

ROZKŁAD CIŚNIEŃ I NOŚNOŚĆ HYDRODYNAMICZNEGO FILMU SMARNEGO
W ŁOŻYSKACH POROWATYCH

KAROL KRZEMIŃSKI (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

- L długość łożyska,
- W nośność łożyska,
- c luz promieniowy,
- h wysokość szczeliny smarnej,
- k_r, k_θ, k_z współczynniki przesączalności,
- p ciśnienie w szczelinie smarnej,
- p^* ciśnienie w tulei porowatej,
- w_0 prędkość przepływu cieczy w kierunku normalnym do powierzchni wewnętrznej tulei porowatej (wydatek na jednostkę powierzchni),
- ε mimośrodowość względna,
- η lepkość dynamiczna oleju.

1. Wstęp

W hydrodynamicznej teorii smarowania łożysk porowatych brak jest dotychczas wyczerpującej analizy wpływu cech geometrycznych łożyska porowatego na rozkład ciśnień w klinie smarnym i nośność łożyska. Określenie rozkładu ciśnień i nośności hydrodynamicznego filmu smarnego w łożyskach porowatych na drodze matematycznej uzyskuje się jako wspólne rozwiązanie równań ruchu cieczy w szczelinie smarnej i tulei porowatej. Występuje tutaj jednoczesny przepływ cieczy w dwóch ośrodkach, tj. w szczelinie smarnej i tulei porowatej oraz wzajemna cyrkulacja cieczy smarnej między nimi. Komplikuje to analizę zjawisk i w znacznym stopniu utrudnia rozwiązanie problemu.

Ruch cieczy w szczelinie smarnej w ogólnym przypadku opisać można równaniem Naviera-Stokesa, a przy wprowadzeniu pewnych uproszczeń równaniem Reynoldsa. Ruch cieczy w tulei porowatej opisuje się równaniem Laplace'a, które wyprowadza się w oparciu o równanie ciągłości przepływu cieczy z uwzględnieniem równania Darcy. Dotychczas brak jest ścisłych, analitycznych rozwiązań tych równań, jak również utrudniona jest numeryczna ich analiza.

Opublikowane rozwiązania równań ruchu cieczy w łożysku porowatym dotyczyły najczęściej przypadków uproszczonych, w których przyjmowano, że łożysko jest nieskończenie wąskie [2, 3] i wówczas pomijano w łożysku przepływ w kierunku obwodowym, lub że łożysko jest nieskończenie długie [7, 9], a wtedy zaniedbuje się przepływ osiowy. W obu

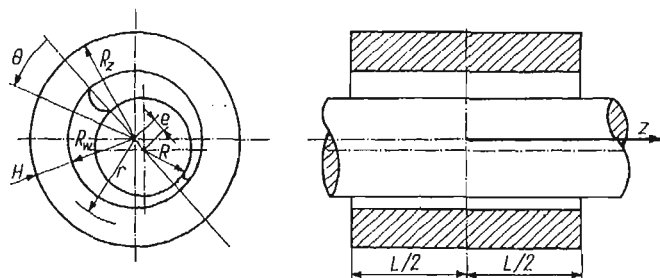
tych przypadkach zagadnienie sprowadza się do rozwiązania jednowymiarowego przepływu w szczelinie smarnej i dwuwymiarowego przepływu w tulei porowatej. Wyniki takich rozwiązań mają raczej charakter jakościowy i nie mogą być bezpośrednio odniesione do łożysk rzeczywistych o skończonej długości.

Nieliczne publikacje dotyczące łożysk porowatych o skończonej długości [8, 10] zawierają tylko zawężone, odnoszące się do szczególnych przypadków wyniki. Brak szerszej, teoretycznej i eksperymentalnej analizy zagadnienia w zasadniczym stopniu utrudnia ocenę zjawisk związanych z procesem hydrodynamicznego smarowania łożysk porowatych.

