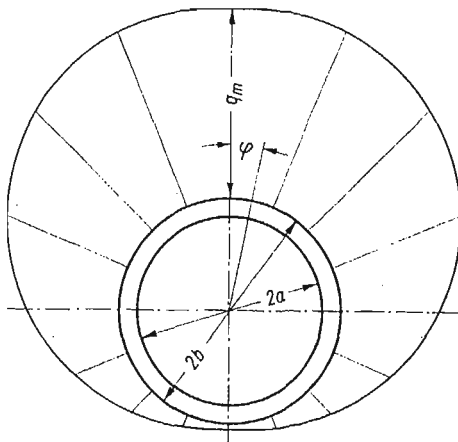
gdzie:  $Bi = \frac{\alpha a}{\lambda}$ ,  $Fo = \frac{\kappa \cdot \tau}{a^2}$ ,

$$\begin{aligned}
 N_0(\gamma_{0,m}) &= \gamma_{0,m} Y_1(\gamma_{0,m}) + Bi Y_0(\gamma_{0,m}), \\
 L_0(\gamma_{0,m}) &= \gamma_{0,m} J_1(\gamma_{0,m}) + Bi J_0(\gamma_{0,m}), \\
 L_n(\gamma_{n,m}) &= Bi J_n(\gamma_{n,m}) - \gamma_{n,m} J_{n-1}(\gamma_{n,m}) + n J_n(\gamma_{n,m}), \\
 N_n(\gamma_{n,m}) &= -Bi Y_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m} Y_{n-1}(\gamma_{n,m}) - n(Y_n(\gamma_{n,m})). \\
 M_n &= -\frac{n}{\omega_0} J_n(\omega_0 \gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m} J_{n-1}(\omega_0 \gamma_{n,m}), \\
 G_n(\gamma_{n,m}) &= \left( \gamma_{n,m}^2 - \frac{n^2}{\omega_0^2} \right) \frac{L_n(\gamma_{n,m})}{M_n(\gamma_{n,m})} + (n^2 - Bi^2 - \gamma_{n,m}^2) \frac{M_n(\gamma_{n,m})}{L_n(\gamma_{n,m})}.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

Wzór (2.45) wykorzystano do obliczenia pola temperatury w rurze ekranowej kotła konwertorowego typu OKG-100-3G. Do obliczeń przyjęto następujące dane:  $\omega_0 = 1,26667$  (rura  $38 \times 4$ ),  $Bi = 3,0$ . Strumień cieplny na zewnętrznej powierzchni rury (obciążenie cieplne) określony jest zależnością (rys. 1) [1]

$$\begin{aligned}
 q'(\varphi) &= 0 & t \leq 0, \\
 q'(\varphi) &= 0,515q_m + 0,485q_m \cos \varphi & t > 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

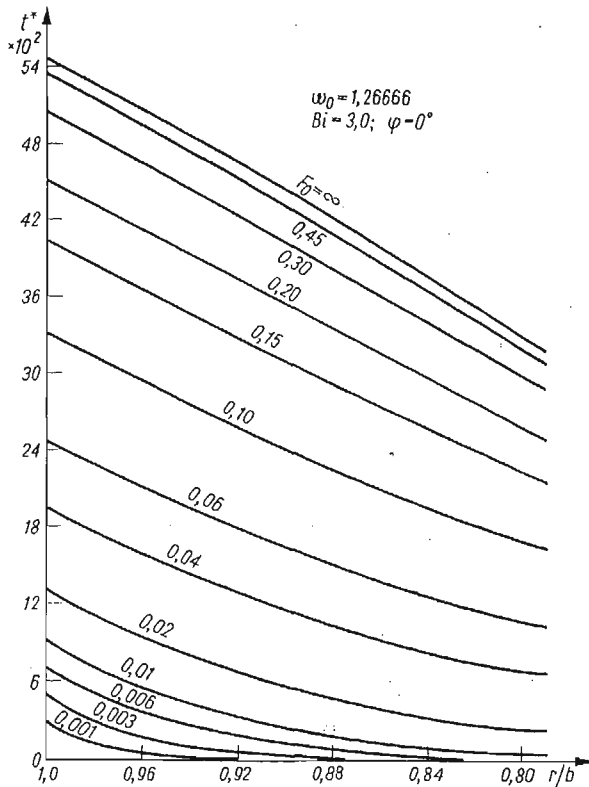
Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono rozkład temperatury w ścianie czołowej ( $\varphi = 0^\circ$ ) i tylnej ( $\varphi = 180^\circ$ ) omawianej rury, dla różnych wartości liczby Fouriera.



