

O PEWNYM ZAMKNIĘTYM ROZWIĄZANIU PROBLEMU PROPAGACJI PŁASKIEJ FALI  
UDERZENIOWEJ W NIEJEDNORODNYM PLASTYCZNYM OŚRODKU POLITROPOWYM  
Z LINIOWOSPREŻYSTYM ODCIĄŻENIEM

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

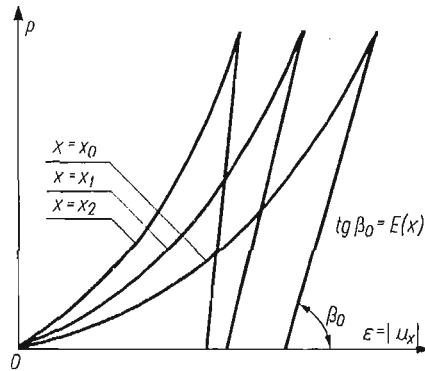
Problem propagacji fal uderzeniowych w niejednorodnych, politropowych ośrodkach plastycznych jest ciągle aktualny i otwarty. Był on już rozpatrywany przez wielu autorów. I tak, w monografii [1] przedstawione jest rozwiązanie problemu propagacji płaskich, cylindrycznych i kulistych fal uderzeniowych w suchym, niejednorodnym gruncie, modelowanym gazem plastycznym [2]. Zastosowano tutaj skokową aproksymację niejednorodności ośrodka, przy zachowaniu stałej jego gęstości za frontem fali (gaz plastyczny). Zagadnienie propagacji płaskiej fali uderzeniowej w ośrodku trójskładnikowym ze stałą gęstością w strefie obciążenia wraz z odbiciem od nieruchomej przegrody rozpatrzono w pracy [3]. W kolejnych publikacjach [4—6] podano efektywną metodę konstrukcji zamkniętych rozwiązań propagacji fal sprężysto-plastycznych typu uderzeniowego w określonej klasie ośrodków niejednorodnych, których ruch opisuje się równaniem Eulera-Darboux [7]. W pracach [8, 9] rozwiązano problem rozprzestrzeniania się płaskich fal naprężenia w niejednorodnym ośrodku trójskładnikowym. Do analizy problemu wykorzystano model ośrodka podany przez LACHOWA [10] i RACHMATULINA [11]. W modelu tym założono, że współczynniki objętościowej zawartości poszczególnych składników (powietrza, wody i cząstek mineralnych) są liniowymi funkcjami współrzędnej przestrzennej  $x$  (głębokości). Poza tym przyjęto, że wypadkowa gęstość ośrodka i moduł odciażenia zmieniają się według tego samego przepisu funkcyjnego. Przy takich uproszczeniach natury fizycznej uzyskano analityczne rozwiązanie dość złożonego problemu, przy czym w [8] rozwiązanie skonstruowano metodą odwrotną, natomiast w [9] — metodą bezpośrednią z wykorzystaniem konkretnego warunku brzegowego. Zastosowano tutaj metodę rozwinięcia poszczególnych segmentów frontu fali uderzeniowej w szeregi Taylora [12-16], przy czym współczynniki rozwinięcia obliczono z równań ruchu i warunków granicznych. Stosując analogiczną technikę konstrukcji rozwiązania w pracy [17] rozpatrzono problem odbicia się niestacjonarnej płaskiej fali uderzeniowej od ruchomej masywnej przegrody, umieszczonej w trójskładnikowym, niejednorodnym ośrodku LACHOWA [10]. Odnośnie niejednorodności ośrodka przyjęto analogicznie ograniczenia, jak w pracach [8, 9].

Okazuje się, że można skonstruować zamknięte rozwiązanie problemu propagacji niestacjonarnej fali uderzeniowej w ośrodku niejednorodnym dla znacznie szerszej klasy niejednorodności, niż rozpatrzono w pracach [8, 9, 17]. Problemem tym zajmiemy się w niniejszej publikacji.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale drugim formułujemy problem, a w trzecim konstruujemy ogólne jego rozwiązanie na froncie i za frontem fali, w tym i na brzegu półprzestrzeni. Rozpatrzono modele ciał gazowych, płynnych i stałych. W rozdziale czwartym przeanalizowano dość dokładnie model ośrodka trójskładnikowego.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy ruch półprzestrzeni wypełnionej niejednorodnym ośrodkiem politropowym ze stałym lub słabozmiennym oporem falowym [ $\varrho_0(x) a(x) \approx \text{const}$  lub  $d[\varrho_0(x) a(x)] \approx 0$ ] i liniowosprężystym odciążeniem (rys. 1). Założymy, że od powierzchni półprzestrzeni propaguje się w głąb ośrodka, ze zmienną prędkością  $D(t)$ , płaska fala uderzeniowa. Poza tym przyjmiemy, że  $D(t)$  jest znaną funkcją czasu. Wówczas rozwiązanie problemu na froncie i za frontem fali uderzeniowej, w tym i warunek brzegowy, są jednoznacznie zdeterminowane przez postać funkcji  $D(t)$ .