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki numerycznej analizy wpływu zarówno długości łożyska, jak i grubości tulei porowatej na rozkład ciśnień w klinie smarnej i nośność łożyska. Obliczenia dotyczą łożyska o skończonej długości z uwzględnieniem przestrzennego przepływu cieczy w łożysku. Przedstawione wyniki obejmują przypadki, w których tuleja porowata ma budowę izotropową lub anizotropową. Przeprowadzona analiza dotyczy izotermicznego ustalonego przepływu cieczy w łożysku przy założeniu, że ciecz jest newtonowska i nieściśliwa.

2. Równania ruchu cieczy w łożysku porowatym i metoda ich rozwiązania

Analizując łożysko porowate należy rozpatrzyć przepływ cieczy w dwóch obszarach (rys. 1), w szczelinie smarnej i w tulei porowatej. Ruch cieczy w szczelinie smarnej opisano równaniem Reynoldsa, a przepływ cieczy w tulei porowatej równaniem Laplace'a. Za-



Rys. 1. Schemat łożyska porowatego

niedbując siły masowe jako bardzo małe i przyjmując, że przepływ jest izotermiczny, a ciecz jest nieściśliwa, oba równania można napisać w postaci

$$(1) \quad \frac{1}{R_w^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{\partial h}{R_w \partial \theta} - w_0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_\theta \frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{r,r} \frac{\partial p^x}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial p^x}{\partial z} \right) = 0.$$

Rozwiązanie równań ruchu cieczy przeprowadzono przy następujących warunkach brzegowych:

— na powierzchniach czołowych łożyska ciśnienie równa się zeru (w analizie rozpatruje się nadciśnienie w stosunku do ciśnienia atmosferycznego), tzn. że

$$(3) \quad p\left(r, \theta, \pm \frac{L}{2}\right) = p^x\left(r, \theta, \pm \frac{L}{2}\right) = 0;$$

— tuleja jest wciśnięta w nieprzepuszczalny korpus, zatem

$$(4) \quad \frac{\partial p^x}{\partial r}(R_z, \theta, z) = 0;$$

— w płaszczyźnie symetrii łożyska gradient ciśnienia w kierunku osiowym równa się zeru, czyli

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, 0) = \frac{\partial p^x}{\partial z}(r, \theta, 0) = 0;$$

— na powierzchni wewnętrznej tulei zachodzą związki

$$(6) \quad \left[k_r \frac{\partial p^x}{\partial r} - w_0 \right] (R_w, \theta, z) = 0 \quad \text{oraz} \quad p(R_w, \theta, z) = p^x(R_w, \theta, z).$$

Obliczenia przeprowadzono przyjmując dla klina smarnego zarówno warunki graniczne Sommerfelda, jak i Reynoldsa zakładając, że w obu przypadkach szczelina smarna wypełniona jest całkowicie olejem.

Do rozwiązania równań ruchu cieczy w łożysku porowatym użyto metody elementów skończonych [1, 4, 6]. Obszar tulei porowatej i filmu smarnego podzielony został na pewne podobszary (przestrzenne, czworoboczne elementy skończone), w których poszukiwana funkcja reprezentująca rozkład ciśnień opisana została przez wartości ciśnień w punktach węzłowych elementu. Przebieg zmienności ciśnienia wewnątrz elementu określono poprzez funkcje kształtu elementu. Poszukiwane rozwiązanie otrzymuje się zgodnie z wariacyjną zasadą ekstremalną przez minimalizację funkcjonału, który reprezentuje energię rozproszoną w układzie. Dla obszaru szczeliny smarnej funkcjonał określa się według wzoru (7), a dla tulei porowatej wzorem (8):

$$(7) \quad F(p) = \int_S \int \left[-\frac{h^3}{24\eta R_w^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{h^3}{24\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} hU \frac{\partial p}{R_w \partial \theta} - w_0 p \right] ds,$$

$$(8) \quad F(p^x) = \int_{\Omega_1} \int \int -\frac{1}{2} \left[k_r \left(\frac{\partial p^x}{\partial r} \right)^2 + \frac{k_\theta}{r^2} \left(\frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial p^x}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega_1 + \int_S \int w_0 p ds,$$

gdzie Ω_1 jest obszarem tulei porowatej, S — powierzchnią wewnętrzną tulei porowatej.