Rys. 1. Rozkład strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni wydrążonego walca

Jak już zaznaczono na początku niniejszej pracy określone zostanie również pole temperatury w walcu przy strumieniu cieplnym na zewnętrznej poboczniczy zmiennym w czasie, wykorzystując całkę Duhamela [4]. Jest to możliwe ze względu na fakt, że zarówno równanie przewodzenia ciepła (2.1) jak i warunki brzegowe (2.3) — (2.5) są liniowe.





Rys. 2. Rozkład temperatury w ścianie walca dla  $\varphi = 0$  rad przy skokowym wzroście strumienia cieplnego,  $t^* = \frac{t \cdot \lambda}{q_m b}$

$$t^* = \frac{t \cdot \lambda}{q_m b}$$

Jeżeli przez  $\bar{i}(r, \varphi, \tau)$  oznaczyć rozkład temperatury (2.45) wyznaczony przy skokowym wzroście strumienia cieplnego a przez  $i(r, \varphi, \tau)$  przy zmiennym w czasie strumieniu cieplnym, to całka Duhamela określa związek między  $\bar{i}(r, \varphi, \tau)$  i  $i(r, \varphi, \tau)$

$$(2.48) \quad i^{(\tau)}(r, \varphi, \tau) = \int_0^{\tau} f(\xi) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{i}(r, \varphi, \tau - \xi) d\xi.$$

Niżej określone zostanie pole temperatury dla przypadku gdy funkcja  $f(\tau)$  w warunku brzegowym (2.2) ma postać rys. 4

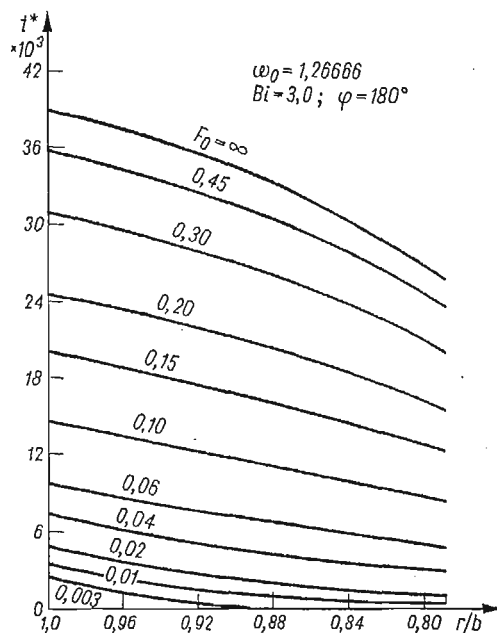
$$(2.49) \quad f(\tau) = 1 + c\tau,$$

gdzie

$c$  jest stałą

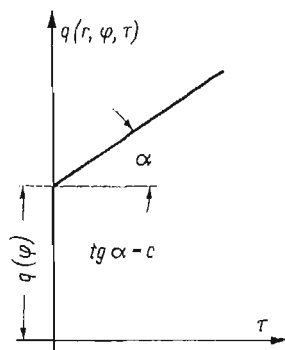
Dla, uproszczenia dalszych rozważań temperatura określona wzorem (2.45) zostanie zapisana w nieco odmiennej postaci:

$$(2.50) \quad \bar{i}(r, \varphi, \tau) = t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo},$$



Rys. 3. Rozkład temperatury w ścianie walca dla  $\varphi = \pi$  rad przy skokowym wzroście strumienia ciepłego

$$t^* = \frac{r \cdot \lambda}{q_m b}$$



Rys. 4. Zmiany strumienia ciepłego na zewnętrznej powierzchni walca w zależności od czasu

gdzie:

$$(2.51) \quad t_s(r, \varphi) = \frac{q_0 b}{\lambda} \left( \frac{1}{Bi} + \ln \frac{r}{a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi+n)}{Bi(\omega_0^{2n}+1) + n(\omega_0^{2n}-1)} \left( \frac{r}{a} \right)^n - \frac{\frac{q_n \cdot b}{\lambda \cdot n} \omega_0^n (Bi-n)}{Bi(\omega_0^{2n}+1) + n(\omega_0^{2n}-1)} \left( \frac{a}{r} \right)^n \right\} \cos n \varphi,$$

oraz

$$(2.52) \quad W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) = \pi \frac{q_n \cdot a}{\lambda} \left[ \frac{N_n(\gamma_{n,m}) J_n\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a}\right)}{G_n(\gamma_{n,m})} + \frac{L_n(\gamma_{n,m}) Y_n\left(\gamma_{n,m} \frac{r}{a}\right)}{G_n(\gamma_{n,m})} \right] \cos n\varphi.$$

Łatwo zauważyć, że część niustalona wyrażenia (2.45) zapisana jest w (2.50) nieco inaczej.