Rys. 1

Na froncie fali uderzeniowej, zgodnie z prawami zachowania masy i impulsu, mamy

$$(2.1) \quad \varrho_0(x)D(t) = \varrho_{01}(x)[D(t) - v_{01}(x)],$$

$$(2.2) \quad \varrho_0(x)D(t)v_{01}(x) = p_{01}(x) - p_0(x).$$

Poza tym, z politropowości ośrodka wynika, że

$$(2.3) \quad p_{01}(x) = p_0(x)\Phi\left[\frac{\varrho_{01}(x)}{\varrho_0(x)}\right] \quad \text{lub} \quad \varrho_{01}(x) = \varrho_0(x)\Psi\left[\frac{p_{01}(x)}{p_0(x)}\right],$$

gdzie indeksem „0” oznaczyliśmy parametry stanu ośrodka niezaburzonego przed frontem fali, natomiast indeksem „01” — parametry stanu na froncie fali uderzeniowej.

Ciągłym ruchem ośrodka za frontem fali uderzeniowej, zgodnie z przyjętymi założeniami, rządzą następujące równania:

$$(2.4) \quad v_{,t} = -\frac{1}{\varrho_0(x)}p_{,x}$$

$$(2.5) \quad \frac{\varrho_0(x)}{\varrho} = 1 + u_{,x}, \quad u_{,x} = \varepsilon,$$

$$(2.6) \quad p = p_{01}(x) - E(x)[u_{,x} - \varepsilon_{01}(x)].$$

Eliminując z (2.4), (2.5) i (2.6) funkcje  $v$ ,  $p$  i  $\varrho$ , otrzymujemy jedno ekwiwalentne równanie ruchu drugiego stopnia, w którym szukaną funkcją jest przemieszczenie  $u(x, t)$ . Ma ono postać

$$(2.7) \quad u_{,tt} = a^2(x)u_{,xx} + \frac{E'(x)}{\varrho_0(x)}u_{,x} - \frac{1}{\varrho_0(x)}[p'_{01}(x) + E'(x)\varepsilon_{01}(x) + E(x)\varepsilon'_{01}(x)],$$

gdzie prędkość propagacji zaburzeń  $a$  wyraża się wzorem

$$(2.8) \quad a(x) = \sqrt{\frac{E(x)}{\varrho_0(x)}}.$$

Z kolei równanie (2.7) można zastąpić równoważnym układem dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, spełnionych na charakterystykach

$$(2.9) \quad dx = \mp a(x)dt \quad \text{lub} \quad t = \pm \int_0^x \sqrt{\frac{\varrho_0(\xi)}{E(\xi)}} d\xi + \tau,$$

o następującej postaci:

$$(2.10) \quad dp = \mp d[\sqrt{\varrho_0(x)E(x)}v]; \quad d[\sqrt{\varrho_0(x)E(x)}] \approx 0.$$

Związki różniczkowe (2.10) po scałkowaniu przyjmują postać skończoną

$$(2.11) \quad p = \mp \sqrt{\varrho_0(x)E(x)}v + C^\pm, \quad \varrho_0(x)E(x) \approx \text{const.}$$

### 3. Rozwiązanie ogólne problemu

W ten sposób jednoznacznie sformułowaliśmy badany problem. Przejdziemy obecnie do skonstruowania jego rozwiązania.

W pierwszej kolejności określimy parametry stanu ośrodka na froncie fali uderzeniowej o następującym równaniu:

$$(3.1) \quad x = \varphi(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau.$$

Ze związków (2.1) i (2.2) oraz (2.3), po wyeliminowaniu funkcji  $\varrho_{01}(x)$  i  $v_{01}(x)$ , otrzymujemy

$$(3.2) \quad \Psi[z(t)][\alpha(t) + 1 - z(t)] = \alpha(t),$$

gdzie

$$(3.3) \quad z(t) = \frac{p_{01}[\varphi(t)]}{p_0[\varphi(t)]}, \quad \alpha(t) = \frac{\varrho_0[\varphi(t)]D^2(t)}{p_0[\varphi(t)]}.$$

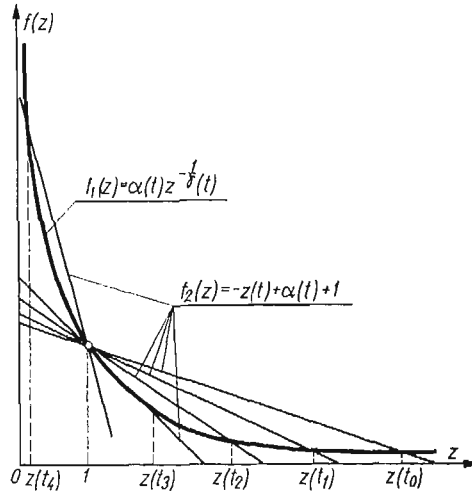
Równanie (3.2) w ogólnym przypadku jest równaniem przestępnym. Jego postać zależy od rodzaju funkcji  $\Psi[z(t)]$ . Na przykład dla gazu politropowego mamy

