MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 16 (1978)

# O JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA PEWNYCH MIESZANYCH ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH DLA PÓŁPRZESTRZENI MIKROPOLARNEJ

STANISŁAW MATYSIAK, ANNA WACHECKA-SKOWRON (WARSZAWA)

## Oznaczenia

$\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ kartezjański układ współrzędnych prostokątnych,

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 > 0, x_2 \in R\},$$

$\partial D$ brzeg zbioru $D$, $\bar{D} = D \cup \partial D$,

$\mathbf{u}$ wektor przemieszczenia,

$\varphi$ wektor obrotu,

$\sigma_{ij}$ składowe tensora naprężeń siłowych,

$\mu_{ij}$ składowe tensora naprężeń momentowych,

$\mathbf{X} = (0, 0, X_3)$ wektor sił masowych,

$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, 0)$ wektor momentów masowych,

$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu$ stałe materiałowe,

$f_{,i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pochodna cząstkowa względem $x_i$,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad K = \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2},$$

$$K(0, \delta) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \delta^2\},$$

$C^k(B)$ klasa funkcji ciągłych wraz z pochodnymi do rzędu $k$ na $B$,

$\gamma_{ij}$ niesymetryczny tensor odkształcenia,

$\varkappa_{ij}$ niesymetryczny tensor skrętno-giętny.

## 1. Wstęp

Przedmiotem rozważań będą mieszane zagadnienia brzegowe dla półprzestrzeni sprężystej (opisujące zagadnienia szczelin w nieograniczonym ośrodku Cosseratów lub zagadnienia kontaktowe) rozpatrzone w ramach liniowej niesymetrycznej teorii sprężystości [1]. Załóżymy, że ośrodek znajduje się w drugim płaskim stanie odkształcenia opisanym przez wektory przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obrotu $\boldsymbol{\varphi}$ w postaci [2]

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = (0, 0, u_3), \quad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) = (\varphi_1, \varphi_2, 0). \tag{1.1}$$

Równania równowagi w tym przypadku są następujące:

$$\begin{aligned} &[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\varphi_1 + (\beta+\gamma-\varepsilon)k_{,1} + 2\alpha u_{3,2} + Y_1 = 0, \\ &[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\varphi_2 + (\beta+\gamma-\varepsilon)k_{,2} - 2\alpha u_{3,1} + Y_2 = 0, \\ &(\mu+\alpha)\nabla^2 u_3 + 2\alpha(\varphi_{2,1} - \varphi_{1,2}) + X_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ze stanem odkształcenia (1.1) związany jest stan naprężenia o składowych niezerowych:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{13} &= (\mu+\alpha)u_{3,1}+2\alpha\varphi_2,\\
\sigma_{23} &= (\mu+\alpha)u_{3,2}-2\alpha\varphi_1,\\
\sigma_{31} &= (\mu-\alpha)u_{3,1}-2\alpha\varphi_2,\\
\sigma_{32} &= (\mu-\alpha)u_{3,2}+2\alpha\varphi_1,\\
\mu_{11} &= (2\gamma+\beta)\varphi_{1,1}+\beta\varphi_{2,2},\\
\mu_{12} &= (\gamma+\varepsilon)\varphi_{2,1}+(\gamma-\varepsilon)\varphi_{1,2},\\
\mu_{22} &= (2\gamma+\beta)\varphi_{2,2}+\beta\varphi_{1,1},\\
\mu_{21} &= (\gamma+\varepsilon)\varphi_{1,2}+(\gamma-\varepsilon)\varphi_{2,1}.\\
\mu_{33} &= \frac{\beta}{2(\gamma+\beta)}(\mu_{11}+\mu_{22}),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

## 2. Twierdzenie o jednoznaczności

Rozpatrzmy mieszane zagadnienia brzegowe dla obszaru $\overline{D}$ opisane przez:

a) układ równań równowagi (1.2),

b) warunki brzegowe w postaci

$$
\begin{aligned}
\sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\
\mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in R,\\
\mu_{12}(0, x_2) &= f_4(x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in R,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
\sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\
\mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
\varphi_1(0, x_2) &= f_4(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\
\mu_{12}(0, x_2) &= f_5(x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in R,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
\sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\
\mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in R,\\
\mu_{12}(0, x_2) &= f_4(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
\varphi_2(0, x_2) &= f_5(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
\sigma_{13}(0, x_2) &= f_1(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
u_3(0, x_2) &= f_2(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\
\mu_{11}(0, x_2) &= f_3(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
\varphi_1(0, x_2) &= f_4(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\
\mu_{12}(0, x_2) &= f_5(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\
\varphi_2(0, x_2) &= f_6(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