Sprawdzić jednak można, że zapisując oddzielnie wyrażenie  $\sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) \Big|_{n=0} \times e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo}$  i uwzględniając związki  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  i  $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$  gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , zależności (2.45) i (2.50) są identyczne. Podstawiając zatem (2.49) i (2.50) do (2.48) otrzymuje się temperaturę przy strumieniu cieplnym na zewnętrznej powierzchni walca zmieniającym się w czasie

$$(2.53) \quad \begin{aligned} t^{(\tau)} &= \int_0^{\tau} (1 + c\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) \cdot e^{-\gamma_{n,m}^2 \frac{\kappa(\tau-\xi)}{a^2}} \right] d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ca^2}{\gamma_{n,m}^2 \kappa} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ca^2}{\gamma_{n,m}^2 \kappa} \dot{W}(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) \cdot \tau. \end{aligned}$$

Wynik ten można nieco uprościć wykorzystując warunek początkowy (2.4), z którego otrzymuje się

$$(2.54) \quad \bar{i}(r, \varphi, 0) = t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) = 0,$$

skąd

$$(2.55) \quad t_s(r, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}).$$

Uwzględniając (2.55) w (2.53), otrzymuje się ostatecznie

$$(2.56) \quad \begin{aligned} t^{(\tau)}(r, \varphi, \tau) &= (1 + c \cdot \tau) t_s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo} + \\ &+ \frac{ca^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}) - \frac{ca^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} \dot{W}(r, \varphi, \gamma_{n,m}) e^{-\gamma_{n,m}^2 Fo}. \end{aligned}$$

Z analizy wyrażenia (2.56) wynika, że dla dostatecznie długiego czasu temperatura wynosi

$$(2.57) \quad t^{(\infty)} = (1+c\tau)t_s(r, \varphi) + \frac{ca^2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} W(r, \varphi, \gamma_{n,m}).$$

Jest to temperatura w ścianie rury w tzw. stanie quasi-stacjonarnym. Zauważmy, że pierwszy człon (2.56) reprezentuje temperaturę ustaloną w wydrążonym walcu wywołaną aktualną wartością obciążenia cieplnego, tj.  $q'(\varphi, \tau) = q(\varphi)(1+c\tau)$ . Drugi człon przedstawia składową temperatury niezależną od czasu. Spadek temperatury w ścianie walca jest większy w stanie quasi-stacjonarnym niż w stanie ustalonym (przy tych samych wartościach strumienia cieplnego na zewnętrznej powierzchni walca).

### 3. Uwagi końcowe

Otrzymane w pracy zależności pozwalające określić pole temperatury w walcu przy kołowo-niesymetrycznym ogrzewaniu strumieniem cieplnym jego zewnętrznej poboczniczy i chłodzeniu konwekcyjnym wewnętrznej są dosyć skomplikowane. Rozwiązania przedstawione w pracy są jednak szybkobieżne, co ułatwia praktyczne ich zastosowanie.

Należy również zaznaczyć, że otrzymane rozwiązania dla przypadku gdy  $\alpha = 0$  nie obowiązują i przypadek ten należy rozpatrzyć oddzielnie, mogą być natomiast stosowane w przypadku gdy  $\alpha \rightarrow \infty$ .

### Literatura cytowana w tekście

1. J. TALER, *Analiza pola temperatury i naprężeń w rurach ekranowych kotłów pracujących przy wysokich i zmiennych obciążeniach cieplnych*, Praca doktorska (niepublikowana), Kraków 1977 r.
2. F. S. CHAPMAN, F. A. HOLLAND, *Keeping piping hot*, Chemical Engineering, 1, 17 (1966), 133.
3. J. N. BOWER, H. R. PETERSON, *Guide to steam tracing design*, Hydrocarbon Processing and Petroleum Refiner, 3, 42 (1963), 149.
4. A. V. LUKOV, *Analytical heat diffusion theory*, Academic Press, New York (1968).
5. JAHNKE-EMDE-LÖSCH, *Tafeln höherer Funktionen*, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1966).
6. G. A. KORN, T. M. KORN, *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill, New York (1968).
7. Д. П. ЕЛИЗАРОВ, *К вопросу о тепловом ударе в паропроводах ТЭС*, Теплоэнергетика, 2, 17 (1971).
8. В. П. МЕРЗЛЯКОВ, *Функции Грина в решениях задач теплопроводности для полого цилиндра*, Инженерно-физический Журнал, 6, 21 (1971).
9. В. П. МЕРЗЛЯКОВ, *Об одной задаче теплопроводности для полого цилиндра*, Теплофизика Высокых Температур, 6, 5 (1967).
10. W. ENDRES, *Wärmespannungen beim Aufheizen dickwandiger Hohlzylinder*, BBC Mitteilungen 45 (1958).

