

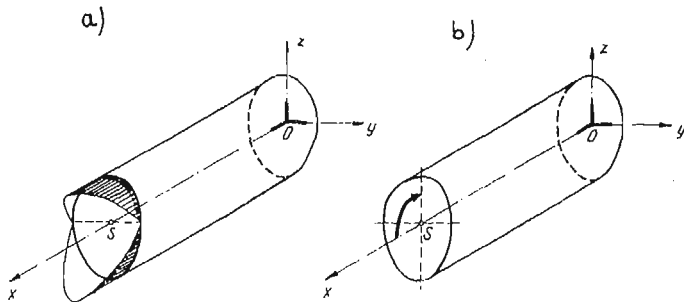
KINEMATYCZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ UKŁADÓW SIŁ

STEFAN PIECHNIK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Rozważmy lity, nieswobodny pręt pryzmatyczny o dowolnym przekroju poprzecznym (rys. 1) określony w układzie osi x, y, z , gdzie oś x jest osią pręta a y, z osiami głównymi, centralnymi przekroju poprzecznego i obciążmy go na ściankach czołowych np. obciążeniem, którego gęstość zapiszemy w postaci: $q_{vx} = az$, $q_{vy} = 0$, $q_{vz} = 0$, $a > 0$.

Dla tak przyjętego obciążenia (rys. 1a) łatwo znaleźć ściśle rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości, a więc macierze naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, których elementy spełniają równania Naviera, Cauchy'ego, Hooke'a oraz statyczne warunki brzegowe i pewną grupę warunków kinematycznych. Jak łatwo sprawdzić, obciążenie pokazane na rys. 1a redukuje się do momentu zginającego w płaszczyźnie xz , stąd

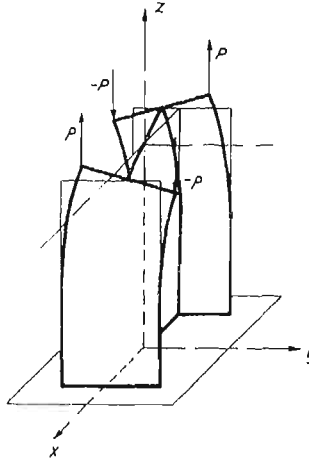


Rys. 1

też w przypadku takiego obciążenia mówić będziemy o «czystym zginaniu». Otrzymane rozwiązanie powyższego zadania możemy wykorzystać dla całej grupy innych obciążeń ścianek poprzecznych, jeśli tylko obciążenia te redukują się do pary w płaszczyźnie xz . Wykorzystujemy bowiem zasadę de S. Venanta, w myśl której, macierze naprężeń, odkształceń i przemieszczeń różnić się będą dowolnie mało, z wyjątkiem obszaru sąsiadującego z powierzchnią obciążoną, dla różnych, ale statycznie równoważnych obciążeń przyłożonych na małej w stosunku do całej powierzchni. Jakikolwiek więc obciążenie, które da się zredukować do pary, zastępować będziemy tą parą (rys. 1b). Wykorzystując równania statycznej równowagi z układem pokazanym na rys. 1a, znajdujemy odpowiednie wzory określające naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia. Przypadek pokazany na rys. 1b, jest więc reprezentantem zbioru obciążeń, w którym określona jest relacja statycznej równowagi. W przypadku obciążenia pokazanego na rys. 1b mówić

będziemy o «zginaniu prostym» lub prościej o «zginaniu». Podobnie, jak proste zginanie, tak i proste rozciąganie i proste skręcanie lub kombinacja tych wszystkich (obciążenie złożone) będą reprezentantami odpowiednich klas równoważności.

Istnieje jednak pewna grupa prętów, dla których zastąpienie układu sił innym statycznie im równoważnym może prowadzić do zasadniczych błędów. Do takich prętów należą pręty cienkościennie. Rozważmy prosty przykład pokazany na rys. 2.