W wyniku minimalizacji funkcjonałów $F(p)$ i $F(p^x)$ otrzymuje się układ równań liniowych z niewiadomymi ciśnieniami w punktach węzłowych

$$\frac{\partial F}{\partial \{\bar{p}\}} = [K]\{\bar{p}\} + \{G\} = 0, \quad \text{a stąd} \quad \{\bar{p}\} = -\{G\}[K]^{-1},$$

gdzie $\{\bar{p}\}$ oznacza macierz kolumnową ciśnień w punktach węzłowych, $[K]$, $\{G\}$ — macierze współczynników stałych.

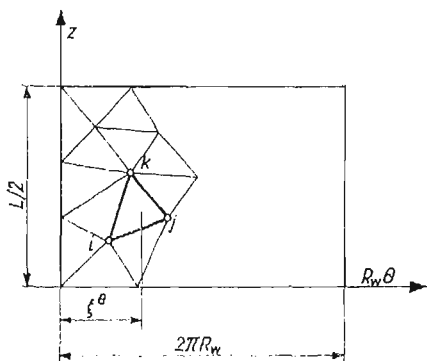
Otrzymane rozwiązanie jest równoważne w rozpatrywanym obszarze rozwiązaniu równań różniczkowych (1) i (2). Podano tutaj tylko ogólne zasady rozwiązania. Bliższe szczegóły oraz pełny algorytm rozwiązania zagadnienia można znaleźć w pracach [4, 6].

3. Obliczenie nośności łożyska oraz kąta działania wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego

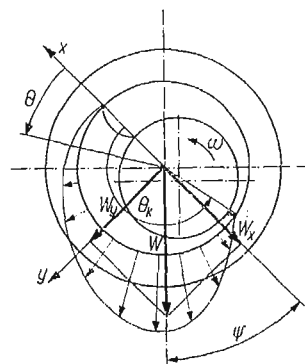
Po rozwiązaniu układu równań uzyskanych w wyniku minimalizacji funkcjonałów w obszarze tulei porowatej i filmu smarnego otrzymuje się ciśnienia w punktach węzłowych. Nośność łożyska oblicza się dokonując całkowania otrzymanych rozkładów ciśnień na powierzchni wewnętrznej tulei. Dla pojedynczego elementu trójkątnego leżącego na płaszczyźnie S wypadkową siłę hydrodynamicznego wyporu można określić ze wzoru

$$(9) \quad P^e = \iint_{\Delta} p R_w d\theta dz = \frac{\Delta}{3} (p_i + p_j + p_k) = \Delta \cdot p_{sr},$$

gdzie Δ oznacza pole trójkąta i, j, k .



Rys. 2. Podział powierzchni wewnętrznej tulei na elementy trójkątne



Rys. 3. Siły działające na powierzchnię wewnętrzną panwi

Współrzędną ξ^e punktu przyłożenia siły P^e znajduje się jako

$$(10) \quad \xi^e = \frac{\iint_{\Delta} R_w^2 \theta p d\theta dz}{\iint_{\Delta} p R_w d\theta dz} = \frac{\sum_{i=1}^3 R_i \theta_i (1 + \delta_{ij}) p_i}{4 \sum_{i=1}^3 p_i},$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Kąt działania wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego dla pojedynczego elementu wyniesie

$$(11) \quad \theta = \frac{\xi^e}{R_w}.$$

Pomijając siły tarcia jako małe, składowe wektora obciążenia zewnętrznego można obliczyć ze wzorów:

$$(12) \quad \begin{aligned} W_x &= \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{\theta_k} p \cos \theta R d\theta dz = \sum_1^N \Delta p_{sr} \cos \theta^e, \\ W_y &= \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{\theta} p \sin \theta R d\theta dz = \sum_1^N \Delta p_{sr} \sin \theta^e, \end{aligned}$$

gdzie N oznacza ilość elementów trójkątnych, na które podzielono powierzchnię S (są to powierzchnie boczne czworościanów przyległych do powierzchni S).