### Dodatek A

Wykazane zostanie, że transformata  $T(r, \varphi, p) = T_0(r, p) + T_\varphi(r, \varphi, p)$  (2.21) stanowi iloraz dwóch wielomianów względem  $p$ , przy czym licznik jest wielomianem niższego

stopnia niż mianownik oraz, że transformata  $T(r, \varphi, p)$  (2.21) jest jednoznaczna względem  $p$ , tzn. zachodzi związek

$$(A.1) \quad T(r, \varphi, -k) = T(r, \varphi, k),$$

gdzie

$$(A.2) \quad k = \sqrt{\frac{p}{\kappa}}.$$

Rozważania ograniczone zostaną tylko do  $T_\varphi(r, \varphi, p)$ , gdyż w identyczny sposób można je przeprowadzić dla  $T_0(r, p)$ . Transformata  $T_\varphi(r, \varphi, p)$  zapisana zostanie w postaci

$$(A.3) \quad T_\varphi(r, \varphi, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa \Phi_n}{k^2 \psi_n(k)}.$$

Wyrażenia  $\Phi_n(k)$  i  $\psi_n(k)$  określone są w dalszej części dodatku. W celu przekształcenia  $\Phi_n(k)$  i  $\psi_n(k)$  wykorzystane zostaną definicje funkcji Bessela

$$(A.4) \quad I_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}.$$

Funkcje Bessela spełniają związki [5]

$$(A.5) \quad \begin{aligned} I_n(z) &= I_n(-z) && \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ -I_n(z) &= I_n(-z) && \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{aligned}$$

oraz

$$(A.6) \quad K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{\nu z}{2}\right) + W_n(z) + V_n(z),$$

gdzie

$$(A.7) \quad W_n(z) = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l} \right),$$

$$(A.8) \quad V_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$\nu = e^\gamma = 1,781072418$ ,  $\gamma$  — stała Eulera.

Z uwagi na (A.7) i (A.8) zachodzą związki

$$(A.9) \quad \left. \begin{aligned} W_n(z) &= W_n(-z), \\ V_n(z) &= V_n(-z) \end{aligned} \right\} \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą}$$

oraz

$$(A.10) \quad \left. \begin{aligned} -W_n(z) &= W_n(-z), \\ -V_n(z) &= V_n(-z). \end{aligned} \right\} \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

W oparciu o podane zależności przekształcony zostanie licznik  $T_\varphi(r, \varphi, k)$  (A.3), a mianowicie

$$\begin{aligned}
 (A.11) \quad \Phi_n(k) &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + k K_{n-1}(ka) \right] I_n(kr) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -\frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) - \frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) \right] \cdot K_n(kr) \right\} = \\
 &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} (-1)^{n+1} \ln \left( \frac{\nu ka}{2} \right) I_n(ka) I_n(kr) + \frac{n}{a} (-1)^{n+1} \times \right. \\
 &\quad \times \ln \left( \frac{\nu ka}{2} \right) I_n(ka) I_n(kr) + (-1)^n \ln \left( \frac{\nu ka}{2} \right) k \cdot I_{n-1}(ka) I_n(kr) - \\
 &\quad - \frac{\alpha}{\lambda} (-1)^{n+1} \ln \left( \frac{\nu kr}{2} \right) I_n(ka) I_n(kr) - \frac{n}{a} (-1)^{n+1} \ln \left( \frac{\nu kr}{2} \right) \times \\
 &\quad \times I_n(ka) I_n(kr) + (-1)^{n+1} \ln \left( \frac{\nu kr}{2} \right) k I_{n-1}(ka) I_n(kr) + P(k) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 (A.12) \quad \Phi_n(k) &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\alpha}{\lambda} \ln \left( \frac{a}{r} \right) I_n(ka) I_n(kr) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n}{a} (-1)^{n+1} \ln \left( \frac{a}{r} \right) I_n(ka) I_n(kr) + (-1)^n \ln \left( \frac{a}{r} \right) k I_{n-1}(ka) I_n(kr) + P(k) \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (A.13) \quad P(k) &= \frac{q_n}{\lambda} \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \frac{n}{a} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \right. \\
 &\quad \left. + k [W_{n-1}(ka) + V_{n-1}(ka)] \right\} I_n(kr) + \\
 &\quad + \frac{q_n}{\lambda} \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \cdot [W_n(kr) + V_n(kr)].
 \end{aligned}$$

Z analizy (A.12) i (A.13) z uwzględnieniem (A.5), (A.9) i (A.10) oraz faktu, że  $I_n(z)$  jest wielomianem uogólnionym [4], tj. zbieżnym szeregiem potęgowym o wykładnikach, które są liczbami naturalnymi, należy stwierdzić, że  $\phi_n(k)$  jest uogólnionym wielomianem parzystym względem  $k$ , a więc zachodzi zależność

$$(A.14) \quad \phi_n(k) = \phi_n(-k)$$

Łatwo się o tym przekonać obliczając występujące w (A.12) i (A.13) iloczyny funkcji Bessela  $I_n$  i  $I_{n-1}$  oraz wielomianów  $W_n$ ,  $W_{n-1}$ ,  $V_n$ ,  $V_{n-1}$  zgodnie z regułami mnożenia szeregów potęgowych [6]. Wielomian ten posiada wyraz wolny, który powstaje jako składowa iloczynów  $I_n V_n$  i  $I_{n-1} \cdot V_{n-1}$ .