$$(3.4) \quad \Psi[z(t)] = z^{1/\gamma}(t)$$

i równanie (3.2) przyjmuje wówczas prostą postać

$$(3.5) \quad \alpha(t)z^{-1/\gamma}(t) = -z(t) + \alpha(t) + 1.$$

Łatwo wykazać (patrz rys. 2), że równanie (3.5) może posiadać trzy pierwiastki rzeczywiste. Jeden z nich, niezależnie od wartości prędkości propagacji frontu fali uderzeniowej  $D(t)$ , ma stałą wartość i wynosi  $z_1(t) \equiv 1$ . Jest to rozwiązanie trywialne, odpowiadające falom akustycznym. Drugi pierwiastek jest mniejszy od jedności i nie ma sensu fizycznego (rozrzedzeniowe fale uderzeniowe w normalnym gazie politropowym nie występują). Wreszcie trzeci pierwiastek, większy od jedności, jest poszukiwanym jednoznacznym roz-



Rys. 2

wiązaniem dla fali uderzeniowej. Przy dowolnych wartościach wykładnika politropy  $\gamma$  określamy go na ogół w sposób numeryczny. W szczególnych przypadkach otrzymujemy zamknięte rozwiązanie równania (3.5). I tak na przykład:

$$(3.6) \quad z(t) = \alpha(t) \quad \text{dla } \gamma = 1 \quad (\text{gaz izotermiczny [18]},$$

$$(3.7) \quad z(t) = \frac{1}{2} [2\alpha(t) + 1 + \sqrt{4\alpha(t) + 1}] \quad \text{dla } \gamma = 2 \quad \text{oraz}$$

$$(3.8) \quad z(t) = \sqrt[3]{-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^3}} + \sqrt[3]{-q_1 - \sqrt{q_1^2 + q_2^3}} \quad \text{dla } \gamma = 3,$$

gdzie

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{2(2+3\alpha)^3}{27} + \frac{(2+3\alpha)(3\alpha^2+3\alpha+1)}{3} - \alpha^3 \right],$$

$$q_2 = \frac{8\alpha^2 - 3\alpha - 1}{9}.$$

Z kolei dla ośrodka politropowego opisanego równaniem Taity (płyny [19] i ciała stałe [20]) mamy

$$(3.9) \quad \Phi \left[ \frac{\rho_{01}(x)}{\rho_0(x)} \right] = \frac{A_0(x)}{p_0(x)} \left\{ \left[ \frac{\rho_{01}(x)}{\rho_0(x)} \right]^n - 1 \right\} + 1.$$

Dalej z wzorów (2.1)-(2.3) po wykorzystaniu (3.9) otrzymujemy

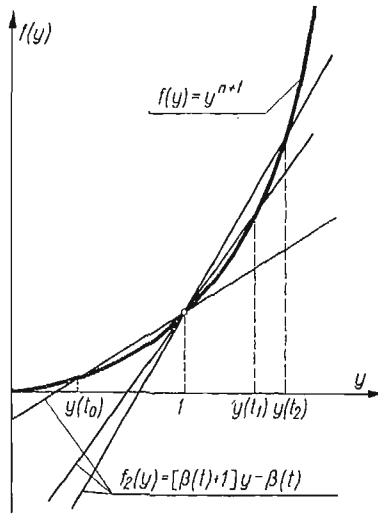
$$(3.10) \quad y^{n+1}(t) - [\beta(t) + 1]y(t) + \beta(t) = 0,$$

gdzie obecnie

$$(3.11) \quad y(t) = \frac{\rho_{01}[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]}, \quad \beta(t) = \left[ \frac{D(t)}{c_0(t)} \right]^2,$$

$$c_0^2(t) = \frac{A_0[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]} = \frac{a_0^2(t)}{n}, \quad a_0^2(t) = \frac{nA_0[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]}.$$

Równanie (3.10) posiada również trzy dodatnie pierwiastki rzeczywiste (patrz rys. 3). Warunki badanego problemu spełnia tylko pierwiastek  $z(t) > 1$ . Podobnie jak w przypadku gazu politropowego, pierwiastki równania (3.10) określamy na ogół numerycznie. Dla nie-



Rys. 3

których szczególnych wartości wykładnika  $n$  otrzymujemy rozwiązania zamknięte. Mają one postać

$$(3.12) \quad y(t) = \beta(t) \quad \text{dla} \quad n = 1,$$

$$(3.13) \quad y(t) = \frac{1}{2} \left| \sqrt{1 + 4\beta(t)} - 1 \right| \quad \text{dla} \quad n = 2 \quad \text{oraz}$$

$$(3.14) \quad y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[ \beta(t) + \frac{7}{27} \right]} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left[ \beta(t) + \frac{7}{27} \right]^2 + \left( \frac{2}{9} \right)^3} + \\ + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[ \beta(t) + \frac{7}{27} \right]} - \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left[ \beta(t) + \frac{7}{27} \right]^2 + \left( \frac{2}{9} \right)^3}.$$