A zatem nośność łożyska można określić z zależności

$$(13) \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2},$$

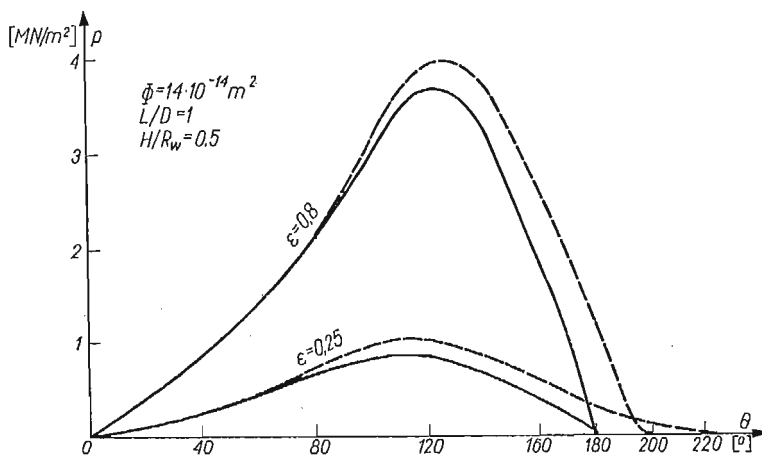
a kąt działania obciążenia ze wzoru

$$(14) \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{W_y}{W_x}.$$

4. Granice klina smarnego

Obliczenie nośności łożyska przeprowadzono zarówno dla klina smarnego rozciągającego się od $\theta = 0$ do $\theta = \pi$ (warunki Sommerfelda), jak również dla klina smarnego, którego początek określa kąt $\theta = 0$, a koniec znajduje się w miejscu $\theta_k = \theta$, gdzie $p = 0$ i $\partial p / r \partial \theta = 0$ (warunki Reynoldsa). Oba te warunki wykorzystywane są często w obliczeniach podawanych w różnych publikacjach, lecz brak jest precyzyjnej relacji między rozkładami ciśnień i nośnością łożysk uzyskiwanymi z obliczeń przy przyjęciu każdego z tych warunków.

Prostszy algorytm obliczeń uzyskuje się przyjmując dla klina smarnego warunki Sommerfelda; stąd ten uproszczony warunek przyjmowany jest przez wielu autorów [2, 3,

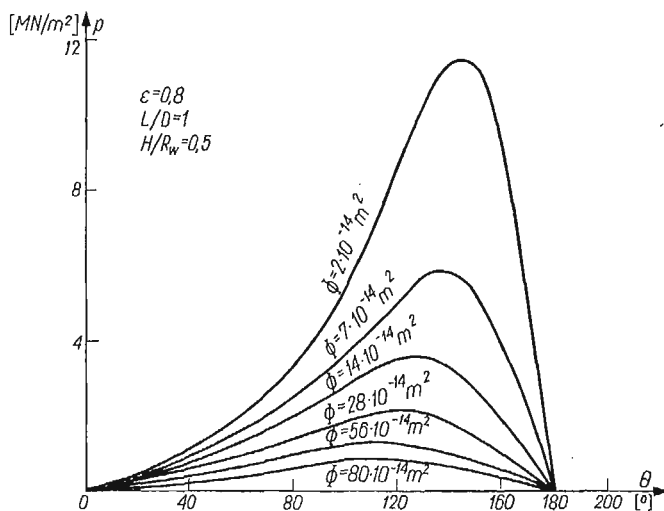


Rys. 4. Rozkłady ciśnień w klinie smarnym dla warunków granicznych Reynoldsa (linia przerywana) i Sommerfelda (linia ciągła)

7, 8]. Wprowadzenie do obliczeń warunków Reynoldsa uzyskuje się na drodze iteracyjnej, co kilkakrotnie przedłuża czas obliczeń. Na rys. 4 podano dla porównania rozkłady ciśnień w filmie smarnym uzyskane przy przyjęciu w obliczeniach warunków Reynoldsa oraz Sommerfelda. Przyjmując w obliczeniach warunki Reynoldsa otrzymuje się wzrost długości klina smarnego tym większy, im mniejsza jest mimośrodowość względna ε . W efekcie nośności klina smarnego liczonego według warunków Reynoldsa wypadają nieco większe w granicach 7—12% niż nośności liczone przy przyjęciu warunków Sommerfelda, przy czym większe przyrosty otrzymuje się dla mniejszych przepuszczalności i mniejszych ε .

5. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla tulei o różnych przepuszczalnościach

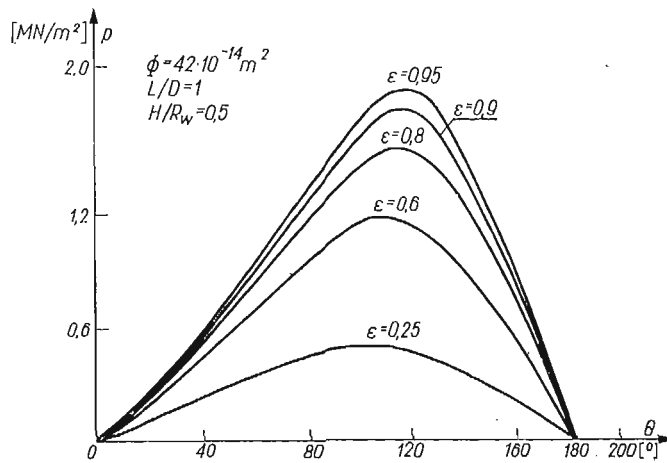
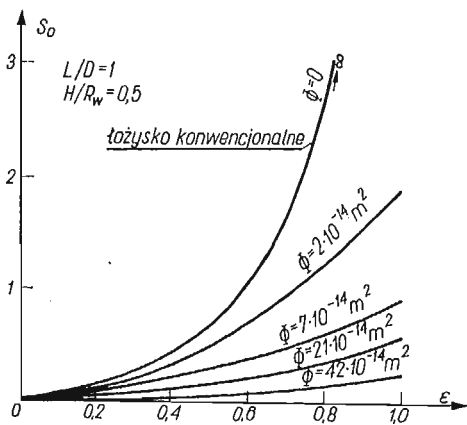
Przepuszczalność materiału panwi ma istotny wpływ na rozkład ciśnień w klinie smarnym, a w efekcie i na nośność łożyska. Im większa przepuszczalność, tym mniejsza nośność łożyska porowatego. Na rys. 5 przedstawiono rozkłady ciśnień w filmie smarnym uży-



Rys. 5. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk z panwiami o różnych przepuszczalnościach

skane przy założeniu, że panew porowata ma budowę izotropową. Obliczenia przeprowadzono przyjmując dla klina smarnego warunki Sommerfelda (w zakresie kąta $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ przyjęto ciśnienie $p = 0$). Dotyczy to również wszystkich dalej omawianych wyników. Na rys. 6 podane zostały rozkłady ciśnień dla łożyska z tuleją porowatą o przepuszczalności $\varphi = 42 \cdot 10^{-14} \text{ [m}^2\text{]}$ dla różnej mimośrodowości względnej ε .

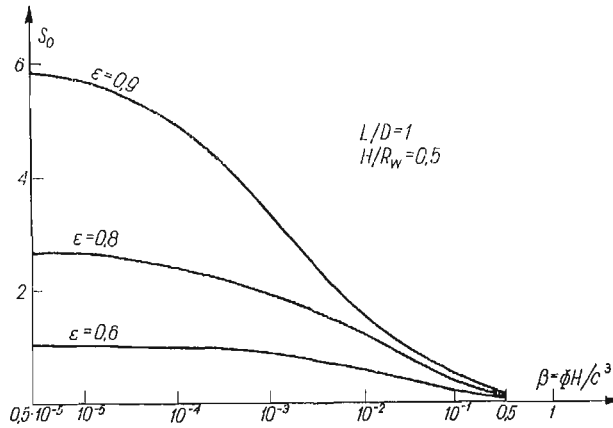
Przebiegi zmian nośności łożysk w zależności od ε dla porowatych panwi o różnych przepuszczalnościach przedstawiono na rys. 7, natomiast na rys. 8 podano zmianę nośności łożysk w zależności od przepuszczalności względnej tulei. Na obu rysunkach noś-

Rys. 6. Przebiegi ciśnień w filmie smarnym dla różnej wartości ϵ Rys. 7. Przebiegi zmian liczby Sommerfelda $S_0 = f(\epsilon)$ dla panwi o różnych przepuszczalnościach