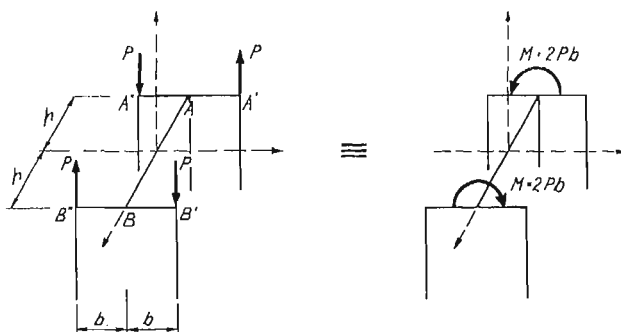
Rys. 2

Gdyby układ sił zastąpić układem statycznie równoważnym w środku ciężkości przekroju poprzecznego, otrzymalibyśmy układ zerowy, co oznaczałoby zerowanie się naprężeń, odkształceń i przemieszczeń. Jak widać z rys. 2 byłoby to zbyt grubym przybliżeniem nawet dla przekrojów poprzecznych dostatecznie odległych od ścianki czołowej. W przypadku prętów cienkościennych nie możemy przyjąć zasady de Saint Venanta, przynajmniej w takiej postaci, w jakiej została ona sformułowana. Oznaczałoby to konieczność rozwiązywania każdego przypadku obciążenia osobno lub inaczej mówiąc, niemożność określenia reprezentanta dla pewnych grup obciążeń.

2. Definicja kinematycznej równoważności układów sił

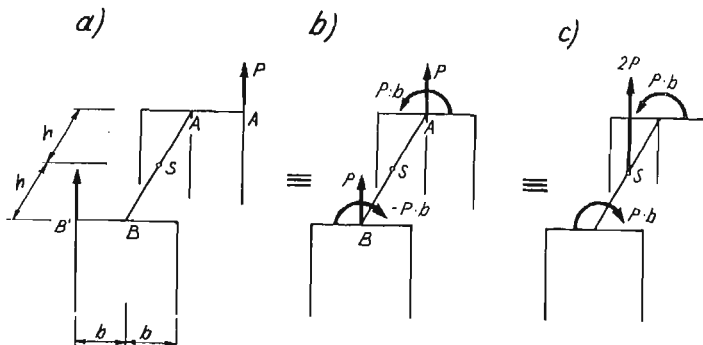
Rozważmy najpierw kilka przykładów obciążenia pręta cienkościennego, które można zastąpić innym układem statycznie równoważnym, ale równocześnie takim, aby efekt kinematyczny obu układów był jednakowy. Rozpatrzmy w tym celu układ obciążeń podany na rys. 2. Przykład układu równoważnego przedstawia rys. 3. Przenosząc siłę P z punktu A' do A dodajemy moment Pb , przenosząc siłę $-P$ z punktu A'' do A dodajemy moment Pb otrzymując w punkcie A tylko moment $M = 2Pb$, albowiem siły redukują się. Postępując podobnie z siłami zaczepionymi w punktach B' i B'' otrzymamy w punkcie B moment $M = -2Pb$. Nowy układ stanowi więc biparę, której pary działają w płaszczyznach półek. Nowy układ złożony z bipary wywołuje ten sam efekt kinematyczny co układ wyjściowy.

Na rys. 4 przedstawiono drugi przykład. Dokonajmy redukcji do punktu S , będącego środkiem ciężkości dwuteownika; siłę P z punktu A' przenieśmy do punktu A , dodając dla zachowania statycznej równoważności moment $M = Pb$, przenosząc siłę P z punktu B' do B otrzymamy nowy układ, który przedstawia rys. 4b. Przenosząc następnie siłę P z punktu A do S dodajemy moment Ph . Przenosząc siłę P z punktu B do S dodajemy



Rys. 3

moment $-Ph$. Oba dodane momenty działające w jednej płaszczyźnie redukują się, w wyniku czego otrzymujemy układ przedstawiony na rys. 4c złożony z siły $2P$ i bipary o bimomencie $B_\omega = Pbh$. Również w tym przypadku efekt kinematyczny układu na rys. 4c będzie analogiczny z takim efektem układu pokazanego na rys. 4a.