Tak więc z przeprowadzonej analizy wynika, że  $\phi_n(k)$  jest również wielomianem względnym  $p$  (po uwzględnieniu (A.2)). Następnie rozpatrzony zostanie mianownik (A.3)

$$(A.15) \quad k^2 \psi_n(k) = k^2 \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + k K_{n-1}(ka) \right] \times \right. \\ \times \left[ -\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb) \right] + \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \times \\ \left. + \left[ -\frac{n}{b} K_n(kb) - k K_{n-1}(kb) \right] \right\} = k^2 \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left[ (-1)^{n+1} I_n(ka) \ln \left( \frac{\nu ka}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + W_n(ka) + V_n(ka) \right] + \frac{n}{a} \left[ (-1)^{n+1} I_n(ka) \ln \left( \frac{\nu ka}{2} \right) + W_n(ka) + V_n(ka) \right] + \right. \\ \left. + k \left[ (-1)^n I_{n-1}(ka) \ln \left( \frac{\nu ka}{2} \right) + W_{n-1}(ka) + V_{n-1}(ka) \right] \right\} \times \\ \times \left[ -\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb) \right] + k^2 \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \times \\ \times \left\{ -\frac{n}{b} \left[ (-1)^{n+1} I_n(kb) \ln \left( \frac{\nu kb}{2} \right) + W_n(kb) + V_n(kb) \right] - \right. \\ \left. - k \left[ (-1)^n I_{n-1}(kb) \ln \left( \frac{\nu kb}{2} \right) + W_{n-1}(kb) + V_{n-1}(kb) \right] \right\}.$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$(A.16) \quad k^2 \psi_n(k) = k^2 \left\{ \frac{\alpha n}{\lambda \cdot b} (-1)^{n+1} \ln \omega_0 I_n(ka) I_n(kb) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha k}{\lambda} (-1)^{n+1} \ln \omega_0 I_n(ka) I_{n-1}(kb) + \frac{kn}{b} (-1)^n \ln \omega_0 I_n(kb) I_{n-1}(ka) - \right. \\ \left. - (-1)^n k^2 \ln \omega_0 I_{n-1}(ka) I_{n-1}(kb) + \frac{n}{a} (-1)^n k \ln \omega_0 I_n(ka) I_{n-1}(kb) \right\} + Q(k),$$

gdzie

$$(A.17) \quad Q(k) = k^2 \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \frac{n}{a} [W_n(ka) + V_n(ka)] + \right. \\ \left. + k [W_{n-1}(ka) + V_{n-1}(ka)] \right\} \left[ -\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb) \right] + \\ + k^2 \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka) - \frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) \right] \times \\ \times \left\{ -\frac{n}{b} [W_n(kb) + V_n(kb)] - k [W_{n-1}(kb) + V_{n-1}(kb)] \right\}.$$

Podobnie jak w przypadku licznika i mianownik jest wielomianem o wykładnikach parzystych (wynika to z analizy (A.16) i (A.17) a więc zachodzi związek

$$(A.18) \quad (-k)^2 \psi_n(-k) = k^2 \psi_n(k).$$

Z porównania (A.12) z (A.16) wynika, że stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika. Ponieważ  $\phi_n(k)$  i  $\psi_n(k)$  są parzyste więc  $T_\varphi(r, \varphi, p)$  (A.3) jest jednoznaczna funkcją  $p$ , gdyż

$$(A.19) \quad T_\varphi(r, \varphi, (-k)) = T_\varphi(r, \varphi, k).$$

Tak więc transformata  $T(r, \varphi, k)$  (A.3) spełnia warunki konieczne i dostateczne zastosowania wzorów Heaviside'a (2.43). Łatwo sprawdzić, że warunki te spełnia również transformata  $T_0(r, k)$ .