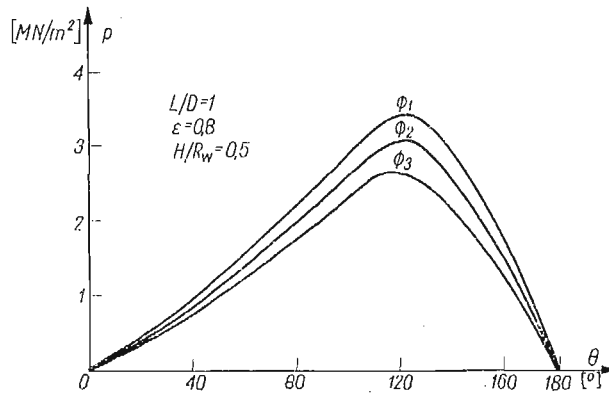
ność łożyska podano w postaci bezwymiarowej określając ją poprzez liczbę Sommerfeld'a

$$(15) \quad S_0 = \frac{p_{sr} c^2}{\omega R \eta} = \frac{W}{DL\eta\omega} \left(\frac{c}{R}\right)^2 = \frac{W}{2L\eta U} \left(\frac{c}{R}\right)^2$$

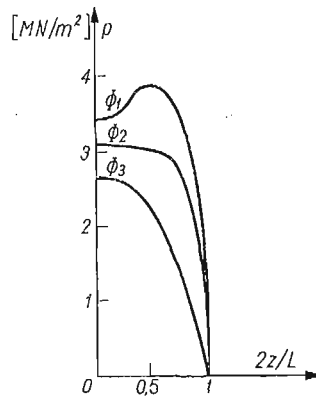
W praktyce produkowane tuleje porowate mają budowę anizotropową, a w zasadzie ortotropową. Ortotropowy rozkład przepuszczalności ma istotny wpływ na rozkład ciśnień w filmie smarnym i na nośność łożyska. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla tulei ortotropowych przedstawiono na rys. 9 i 10. Dla porównania na obu tych rysunkach naniesiono również rozkład ciśnień dla tulei izotropowej. Szczegółową analizę tego zagadnienia podano w pracy [5].



Rys. 8. Zmiana liczby Sommerfelda w zależności od porowatości względnej tulei $S_0 = f(\beta)$



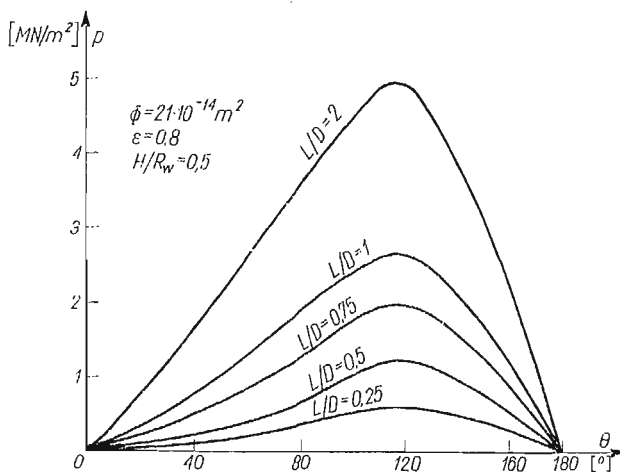
Rys. 9. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym w kierunku obwodowym dla łożysk z panwiami o ortotropowym rozkładzie przepuszczalności $\Phi_1 = 21(1 - 2z/L) \cdot 10^{-14}$ [m²], $\Phi_2 = 21 \cos \pi z/L \cdot 10^{-14}$ [m²] ($\Phi_3 = 21 \times 10^{-14}$ [m²] — panew izotropowa).