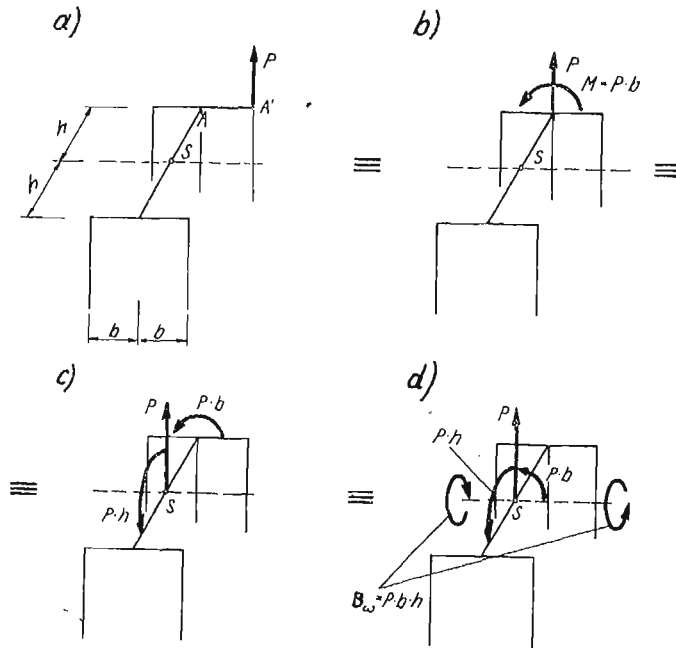
Rys. 4

Trzecim wreszcie przykładem redukcji do punktu S niech będzie układ pokazany na rys. 5a. Sposób redukcji pokazany na rys. 5 nie wymaga komentarza, dodajmy tylko, że przenosząc moment Pb (rys. 5c) z płaszczyzny półki do równoległej płaszczyzny przechodzącej przez punkt S dodać musimy biparę o bimomencie $B_\omega = Pbh$. I w tym przypadku intuicja podsuwa kinematyczną równoważność układów pokazanych na rys. 5a i 5d.

Rozważone powyżej przykłady dotyczyły układu przyłożonego do pręta o prostym przekroju poprzecznym; w przypadku bardziej złożonych przekrojów narzuca się konieczność wprowadzenia precyzyjnego określenia pojęcia kinematycznej równoważności dwóch układów. Wprowadzenie takiego pojęcia pozwoliłoby przede wszystkim na możliwość rozwiązania pręta cienkościennego dla pewnego reprezentatywnego układu. Rozwiązanie

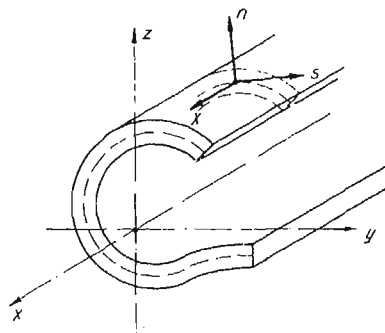
to byłyby ważne dla całej grupy obciążeń kinematycznie równoważnych danemu, jeśli oczywiście uogólnić zasadę de Saint Venanta, na układy kinematycznie równoważne.

W odróżnieniu od statycznej równoważności, równoważność kinematyczna nie może być zdefiniowana bez uwzględnienia kształtu bryły, albowiem właśnie deformacja bryły decyduje o kinematycznej równoważności. Wynika stąd, że sposób redukcji danego układu



Rys. 5

do układu kinematycznie mu równoważnego nie może być dowolny. Umówimy się, że przyłożony do pręta układ sił będziemy redukować do ustalonego punktu leżącego wewnątrz pręta lub sztywno związanego z prętem w ten sposób, że drogą redukcji będzie oś środkowa przekroju poprzecznego i tworzące powierzchni środkowej. Inaczej mówiąc drogą redukcji wyznaczać będzie lokalny krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych (x, s, n) (rys. 6).