#### Dodatek B

Dla jasności rozważań temperatura  $t(r, \varphi, \tau)$  (2.43) zostanie zapisana w postaci

$$(B.1) \quad t(r, \varphi, \tau) = t_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n^s(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau),$$

gdzie

$$(B.2) \quad t_0(r) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\kappa \phi_0(k)}{[k^3 \psi_0(k)]'} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Phi_0(k)}{[pk \psi_0(k)]'},$$

$$(B.3) \quad t_n^s(r, \varphi) = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa \Phi_n(k)}{[k^2 \psi_n(k)]'} = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(k)}{[p \psi_n(k)]'},$$

oraz

$$(B.4) \quad t_n(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa \Phi_n(k)}{[k^2 \psi_n(k)]'} e^{p\tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(k)}{[p \psi_n(k)]'} e^{p\tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}}.$$

Znak pochodnej odnosi się do różniczkowania po  $p$ . Najpierw obliczona zostanie składowa  $t_0(r)$ .

Mianownik (B.2) wynosi

$$(B.5) \quad [pk \psi_0(k)]' = \frac{d}{dp} [pk \psi_0(k)] = k \psi_0(k) + p[k \psi_0(k)]',$$

gdzie  $\psi_0(k)$  określone jest wyrażeniem (2.29)

Zatem

$$(B.6) \quad \lim_{p \rightarrow 0} [pk \psi_0(k)]' = \lim_{p \rightarrow 0} \{k \psi_0(k) + p[k \psi_0(k)]'\}.$$

Łatwo wykazać, że

$$\lim_{p \rightarrow 0} p[k \psi_0(k)]' = 0,$$

a więc

$$(B.7) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [pk \psi_0(k)] = \lim_{p \rightarrow 0} k \psi_0(k).$$



Przy obliczaniu (B.7) wykorzystane zostaną następujące związki, zachodzące w przypadku funkcji Bessela dla małych wartości  $x$ , tj. gdy  $0 < x \ll 1$  [5]

$$(B.8) \quad \begin{aligned} I_n(x) &\approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \\ K_0(x) &\approx \ln \frac{2}{\nu x}, \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2} \Gamma(n) \left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Podstawiając (B.8) do (B.7) otrzymuje się

$$(B.9) \quad \lim_{p \rightarrow 0} [k\psi_0(k)] = k \left[ \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{ka}\right) \left(\frac{kb}{2}\right) + \frac{\alpha}{\lambda} \ln \left(\frac{2}{\nu ka}\right) \left(\frac{kb}{2}\right) - \right. \\ \left. - k \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{kb} \cdot \frac{ka}{2} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{kb} \right] = \frac{\alpha}{\lambda \cdot b}.$$

Licznik wyrażenia  $t_0(r)$  (B.2) wynosi natomiast

$$(B.10) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \phi_0(k) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{q_0}{\lambda} \left\{ k [I_0(kr)K_1(ka) + I_1(ka)K_0(kr)] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\lambda} [I_0(kr)K_0(ka) - I_0(ka)K_0(kr)] \right\}.$$

Uwzględniając (B.8) w (B.10) otrzymuje się

$$(B.11) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Phi_0(k) = \frac{q_0}{\lambda} \left\{ k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{ka} + \frac{\alpha}{\lambda} \ln \frac{2}{\nu ka} + \left( k \cdot \frac{ka}{2} - \frac{\alpha}{\lambda} \right) \ln \frac{2}{\nu kr} \right\} = \\ = \frac{q_0}{\lambda} \left[ \frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\lambda} \left( \ln \frac{2}{\nu ka} - \frac{2}{\nu kr} \right) \right] = \frac{q_0}{\lambda} \left[ \frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\lambda} \ln \frac{r}{a} \right].$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu w (B.2), (B.9) i (B.11)  $t_0(r)$  wynosi

$$(B.12) \quad t_0(r) = \frac{q_0}{\lambda} \frac{\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{\lambda} \ln r}{\frac{\alpha}{\lambda \cdot b}} = \frac{q_0 \cdot b}{\lambda} \left( \frac{1}{Bi} + \ln \frac{r}{a} \right).$$

W identyczny sposób można wyznaczyć składową  $t_n^s(r, \varphi)$  (B.3), która wynosi

$$(B.13) \quad t_n^s(r, \varphi) = \left\{ \frac{q_n b}{\lambda \cdot n} \cdot \frac{1}{a^n} \omega_0^n (Bi + n) r^n - \frac{q_n \cdot b}{\lambda \cdot n} a^n \omega_0^n (Bi - n) r^{-n} \right\} \cos(n\varphi).$$

Do obliczenia  $t(r, \varphi, \tau)$  (B.1) pozostała jeszcze jedna składowa  $t_n(r, \varphi, \tau)$  (B.4).