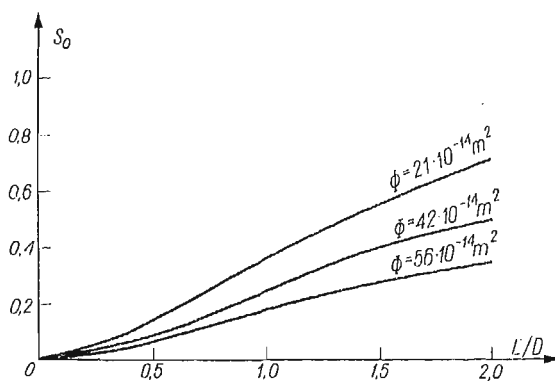
Rys. 10. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym w kierunku osiowym dla łożysk z panwiami o ortotropowym rozkładzie przepuszczalności $\Phi_1 = 21(1 - 2z/L) \cdot 10^{-14}$ [m²], $\Phi_2 = 21 \cos \pi z/L \cdot 10^{-14}$ [m²] (Φ_3 — panew izotropowa)

6. Wpływ długości i grubości ścianki tulei porowatej na nośność łożyska

Omawiane w poprzednich rozdziałach wyniki obliczeń dotyczyły łożysk, dla których długość panwi była równa jej średnicy wewnętrznej ($L/D = 1$). Jak zmieniają się rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk o różnych długościach przedstawiono na rys. 11.



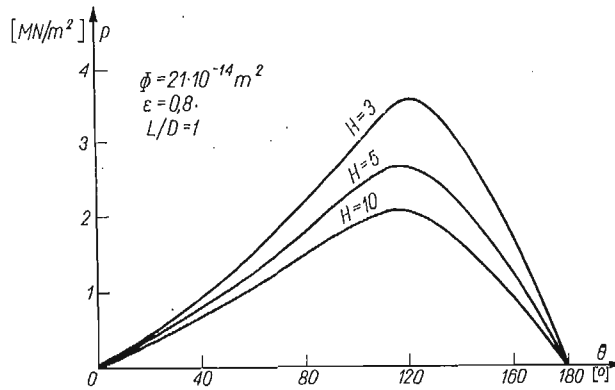
Rys. 11. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk o różnych długościach

Rys. 12. Przebiegi liczby Sommerfelda w funkcji L/D dla panwi o różnych przepuszczalnościach

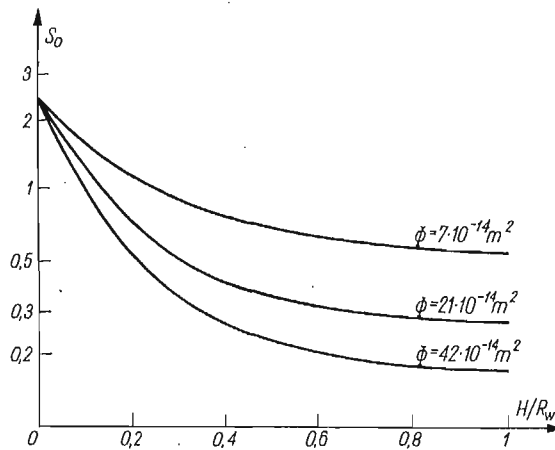
Można zauważyć, że strefa występowania wysokich ciśnień nie zmienia swego położenia wraz ze zmianą długości łożyska, a zatem kąt położenia wypadkowego wyporu hydrodynamicznego będzie stały, niezależny od długości łożyska. Natomiast wraz ze wzrostem długości łożyska następuje wyraźny wzrost ciśnienia w filmie smarnym, wzrasta zatem nośność łożyska.

Wpływ zmiany L/D na nośność łożyska przedstawiono na rys. 12. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że większe przyrosty nośności wraz ze wzrostem długości łożyska występują w przypadku łożysk z panwiami o mniejszych przepuszczalnościach.

Jeżeli wraz ze wzrostem długości panwi wzrasta nośność łożyska, to ze wzrostem grubości ścianki tulei porowatej zmniejsza się nośność łożyska. Na rys. 13 przedstawiono rozkłady ciśnień w klinie smarnym dla łożysk mających tuleje o różnych grubościach ścianki. Wyniki dotyczą tulei izotropowych o przepuszczalności $\Phi = 21 \cdot 10^{-14} \text{ [m}^2\text{]}$. Wraz ze wzrostem grubości tulei porowatej maleją ciśnienia w klinie smarnym i występuje wyraźne przesunięcie strefy maksymalnych ciśnień w kierunku środka klina smarnego, wzrasta zatem kąt ψ . Jak zmienia się nośność łożyska wraz ze zmianą grubości tulei porowatej przedstawiono na rys. 14. Analizowane wielkości podano w postaci bezwymiarowej.