Rys. 6

W myśl powyższego przyjmujemy następującą definicję: *Dwa układy (A) i (B), przyłożone do pręta cienkościennego, nazywać będziemy kinematycznie równoważnymi, jeśli redukując je do ustalonego punktu R, sztywno związanego z osią środkową przekroju poprzecznego, w taki sposób, że drogę redukcji wyznacza lokalny krzywoliniowy ortogonalny układ osi (x, s, n) otrzymujemy w punkcie R równość wektorów sum, wektorów momentów i bimomentów.*

$$(2.1) \quad \bar{S}(A) = \bar{S}(B), \quad \bar{M}_R(A) = \bar{M}_R(B), \quad B_\omega(A) = B_\omega(B).$$

Statyczna równoważność dwóch układów wymaga równości tylko sum i momentów, a więc układy kinematycznie równoważne są statycznie równoważnymi.

3. Przykłady zastosowań

Pierwszym zastosowaniem przyjętej definicji o kinematycznej równoważności jest uogólnienie zasady de Saint Venanta, którą możemy teraz sformułować: *Jeśli na niewielkiej powierzchni pręta cienkościennego przyłożony jest układ (A) wywołujący w przecie pewną macierz naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, to jeśli na tej powierzchni układ (A) zastąpimy kinematycznie równoważnym układem (B), wówczas stany naprężeń odkształceń i przemieszczeń różni się będą dowolnie mało z wyjątkiem obszaru leżącego w sąsiedztwie powierzchni przyłożenia układów (A) i (B).*

Konsekwencje takiego uogólnienia są nader oczywiste.

Drugim zastosowaniem pojęcia kinematycznej równoważności jest pokazanie sensu i uzasadnienie nazwy występującego w analizie prętów cienkościennych wyrażenia

$$(3.1) \quad B_\omega = \int \int_A \sigma_x(x, s) \omega(s) dA,$$

które nosi nazwę bimomentu, a które wprowadza się bardzo formalnie. Np. MUTERMILCH [1] obliczając pracę naprężenia σ_x na przemieszczeniu u_x otrzymuje

$$(3.2) \quad L_1 = \int \int_A u_x \sigma_x dA = u \int \int_A \sigma_x dA - v' \int \int_A \sigma_x y dA - w' \int \int_A \sigma_x z dA - \theta' \int \int_A \sigma_x \omega dA,$$

aby następnie stwierdzić «... ostatni składnik wyrażenia... jest również pracą wirtualną pewnej nowej siły wewnętrznej $B_\omega = \int \int \sigma \omega dA$, zwanej bimomentem, na przemieszczeniu u_x ».

Wielu autorów m.in. FIŁONIENKO-BORODICZ [2], mając wyrażone naprężenia normalne w postaci