Prędkość ruchu ośrodka na froncie fali uderzeniowej  $v_{01}$  określamy ze wzorów:

$$(3.15) \quad v_{01}[\varphi(t)] = \frac{a_1^2(t)}{D(t)} [z(t) - 1], \quad a_1(t) = \frac{p_0[\varphi(t)]}{\rho_0[\varphi(t)]},$$

lub

$$(3.15') \quad v_{01}[\varphi(t)] = D(t) \left[ 1 - \frac{1}{y(t)} \right].$$

Przejdziemy obecnie do rozwiązania problemu za frontem fali uderzeniowej. Wykorzystując związki na charakterystykach (2.11) (rys. 4), po przekształceniach otrzymujemy

$$(3.16) \quad p(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a(x_1)}{D(t_1)} p_0(x_1) - \frac{a(x_2)}{D(t_2)} p_0(x_2) + \left[ 1 - \frac{a(x_1)}{D(t_1)} \right] p_{01}(x_1) + \right. \\ \left. + \left[ 1 + \frac{a(x_2)}{D(t_2)} \right] p_{01}(x_2) \right\},$$

$$(3.17) \quad v(x, t) = \frac{1}{2\varrho_0(x)a(x)} \left\{ -\frac{a(x_1)}{D(t_1)} p_0(x_1) - \frac{a(x_2)}{D(t_2)} p_0(x_2) - \left[ 1 - \frac{a(x_1)}{D(t_1)} \right] p_{01}(x_1) + \right. \\ \left. + \left[ 1 + \frac{a(x_2)}{D(t_2)} \right] p_{01}(x_2) \right\},$$

gdzie

$$(3.18) \quad x_1 = \varphi(t_1) = \int_0^{t_1} D(t) dt, \quad t_1 = t - \int_x^{\varphi(t_1)} \frac{d\xi}{a(\xi)}, \\ x_2 = \varphi(t_2) = \int_0^{t_2} D(t) dt, \quad t_2 = t + \int_x^{\varphi(t_2)} \frac{d\xi}{a(\xi)}.$$

Rozwiązanie na brzegu półprzestrzeni otrzymujemy kładąc we wzorach (3.16)-(3.18)  $x = 0$ . Tym samym problem został rozwiązany.

#### 4. Propagacja fali uderzeniowej w niejednorodnym ośrodku trójskładnikowym

Rozpatrzmy propagację fali uderzeniowej w trójskładnikowym ośrodku LACHOWA [10] o następującym równaniu stanu:

$$(4.1) \quad \varrho = \varrho_0(x) \left\{ \alpha_1(x) \left[ 1 + \frac{\gamma_1(p-p_0)}{\varrho_1 c_1^2} \right]^{-1/\gamma_1} + \alpha_2(x) \left[ 1 + \frac{\gamma_2(p-p_0)}{\varrho_2 c_2^2} \right]^{-1/\gamma_2} + \right. \\ \left. + \alpha_3(x) \left[ 1 + \frac{\gamma_3(p-p_0)}{\varrho_3 c_3^2} \right]^{-1/\gamma_3} \right\}^{-1},$$

gdzie  $\varrho$  jest wypadkową gęstością ośrodka przy ciśnieniu  $p$ , natomiast  $\varrho_0(x)$  oznacza wypadkową gęstość przy ciśnieniu atmosferycznym  $p_0$ . Poza tym  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  są gęstościami właściwymi,  $c_1, c_2, c_3$  — prędkościami propagacji dźwięku,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — wykładnikami politrop,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — współczynnikami objętościowych zawartości dla poszczególnych składników: powietrza, wody i kwarcu.

Zgodnie z założeniami modelu Lachowa mamy

$$(4.2) \quad \varrho_0(x) = \alpha_1(x)\varrho_1 + \alpha_2(x)\varrho_2 + \alpha_3(x)\varrho_3,$$

$$(4.3) \quad \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) = 1.$$

Dodatkowo przyjmijmy, że  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$  i  $\alpha_3(x)$  są liniowymi funkcjami zmiennej  $x$ :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \alpha_1(x) &= \alpha_{01}(1+b_1x); & b_1 < 0; & |b_1x| < 1, \\ \alpha_2(x) &= \alpha_{02}(1+b_2x); & b_2 > 0; & 0 < \alpha_1(x) < \alpha_2(x) < 1, \\ \alpha_3(x) &= 1 - \alpha_{01} - \alpha_{02} - (\alpha_{01}b_1 + \alpha_{02}b_2)x. \end{aligned}$$