Rys. 13. Rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla łożysk z tulejami o różnych grubościach ścianki $H = 3, 5, 10 \text{ mm}$



Rys. 14. Zmiana liczby Sommerfelda w funkcji H/R_w

Szczególnie duże zmiany nośności występują dla cienkich panwi łożyskowych i o większej przepuszczalności. Im cieńsza tuleja i o mniejszej przepuszczalności, tym nośność łożyska zbliża się bardziej do nośności łożyska konwencjonalnego.

Należy jednak pamiętać, że przedstawiona analiza dotyczy łożysk porowatych pracujących w warunkach tarcia płynnego, które jest możliwe tylko przy dodatkowym smarowaniu.

waniu i nie może być odniesiona bezpośrednio do łożysk porowatych pracujących jako samosmarowane.

7. Uwagi końcowe

Podsumowując przedstawione w niniejszym opracowaniu wyniki należy stwierdzić, że wymiary geometryczne tulei porowatej, jak i rozkład przepuszczalności wewnątrz tulei mają istotny wpływ na nośność łożyska porowatego.

Wyniki te mogą stanowić podstawę do racjonalnego doboru geometrii łożyska dla konkretnych warunków pracy. Mając określony ilościowy i jakościowy wpływ takich parametrów, jak długość tulei, grubość jej ścianki, przepuszczalność materiału porowatego i jej rozkład wewnątrz tulei na rozkład ciśnień w filmie smarnym i na nośność łożyska, można tak dobrać konstrukcję panwi, aby uzyskać łożysko o określonych własnościach użytkowych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. H. ARGYRIS, D. W. SCHARPF, *The incompressible lubrication problem*, J. Roy. Aero. Soc., 73 (1969)
2. A. CAMERON, *Basic lubrication theory*, London 1971.
3. A. CAPONE, *Lubrication of axially undefined porous bearings*, Wear, 3, 15 (1970).
4. K. KRZEMINSKI, *Nośność poprzecznych łożysk porowatych w warunkach hydrodynamicznego smarowania*, Praca dokt., Warszawa 1974.
5. K. KRZEMINSKI, *Wpływ anizotropii tulei porowatej na własności użytkowe łożyska ślizgowego*, Przegląd Mechaniczny, 22 (1976).
6. K. KRZEMINSKI, T. MARKS, *Zastosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach hydrodynamicznego smarowania poprzecznych łożysk ślizgowych*, Rozpr. Inż., 4 (1976).
7. P. R. K. MURTI, *Hydrodynamic lubrication of short porous bearings*, Wear, 19, 1 (1972).
8. P. R. K. MURTI, *Hydrodynamic lubrication of finite porous bearings*, Wear, 19, 1 (1972).
9. M. REMBIARZ, *Plaski przepływ oleju w łożysku ślizgowym z panewką porowatą*, Arch. Bud. Maszyn, 2 (1973).
10. B. REASON, D. DYER, *A numerical solution for the hydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings*, Proc. Inst. Mech. Eng., 7 (1973).

Р е з ю м е

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ В ПОРИСТЫХ ПОДШИПНИКАХ

В работе представлены результаты теоретического анализа распределения давления в смазочном слое и несущей способности пористых подшипников, работающих в условиях гидродинамической смазки. Уравнение движения жидкости решено методом конечных элементов. Определено влияние длины пористой втулки, толщины её стенки и анизотропного распределения проницаемости на распределение давления и несущую способность пористого подшипника.

S u m m a r y

THE PRESSURE DISTRIBUTION AND LOAD CAPACITY OF THE HYDRODYNAMIC FILM
IN POROUS BEARINGS

This work presents a theoretical analysis of the distribution of pressure and load capacity in the hydrodynamic porous bearings. Equation of motion of the lubricant was solved by finite element method. The results are presented concerning the influence of the length of the porous bush of its wall-thickness and anisotropic permeability distribution on the pressure distribution and load capacity.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1977 r.