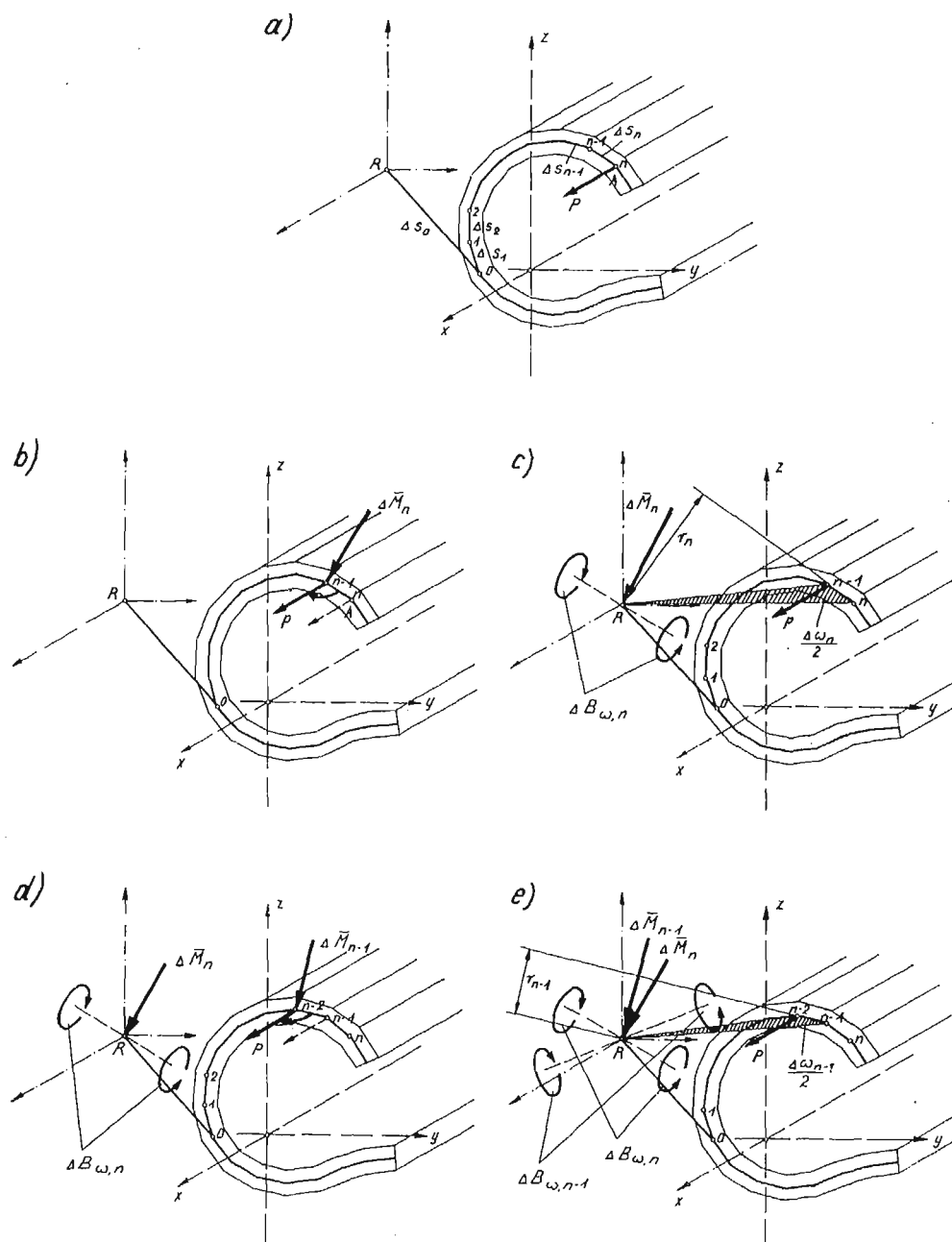
$$(3.3) \quad \sigma_x = E_1 [\zeta' - \xi'x - \eta'y - \varphi''\omega],$$

w wyniku formalnego pomnożenia obu stron przez ω i wykonania całkowania po powierzchni przekroju poprzecznego otrzymuje

$$(3.4) \quad \int \int_A \sigma_x \omega dA = B_\omega = -\varphi'' E_1 J_\omega$$

i pisze «... wielkość B_ω , to tak zwany giętno-skrętny bimoment; jego wymiar wynosi [kG cm²]». Podobnie rzecz traktuje RUTECKI [3]. Próby wyjaśnienia sensu B_ω , znajdujemy

w książkach BIELAJEWA [4] i PANARINA, TARASENKI [5], na najprostszym przykładzie naprężeń w ścianie ceownika. Gdyby dokonać tej próby dla naprężeń, np. w półkach, moglibyśmy dojść do błędnego rezultatu, jeśli nie wprowadzić dodatkowej umowy o drodze redukcji, innymi słowy o kinematycznej równoważności układów. Wykorzystując podaną



Rys. 7

definicję kinematycznej równoważności, bez trudu pokażemy sens i uzasadnienie nazwy dla dowolnego przekroju poprzecznego i dowolnego punktu redukcji R .