W takim przypadku gęstość początkowa  $\varrho_0(x)$  również w sposób liniowy zależy od głębokości  $x$  i ma postać

$$(4.5) \quad \varrho_0(x) = \varrho_0(0)(1+kx); \quad k > 0,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \varrho_0(0) &= \alpha_{01}\varrho_1 + \alpha_{02}\varrho_2 + (1 - \alpha_{01} - \alpha_{02})\varrho_3, \\ k &= \frac{1}{\varrho_0(0)} [\alpha_{01}\varrho_1b_1 + \alpha_{02}\varrho_2b_2 - (\alpha_{01}b_1 + \alpha_{02}b_2)\varrho_3]. \end{aligned}$$

Poza tym założymy, że moduł liniowego obciążenia  $E(x)$  wynosi

$$(4.7) \quad E(x) = E(0)(1+kx),$$

natomiast front fali uderzeniowej jest linią prostą o postaci

$$(4.8) \quad x = \varphi(t) = D_0t, \quad D_0 = \text{const.}$$

Wówczas charakterystyki (3.18) w strefie odciążenia są liniami prostymi o następujących równaniach:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} t + \frac{x}{a_0} &= \left(1 + \frac{D_0}{a_0}\right)t_1, & t_1 &= \frac{a_0}{a_0 + D_0} \left(t + \frac{x}{a_0}\right), \\ t - \frac{x}{a_0} &= \left(1 - \frac{D_0}{a_0}\right)t_2, & t_2 &= \frac{a_0}{a_0 - D_0} \left(t - \frac{x}{a_0}\right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.10) \quad a_0 = \sqrt{E(0)/\varrho_0(0)}.$$

W celu wprowadzenia obliczeń liczbowych przyjmujemy następujące wartości dla poszczególnych parametrów:

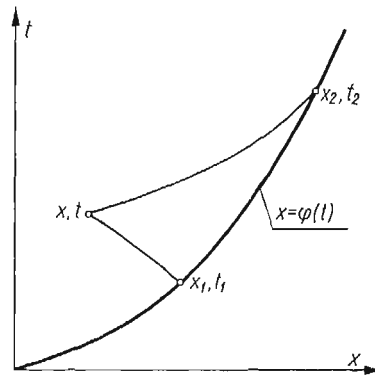
$$(4.11) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= 0,129 \text{ kg/m}^3; & \varrho_2 &= 100 \text{ kg/m}^3; & \varrho_3 &= 265 \text{ kg/m}^3 \\ c_1 &= 3,3 \cdot 10^2 \text{ m/s}; & c_2 &= 1,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}; \\ c_3 &= 4,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}; & a_0 &= 10^4 \text{ m/s}; \\ \gamma_1 &= 1,4; & \gamma_2 &= 7; & \gamma_3 &= 3; & p_0 &= 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2; \\ \alpha_{01} &= 0,02; & \alpha_{02} &= 0,40; & b_1 &= -10^{-6} \text{ 1/m}; & b_2 &= 2,10^{-8} \text{ 1/m}. \end{aligned}$$

Z wzorów (2.1) i (2.2) oraz równania stanu (4.1), po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(4.12) \quad \frac{p_{01}(x) - p_0}{\varrho_0(x)D_0^2} = 1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) \left\{ 1 - \frac{\gamma_i [p_{01}(x) - p_0]}{\varrho_i c_i^2} \right\}^{-1/\gamma_i}.$$

Jest to przestępne równanie, z którego w sposób numeryczny określamy funkcję  $p_{01}(x)$ . Z wykonanych obliczeń liczbowych wynika (patrz rys. 5), że ciśnienie  $p_{01}(x)$  dla przyjętych danych jest funkcją zbliżoną do linii prostej

$$(4.13) \quad p_{01}(x) \approx p_{01}(0) (1 - \lambda x); \quad \lambda > 0,$$



Rys. 4

gdzie

$$(4.14) \quad p_{01}(0) = p_0 + \varrho_0(0) D_0^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i(0) \left[ 1 - \frac{\gamma_i [p_{01}(0) - p_0]}{\varrho_i c_i^2} \right]^{-1/\gamma_i} \right\}.$$

Wartość współczynnika  $\lambda$  wynika z liniowej aproksymacji funkcji  $p_{01}(x)$  (patrz rys. 5). Prędkość na froncie fali można teraz wyrazić wzorem

$$(4.15) \quad v_{01}(x) = \frac{p_{01}(0)(1 - \lambda x) - p_0}{\varrho_0(0) D_0 (1 + kx)}.$$

Wprowadzając wyrażenia (4.8), (4.9) i (4.13) do wzorów (3.16) i (3.17) otrzymamy

$$(4.16) \quad p(x, t) = p_{01}(0) \left[ 1 - \lambda \left( \frac{2a_0^2}{a_0^2 - D_0^2} D_0 t - \frac{D_0^2 + a_0^2}{a_0^2 - D_0^2} x \right) \right]$$

oraz

$$(4.17) \quad v(x, t) = \frac{p_{01}(0)}{\varrho_0(0) a_0} \frac{1}{1 + kx} \left\{ \frac{a_0}{D_0} \left[ 1 - \frac{p_0}{p_{01}(0)} \right] - \lambda \left[ \frac{a_0^2 + D_0^2}{a_0^2 - D_0^2} a_0 t - 2 \frac{a_0 D_0}{a_0^2 - D_0^2} x \right] \right\}.$$