Najpierw obliczony zostanie mianownik (B.4)

$$(B.14) \quad [p\psi_n(k)] = \frac{d}{dp} [p\psi_n(k)] = \psi_n(k) + p \frac{d\psi_n(k)}{dp},$$

gdzie  $\psi_n(k)$  określone jest wyrażeniem (2.32) Z uwagi na (2.41):

$$\psi_n(k) \Big|_{k = \frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = 0$$

i

$$(B.15) \quad p \frac{d\psi_n(k)}{dp} = p \frac{d\psi_n(k)}{dk} \cdot \frac{dk}{dp} = k^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{d\psi_n}{dk} = \frac{1}{2} k \frac{d\psi_n(k)}{dk}$$

(B.14) wynosi

$$(B.16) \quad [p\psi_n(k)]' \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = \frac{1}{2} \left( k \frac{d\psi_n(k)}{dk} \right) \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}}$$

Pochodna  $\frac{d\psi_n}{dk}$  obliczona z wykorzystaniem związków [5]

$$(B.17) \quad \begin{cases} \frac{dI_n(kx)}{dk} = -\frac{n}{k} I_n(kx) + x I_{n-1}(kx), \\ \frac{dI_{n-1}(kx)}{dk} = \frac{n}{k} I_{n-1}(kx) - \frac{1}{k} I_{n-1}(kx) + x I_n(kx), \\ \frac{dK_n(kx)}{dk} = -\frac{n}{k} K_n(kx) - x K_{n-1}(kx), \\ \frac{dK_{n-1}(kx)}{dk} = \frac{n}{k} K_{n-1}(kx) - \frac{1}{k} K_{n-1}(kx) - x K_n(kx) \end{cases}$$

i równania charakterystycznego (2.36) zapisanego w postaci

$$(B.18) \quad \frac{\frac{\alpha}{\lambda} K_n(ka) + \frac{n}{a} K_n(ka) + k K_{n-1}(ka)}{-\frac{n}{b} K_n(kb) - k K_{n-1}(kb)} = \frac{-\frac{n}{a} I_n(ka) + k I_{n-1}(ka) - \frac{\alpha}{\lambda} I_n(ka)}{-\frac{n}{b} I_n(kb) + k I_{n-1}(kb)} = \varrho.$$

wynosi

$$(B.19) \quad \frac{d\psi_n}{dk} = \frac{1}{\varrho} \left\{ -\frac{\alpha^2 a}{\lambda^2} [I_{n-1}(ka)K_n(ka) + I_n(ka)K_{n-1}(ka)] + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{a} [I_n(ka)K_{n-1}(ka) + I_{n-1}(ka)K_n(ka)] + k^2 a [I_n(ka)K_{n-1}(ka) + \right. \\ \left. + I_{n-1}(ka)K_n(ka)] \right\} + \varrho \left\{ -\frac{n^2}{b} [I_n(kb)K_{n-1}(kb) + I_{n-1}(kb)K_n(kb)] - \right. \\ \left. - k^2 b [I_{n-1}(kb)K_n(kb) + I_n(kb)K_{n-1}(kb)] \right\}.$$

Uwzględniając związki [5]

$$(B.20) \quad \begin{aligned} I_{n-1}(ka)K_n(ka) + I_n(ka)K_{n-1}(ka) &= \frac{1}{ka}, \\ I_{n-1}(kb)K_n(kb) + I_n(kb)K_{n-1}(kb) &= \frac{1}{kb}, \end{aligned}$$

w (B.19) otrzymuje się

$$(B.21) \quad \frac{d\psi_n(k)}{dk} = \varrho \left( -\frac{n^2}{kb} - k \right) + \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{n^2}{a^2} + k^2 \right),$$

zatem

$$(B.22) \quad \left. \left( \frac{1}{2} k \frac{d\psi_n(k)}{dk} \right) \right|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = \frac{1}{2a^2} \left[ \varrho \left( i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right) \left( \gamma_{n,m}^2 - \frac{n^2}{\omega_0^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varrho \left( i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right)} (n^2 - Bi^2 - \gamma_{n,m}^2) \right].$$

Dla obliczenia  $\varrho \left( i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right)$  wykorzystana zostanie prawa strona (B.18).

$$(B.23) \quad \varrho \left( i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right) = - \frac{-\frac{n}{a} I_n(i\gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} I_{n-1}(i\gamma_{n,m}) - \frac{\alpha}{\lambda} I_n(i\gamma_{n,m})}{-\frac{n}{b} I_n(i\omega_0 \gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} I_{n-1}(i\omega_0 \gamma_{n,m})} = \\ = - \left[ -\frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{1}{2} n\pi i} J_n(\gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} e^{\frac{1}{2} (n-1)\pi i} J_{n-1}(\gamma_{n,m}) - \frac{n}{a} e^{\frac{1}{2} n\pi i} J_n(\gamma_{n,m}) \right] \times \\ \times \left[ -\frac{n}{b} e^{\frac{1}{2} n\pi i} J_n(\omega_0 \gamma_{n,m}) + \frac{i\gamma_{n,m}}{a} e^{\frac{1}{2} (n-1)\pi i} J_{n-1}(\omega_0 \gamma_{n,m}) \right]^{-1}.$$