Rozważmy pokazany na rys. 7a układ i zredukujmy go do punktu R . Niech punkt R będzie «środkiem zgięcia», a punkt O głównym zerowym punktem współrzędnej wycinkowej. Przenosząc z punktu A siłę P (rys. 7a) do punktu $(n-1)$ dodajemy parę o wektorze (rys. 7b)

$$(3.5) \quad \Delta \bar{M}_n = \Delta \bar{s}_n \times \bar{P}.$$

Przenosząc moment do równoległej płaszczyzny przechodzącej przez punkt R dołączamy biparę o bimomencie

$$(3.6) \quad \Delta B_{\omega, n} = P \Delta s_n r_n = P \Delta \omega_n$$

otrzymując układ kinematycznie równoważny pokazany na rys. 7c. Przenosząc dalej siłę P do punktu $(n-2)$ dołączamy parę o wektorze

$$(3.7) \quad \Delta \bar{M}_{n-1} = \Delta \bar{s}_{n-1} \times \bar{P}$$

otrzymując układ pokazany na rys. 7d. Przenosząc z kolei moment $\Delta \bar{M}_{n-1}$ do równoległej płaszczyzny przechodzącej przez punkt R dodajemy biparę o bimomencie

$$(3.8) \quad \Delta B_{\omega, n-1} = P \Delta s_{n-1} r_{n-1} = P \Delta \omega_{n-1},$$

jak pokazano na rys. 7c. Postępując analogicznie tak, aż siła \bar{P} znajdzie się w punkcie R otrzymamy w rezultacie zredukowany do tego punktu układ kinematycznie równoważny danemu, który składa się: z siły \bar{P} zaczepionej w R , wektora momentu

$$(3.9) \quad \bar{M} = \sum_{i=0}^n \Delta \bar{M}_i = \sum_{i=0}^n \Delta \bar{s}_i \times \bar{P} = \left(\sum_{i=0}^n \Delta \bar{s}_i \right) \times \bar{P} = R\bar{A} \times \bar{P}$$

oraz bipary o bimomencie

$$(3.10) \quad B_{\omega} = \sum_{i=0}^n \Delta B_{\omega, i} = \sum_{i=0}^n P \Delta s_i r_i = P \sum_{i=0}^n \Delta s_i r_i = P \omega(A).$$

Ostatnie dwa wyrażenia traktować możemy jako sumę aproksymacyjną w przypadku, gdy przekrój poprzeczny ma oś środkową o dowolnej krzywej $y = y(s)$, $z = z(s)$. W tym przypadku mamy

$$(3.11) \quad \bar{M} = \left(\int_{\bar{R}\bar{A}} \bar{d}s \right) \times \bar{P} = \bar{R}\bar{A} \times \bar{P},$$

$$B_{\omega} = P \int_{\bar{R}\bar{A}} r(s) ds = P \int_{\bar{R}\bar{A}} d\omega = P \omega(A).$$

Wektor \bar{M} , jak widać, nie zależy od kształtu krzywej, a jedynie od współrzędnych punktów R i A , w przeciwieństwie do wartości bimomentów. Zredukujmy teraz do punktu R siły wewnętrzne o gęstości σ_x rozpostarte nad przekrojem poprzecznym pokazanym na rys. 8. Jeśli oznaczymy przez $d\bar{P}(s) = \bar{\sigma}_x \delta(s) ds$ i postępować będziemy analogicznie, jak w przypadku pokazanym na rys. 7, zredukujemy układ do punktu R otrzymując