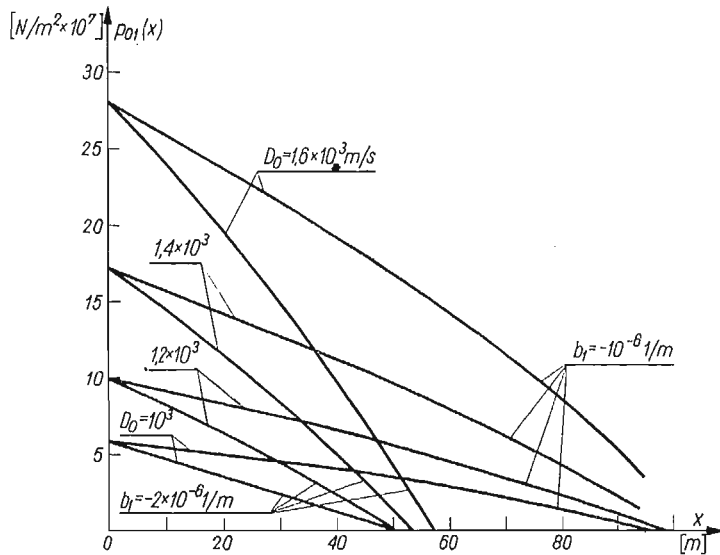
Kładąc w wyrażeniach (4.16) i (4.17)  $x = 0$ , otrzymamy odpowiednio ciśnienie działające na powierzchnię półprzestrzeni (warunek brzegowy) generujące prostopoliniową falę uderzeniową  $x = D_0 t$  oraz prędkość przemieszczania się tej powierzchni:

$$(4.18) \quad p(0, t) = p_{01}(0) \left[ 1 - \lambda \frac{2a_0^2}{a_0^2 - D_0^2} D_0 t \right],$$

oraz

$$(4.19) \quad v(0, t) = \frac{p_{01}(0)}{\varrho_0(0) a_0} \left\{ \frac{a_0}{D_0} \left[ 1 - \frac{p_0}{p_{01}(0)} \right] - \lambda \frac{a_0^2 + D_0^2}{a_0^2 - D_0^2} a_0 t \right\}.$$





Rys. 5

Wyprowadzone wzory otrzymaliśmy przy założeniu, że  $d[\varrho_0(x)a(x)] = \varrho_0(0)a_0 k \approx 0$ . Nie korzystając z tego założenia rozwiązanie problemu można skonstruować za pomocą funkcji Riemanna [8]. Wówczas ciśnienie na brzegu wyraża się skomplikowanym wzorem o następującej postaci:

$$(4.20) \quad p(0, t) = p_1 + p_2(t) + p_3(t),$$

gdzie

$$p_1 = p_{01}(0) \left( 1 - \frac{a_0^2}{D_0^2} \right),$$

$$p_2 = p_{01}(0) \left[ -\frac{\lambda}{k} \frac{a_0^2}{D_0^2} + \left( 1 + \frac{\lambda}{k} \right) \frac{a_0(a_0^2 - D_0^2)}{2D_0^2} \left( \frac{1}{ka_0 D_0 t + a_0 - D_0} + \frac{1}{ka_0 D_0 t + a_0 + D_0} \right) \right],$$