c) warunki wypromieniowania w nieskończoności

$$\lim_{\delta\to+\infty} \int_{\partial\bar{K}(0,\delta)\cap D} (\sigma_{j3}u_3+\mu_{ji}\varphi_i)d\sigma = 0, \tag{2.5}$$

lub

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} u_3(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} |\mathbf{x}|\sigma_{j3}(\mathbf{x}) = 0, \tag{2.6}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} |\mathbf{x}|\mu_{ij} = 0, \quad i,j = 1,2,3, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Można zauważyć, że warunki lokalne (2.6) implikują warunki całkowe (2.5) (w obecnej pracy nie będziemy się zajmować szerszą dyskusją relacji pomiędzy lokalnymi i całkowymi warunkami wypromieniowania w nieskończoności). Rozpatrujemy również

d) warunki w punktach $(0, a)$ i $(0, -a)$ w postaci

(2.7) istnieje taka stała rzeczywista $M > 0$, że $|u_3| < M$, $|\varphi_i| < M$, $(i = 1,2)$ w $D$, [3] lub [3]

$$\begin{aligned} &\lim_{r_1\to0^+} \int_{\partial\bar{K}((0,a),r_2)\cap D} (\sigma_{j3}u_3+\mu_{ji}\varphi_i)d\sigma = 0,\\ &\lim_{r_2\to0^+} \int_{\partial\bar{K}((0,a),r_1)\cap D} (\sigma_{j3}u_3+\mu_{ji}\varphi_i)d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

O funkcjach $X_3, Y_1, Y_2, f_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ przyjmujemy, że istnieje dla nich rozwiązanie wyżej określonych zagadnień brzegowych w półpłaszczyźnie $\bar{D}$, które spełnia warunek

$$u_3, \varphi_1, \varphi_2 \in C^2(D)\cap C^1(\bar{D}-\{(0,a),(0,-a)\}).$$

Niech $\{u_3', \varphi_1', \varphi_2'\}$ oraz $\{u_3'', \varphi_1'', \varphi_2''\}$ spełniają równania równowagi (1.2), takie same warunki brzegowe (jeden z układów (2.1), (2.2), (2.3), (2.4)), identyczne warunki wypromieniowania w nieskończoności oraz taki sam z warunków (2.7) lub (2.8).

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} &\bar{u}_3 = u_3'-u_3'', && \bar{\varphi}_i = \varphi_i'-\varphi_i'', && i = 1,2,\\ &\bar{\gamma}_{ji} = \gamma_{ji}'-\gamma_{ji}'', && \bar{\varkappa}_{ji} = \varkappa_{ji}'-\varkappa_{ji}'', &&\\ &\bar{\sigma}_{ji} = \sigma_{ji}'-\sigma_{ji}'', && \bar{\mu}_{ji} = \mu_{ji}'-\mu_{ji}'', && \end{aligned} \tag{2.9}$$

gdzie (na podstawie związków geometrycznych i równań konstytutywnych dla drugiego płaskiego stanu odkształcenia [2]) oznaczono

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}_{j3} = \bar{u}_{3,j}-\varepsilon_{kj3}\bar{\varphi}_k,\\ &\bar{\varkappa}_{ji} = \bar{\varphi}_{i,j},\\ &\bar{\sigma}_{j,3} = (\mu+\alpha)\bar{\gamma}_{j3}+(\mu-\alpha)\bar{\gamma}_{3j}, \quad j = 1,2,\\ &\bar{\mu}_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\bar{\varkappa}_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\bar{\varkappa}_{ij}+\beta\bar{\varkappa}_{kk}\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Równania równowagi w naprężeniach dla wielkości z kreskami mają postać