Po podzieleniu licznika i mianownika (B.23) przez  $e^{\frac{1}{2} n\pi i}$  i uwzględnieniu, że

$$(B.24) \quad e^{-\frac{1}{2} \pi i} = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -i$$

otrzymuje się

$$(B.25) \quad \varrho = - \frac{-BiJ_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}J_{n-1}(\gamma_{n,m}) - nJ_n(\gamma_{n,m})}{-\frac{n}{\omega_0} J_n(\omega_0 \gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}J_{n-1}(\omega_0 \gamma_{n,m})}$$

W podobny sposób można wyznaczyć  $\Phi_n \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}}$  gdzie  $\Phi_n(k)$  określone jest wyrażeniem

(A.11). Podstawiając do  $\Phi_n(k)$ ,  $k = \frac{i\gamma_{n,m}}{a}$  otrzymuje się

$$(B.26) \quad \phi_n \left( i \frac{\gamma_{n,m}}{a} \right) = \frac{1}{2a} \frac{\pi q_n}{\lambda} \left\{ [-BiY_n(\gamma_{n,m}) - nY_n(\gamma_{n,m}) + \gamma_{n,m}Y_{n-1}(\gamma_{n,m})] J_n \left( \gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right) + \right. \\ \left. + [BiJ_n(\gamma_{n,m}) + nJ_n(\gamma_{n,m}) - \gamma_{n,m}J_{n-1}(\gamma_{n,m})] Y_n \left( \gamma_{n,m} \frac{r}{a} \right) \right\} \cos n\varphi.$$

Po podstawieniu do (B.4): (B.22), (B.25), (B.26) i uwzględnieniu że

$$(B.27) \quad e^{p\tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = e^{k^2 \kappa \tau} \Big|_{k=\frac{i\gamma_{n,m}}{a}} = e^{-\gamma_{n,m}^2 \kappa \tau}$$

otrzymuje się  $t_n(r, \varphi, \tau)$

Po podstawieniu  $t_0(r)$  (B.12),  $t_n^s(r, \varphi)$  (B.13) oraz  $t_n(r, \varphi, \tau)$  do (B.1) otrzymuje się temperaturę  $t(r, \varphi, \tau)$ , której postać jest nieco odmienna od wyrażenia (2.45). Łatwo jednak wykazać, że  $\sum_{n=0}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau)$  można przekształcić do postaci

$$(B.28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau) = t_0(r, \varphi, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n(r, \varphi, \tau)$$

gdzie

$$(B.29) \quad t_0(r, \tau) = \frac{\pi q_0 a}{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[ N_0 J_0 \left( \frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right) - L_0 Y_0 \left( \frac{r}{a} \gamma_{0,m} \right) \right] e^{-\gamma_{0,m}^2 F_0}}{\gamma_{0,m} \left[ \frac{L_0}{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})} - (Bi^2 + \gamma_{0,m}^2) \frac{J_1(\omega_0 \gamma_{0,m})}{L_0} \right]}$$

zapisując w (B.1) oddzielnie człon  $t_0(r, \varphi, \tau)$  i przekształcając go za pomocą związków [5]

$$(B.30) \quad \begin{aligned} J_{-1}(x) &= -J_1(x) \\ Y_{-1}(x) &= Y_1(x) \end{aligned}$$

do postaci (B.29).

#### Резюме

#### НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ, КРУГОНЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ НАГРЕВАЕМЫМ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Определено неустановившиеся температурное поле в бесконечном полом цилиндре нагреваемым на внешней поверхности (задан несимметрический удельный тепловой поток) и охлаждаемым на внутренней поверхности по закону Ньютона. Принимается равномерное распределение температуры в начальный момент времени. Решение получено с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени и метода разделения переменных. Материал цилиндра считается однородным и изотропным и его термические свойства не зависят от температуры.

#### Summary

#### UNSTEADY, AXIALLY NONSYMMETRIC TEMPERATURE DISTRIBUTION IN AN INFINITE HOLLOW CYLINDER HEATED EXTERNALLY

The unsteady temperature distribution in an infinite circular hollow cylinder heated externally (prescribed nonsymmetric heat flux at the surface) and cooled internally by fluid has been calculated. The initial temperature distribution has been assumed to be uniform.

Solution has been obtained by means of the Laplace transform with respect to time and the usual method of separation of variables.

The considered medium is homogeneous, isotropic, with thermal properties independent of position and temperature.

INSTYTUT APARATURY  
PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI  
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1978 r.