$$p_3 = 2p_{01}(0)(2A_1 - A_2) \left\{ -2 + \sqrt{\frac{P}{A_7}} + \sqrt{\frac{Q}{A_6 A_7}} + \frac{A_6 + 1}{2\sqrt{A_6}} \left( \arcsin \sqrt{\frac{A_6 A_7}{R}} - \arcsin \sqrt{\frac{Q}{R}} \right) + \frac{A_3}{A_4} \left\{ \left( \frac{1}{A_7 Y} - \frac{1}{2Y} \sqrt{\frac{A_7}{Y}} \right) \ln \left| \frac{\sqrt{Y} + \sqrt{A_7}}{\sqrt{Y} - \sqrt{A_7}} \right| \left| \frac{\sqrt{A_6 Y} - \sqrt{Q}}{\sqrt{A_6 Y} + \sqrt{Q}} \right| + \frac{2}{X} - \frac{A_7}{XY} + \left( \frac{1}{A_6 Y - Q} - \frac{1}{Y} \right) \sqrt{\frac{A_6 A_7}{Q}} - \frac{P+Q}{R} \left( \frac{A_6}{\sqrt{A_7 P}} + \sqrt{\frac{A_6}{A_7 Q}} \right) - \frac{A_6 A_7 S [P - (A_6 - 1)] - PY(2A_6 S - A_7)}{Y(PY + A_6 A_7 S) \sqrt{A_7 P}} + \frac{A_6 SQ(2Y + A_7) - A_7 Y [A_6 (A_6 - 1) S - Q]}{Y(A_7 Y + SQ) \sqrt{A_6 A_7 Q}} \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Y+A_6S}{Y\sqrt{A_6SY}} \left( \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{PY}{A_6A_7S}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A_7Y}{SQ}} \right) + \frac{A_3}{A_4} \left\{ \frac{2X+A_7}{X\sqrt{A_7X}} \left( \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A_7}{X}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{P}{Y}} \right) + \frac{2}{Y} + \frac{A_7}{XY} + \frac{(A_6-1)X-P}{X(X+P)} \sqrt{\frac{A_7}{Q}} + \frac{2R-(A_6+1)A_7}{R\sqrt{A_6A_7Q}} + \right. \\
& \left. + \frac{(A_6-1)R+(A_6+1)P}{A_6R\sqrt{A_7P}} + \frac{A_7V[(A_6-1)X-Q]-XQ(2V+A_6A_7)}{X(XQ+A_7V)\sqrt{A_6A_7Q}} - \right. \\
& \left. - \frac{PV(2X-A_7)-A_7X[A_6P-(A_6-1)V]}{X(A_6A_7X+PV)\sqrt{A_7P}} + \frac{A_6X+V}{X\sqrt{A_6XV}} \left( \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{XQ}{A_7V}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A_6A_7X}{PV}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$P = (A_6-1)t + A_7,$$

$$Q = (A_6-1)t + A_6A_7,$$

$$R = (A_6-1)t + (A_6+1)A_7,$$

$$X = t + \frac{A_5}{A_4},$$

$$Y = t + A_7 + \frac{A_5}{A_4},$$

$$S = \frac{A_5}{A_4} + \frac{t-A_7}{A_6},$$

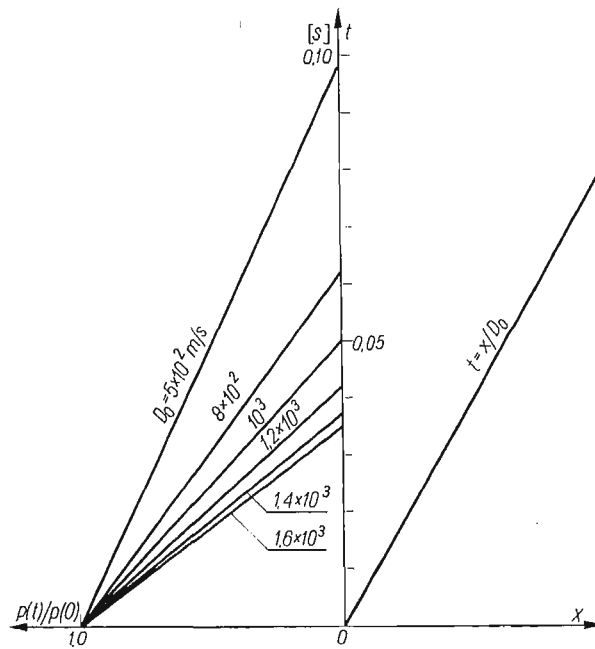
$$V = A_6t + (A_6+1)A_7 + \frac{A_5}{A_4},$$

$$A_1 = \frac{\lambda(a_0^2 - D^2)}{2kD^2}, \quad A_2 = \frac{\lambda}{k} \frac{a_0^2}{D^2},$$

$$A_3 = - \left( 1 + \frac{\lambda}{k} \right) \frac{a_0(a_0^2 - D^2)}{2D^2}, \quad A_4 = ka_0D,$$

$$A_5 = a_0 - D, \quad A_6 = \frac{a_0 + D}{a_0 - D}, \quad A_7 = \frac{2}{ka_0}.$$

W celu zbadania efektywności i dokładności przedstawionej w niniejszej pracy metody, porównano wyniki liczbowe uzyskane za pomocą obydwóch wzorów, tj. (4.18) i (4.20). Okazuje się, że wyniki te z dość dużą dokładnością pokrywają się (występują różnice na czwartym miejscu po przecinku) i na wykresach są nierozróżnialne (patrz rys. 6). Ze wzoru (4.18) i z liczbowych wyników uzyskanych za pomocą wzoru (4.20) wynika, że przyjętym założeniom odnośnie niejednorodności ośrodka prędkości propagacji fali uderzeniowej odpowiada liniowa zmiana ciśnienia na powierzchni półprzestrzeni (rys. 6). Wniosek ten ma kapitalne znaczenie praktyczne. Daje bowiem praktyczne wskazówki jak należy postępować w problemach oddziaływania fal naprężenia na obiekty fortyfikacyjne, umieszczone w niejednorodnych gruntach wieloskładnikowych.