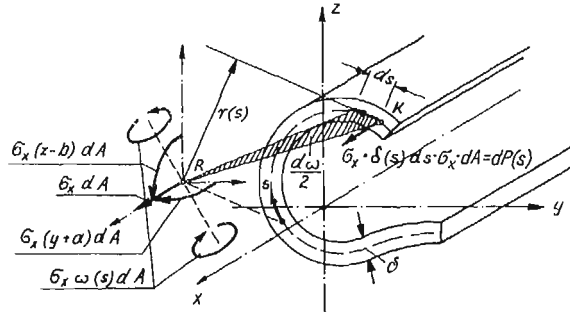
$$(3.12) \quad d\bar{N} = \bar{\sigma}_x \delta(s) ds,$$

$$d\bar{M} = \bar{R}\bar{K} \times d\bar{P}(s) = \bar{R}\bar{K} \times \bar{\sigma}_x \delta(s) ds,$$

$$dB_{\omega} = \sigma_x \omega(s) \delta(s) ds.$$

Sumując zredukowane w punkcie R układy od wszystkich elementarnych sił $d\bar{P}(s)$ na całej krzywej c , otrzymamy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} N &= \int_C \sigma_x \delta(s) ds = \int_A \sigma_x dA, \\ \bar{M} &= \int_C \bar{R}\bar{K} \times \bar{\sigma}_x \delta(s) ds = \int_A \bar{R}\bar{K} \times \bar{\sigma}_x d\bar{A}, \\ B_\omega &= \int_C \sigma_x \omega(s) \delta(s) ds = \int_A \sigma_x \omega(s) dA. \end{aligned}$$



Rys. 8

Układ ten jest kinematycznie równoważny układowi sił wewnętrznych o gęstości σ_x rozpostartych nad całym przekrojem poprzecznym. W wyniku tego rozumowania stają się jasne nazwa i sens całki B_ω . Kolejnym wreszcie przykładem wykorzystania kinematycznej równoważności układów jest wyprowadzenie wzoru na naprężenia normalne σ_x wyrażone poprzez siły przekrojowe (N , M_y , M_z i B_ω). Wykorzystujemy tu bowiem warunek kinematycznej równoważności układów sił zewnętrznych (Z) po jednej stronie przekroju z układem sił wewnętrznych (W)

$$(3.14) \quad \bar{S}(Z) = \bar{S}(W), \quad \bar{M}(Z) = \bar{M}(W), \quad B_\omega(Z) = B_\omega(W).$$

Literatura cytowana w tekście

1. P. JASTRZĘBSKI, J. MUTERMILCH, W. ORŁOWSKI, *Wytrzymałość materiałów*, Arkady, Warszawa 1974.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др., *Курс сопротивления материалов*, ч. II, Гос. Изд. Техн. Теорет. Лит., Москва 1949.
3. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, PWN, Warszawa 1966.
4. N. M. BIELAJEW, *Wytrzymałość materiałów*, Wyd. MON, Warszawa 1954.
5. Н. Я. Панарин, Ю. Ю. Тарасенко, *Сопротивление материалов*, Гос. Издат. Лит. Стр. Арх. и Стр. Мат., Москва 1962.

Резюме

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ СИЛ

В работе представлено определение «кинематической эквивалентности систем сил». Из множества систем сил, в котором определено понятие статической эквивалентности, выделен класс эквивалентных систем, вызывающих такой же кинематический эффект. В отличие от статической, кинематическая эквивалентность систем зависит от формы тела. Рассмотрен ряд примеров использования такого определения при анализе тонких стержней.

S u m m a r y

KINEMATIC EQUIVALENCE OF A SYSTEM OF FORCES

In the paper the definition of «kinematic equivalence of a system» has been formulated. From the set of forces in which the relation of statical equivalence is given, one can distinguish the equivalence class of forces giving the same kinematic effects. In contrary to static equivalence, the kinematical one depends on the shape of the loaded body. Several examples are presented in which the introduced definition is used in the analysis of slender bars.

INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1977 r.