Rys. 6

## Literatura cytowana w tekście

1. X. A. РАХМАТУЛИН, А. Я. САГОМОНЯН, Н. А. АЛЕКСЕЕВ, *Вопросы динамики грунтов*, Москва 1964.
2. X. A. РАХМАТУЛИН, Л. И. СТЕПАНОВА, *О распространении ударной волны взрыва в грунтах*, Сборник статей по взрыву, Изд. АН СССР, 1957.
3. Г. М. ЛЯХОВ, Р. А. ОСАДЧЕНКО, Н. И. ПОЛЯКОВА, *Плоские волны в неоднородных пластических средах и их взаимодействие с преградами*, ПМТФ, 4 (1969).
4. E. WŁODARCZYK, *Propagation of elastic-plastic and shock waves in a bar of finite length and monotone decreasing cross-sectional area*, Proc. Vibr. Probl., 7, 2 (1966).
5. E. WŁODARCZYK, *On a certain class of closed-form solutions of the propagation problem of a plane elastic-plastic stress wave in a nonhomogeneous medium*, Proc. Vibr. Probl., 7, 3 (1966).
6. E. WŁODARCZYK, *O pewnej klasie zamkniętych rozwiązań problemu propagacji kulistej i cylindrycznej fali obciążenia w niejednorodnym ośrodku sprężysto-plastycznym*, Biul. WAT, 15, 7 (1966).
7. Н. С. КОШЛЯКОВ, Э. Б. ГЛИНЕР, М. М. СМЕРНОВ, *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, Москва 1962.
8. E. WŁODARCZYK, LUC DU KHUONG, *Propagation of a plane shock wave in nonhomogeneous water saturated soil*, J. Techn. Phys., 17, 4 (1976).
9. E. WŁODARCZYK, LUC DU KHUONG, *Plane shock wave in a nonhomogeneous multicomponent medium*, J. Techn. Phys., 18, 2 (1977).
10. Г. М. ЛЯХОВ, *Ударные волны в многокомпонентных средах*, Изд. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1 (1958).
11. Г. М. РАХМАТУЛИН, *О распространении волн в многокомпонентных средах*, ПИММ, 33, 4 (1969).
12. F. SŁWALCZYK, E. WŁODARCZYK, *A method of solving the problem of propagation of a nonstationary plane shock wave in an inelastic medium*, Proc. Vibr. Probl., 12, 3 (1971).

13. E. WŁODARCZYK, *A closed-form solution of the propagation problem of plane shock wave in a polytropic plastic body with elastic unloading properties*, Proc. Vibr. Probl., **12**, 4 (1971).
14. E. WŁODARCZYK, *On the loading process behind the fronts of reflected and refracted shock waves in plastic layered media*, Proc. Vibr. Probl., **12**, 4 (1971).
15. E. WŁODARCZYK, *A closed-form solution of the propagation problem of an unloading shock wave in a bilinear elastic body*, Proc. Vibr. Probl., **13**, 3 (1972).
16. E. WŁODARCZYK, *Propagation of a plane loading shock wave in a bilinear elastic bar*, Proc. Vibr. Probl. **13**, 4 (1972).
17. E. WŁODARCZYK, LUC DU KHUONG, *Reflection of plane shock wave from a moving solid partition placed in nonhomogeneous three-component medium*, J. Techn. Phys. (w druku).
18. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Москва 1968.
19. R. H. COLE, *Underwater explosions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1948.
20. В. П. Чельшев, Б. И. Шехтер, Л. А. Шутко, *Об изменении давления на поверхности преграды при контактно-м взрыве заряда ВВ*, Физика взрыва, **6**, 2 (1970).

## Р е з ю м е

О НЕКОТОРОМ ЗАМКНУТОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ  
ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛИТРОПНОЙ СРЕДЕ  
С ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ РАЗГРУЗКОЙ

В работе представлено замкнутое решение задачи о распространении нестационарной плоской ударной волны в неоднородной политропной среде с постоянным и слабопеременным волновым сопротивлением ( $\rho a \approx \text{конст}$ ). Решение построено обратным методом. Получены замкнутые формулы для параметров состояния исследуемой среды на фронте и за фронтом волны. Рассмотрены примеры конкретных политропных сред. Построенное решение, кроме непосредственного практического значения, из-за аналитического характера является хорошим тестом для приближенных методов.

## S u m m a r y

ON A CERTAIN IN CLOSED-FORM SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF  
A PLANE SHOCK WAVE IN A NONHOMOGENEOUS PLASTIC POLYTROPIC MEDIUM

Problem of propagation of a non-stationary plane shock wave in a inhomogeneous polytropic medium with the constant or slightly variable wave resistance ( $\rho a \approx \text{const}$ ) was solved in the presented paper. The solution was constructed by the reciprocal method. The closed formulae were obtained defining the state parameters of the medium investigated at the wave front and behind the front. The examples of real polytropic media were analysed. The constructed solution, in addition to direct practical meaning, represents, in view of its closed form, a good test for the approximate methods.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA  
WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 października 1977 r.*