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}_{23}-\bar{\sigma}_{32}+\bar{\mu}_{11,1}+\bar{\mu}_{21,2} = 0,\\ &\bar{\sigma}_{31}-\bar{\sigma}_{13}+\bar{\mu}_{12,1}+\bar{\mu}_{22,2} = 0,\\ &\bar{\sigma}_{13,1}+\bar{\sigma}_{23,2} = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Rozpatrzymy teraz następującą całkę

$$F = \int_A [2\mu\overline{\gamma}_{(i3)}\overline{\gamma}_{(i3)} + 2\alpha\overline{\gamma}_{\langle i3\rangle}\overline{\gamma}_{\langle i3\rangle} + 2\gamma\overline{\varkappa}_{(ij)}\overline{\varkappa}_{(ij)} + 2\varepsilon\overline{\varkappa}_{\langle ij\rangle}\overline{\varkappa}_{\langle ij\rangle} + \beta\overline{\varkappa}_{kk}\overline{\varkappa}_{nn}]dA, \tag{2.12}$$

gdzie $A$ oznacza obszar

$$A = [D\cap\overline{\mathbf{K}}(0,\delta)] - [D\cap\overline{K}((0,a),r_1)] - [D\cap\overline{K}((0,-a),r_2)].$$

Wykorzystując związki (2.10), (2.11), (2.12) możemy napisać

$$F = \int_A [(\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3)_{,j} + (\overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i)_{,j}]dA - \int_A [\varepsilon_{kji}\overline{\sigma}_{ij}\overline{\varphi}_k - \overline{\mu}_{ji,j}\overline{\varphi}_i - \overline{\sigma}_{j3,j}\overline{u}_3]dA. \tag{2.13}$$

Druga z całek w (2.13) jest równa zeru, co widać na podstawie równań równowagi (2.11). Pierwszą całkę możemy przedstawić w postaci

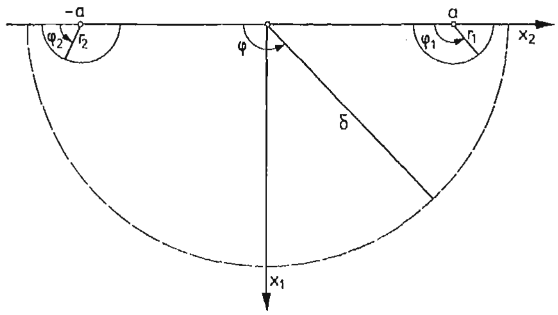
$$F = \int_{\partial A} [\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i]n_j d\sigma = -\int_L [\overline{\sigma}_{13}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{11}\overline{\varphi}_1 + \overline{\mu}_{12}\overline{\varphi}_2]dx_2 + \tag{2.14}$$

$$+\delta\int_0^\pi [\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i]n_j d\varphi + r_1\int_0^\pi [\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i]n_j d\varphi_1 + r_2\int_0^\pi [\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i]n_j d\varphi_2,$$

gdzie

$$L = [-\delta, -a-r_2] \cup [-a+r_2, a-r_1] \cup [a+r_1, \delta],$$

a pozostałe oznaczenia są podane na rys. 1.




Rys. 1

Załóżmy, że spełnione są warunki (2.8) i niech $\delta \to \infty$ oraz $r_1 \to 0^+$, $r_2 \to 0^+$. Wtedy pierwsza całka we wzorze (2.14) (po $L$) równa się zeru (gdyż wielkości $\overline{u}_3, \overline{\varphi}_i, \overline{\sigma}_{j3}, \mu_j$ spełniają warunki brzegowe (2.1) lub (2.2) lub (2.3) lub (2.4) — gdzie $f_i = 0, i = 1, 2, \ldots, 6$). Z przyjęcia warunków wypromieniowania (2.5) lub (2.6) wynika, że druga z całek w (2.14) znika. Trzecia i czwarta całka w (2.14) są równe zeru na podstawie (2.8). Otrzymaliśmy więc, że

$$F = 0. \tag{2.15}$$

Załóżmy teraz, że spełnione są warunki (2.7). Oznaczmy przez

$$f(r) = r\int_0^\pi (\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i)n_j d\varphi + r\int_0^\pi (\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i)n_j d\varphi = \tag{2.16}$$

$$= \int_{C_r} (\overline{\sigma}_{j3}\overline{u}_3 + \overline{\mu}_{ji}\overline{\varphi}_i)n_j d\varphi.$$

gdzie $C_r = (\partial\overline{K}((0,a),r)\cap D) \cup (\partial\overline{K}((0,-a),r)\cap D)$.

Można zauważyć, że

$$f(r) = \int_{C_r} (\bar{p}_3\bar{u}_3 + \bar{s}_l\bar{\varphi}_l)\, d\sigma, \quad \text{gdzie} \quad \bar{p}_3 = \bar{\sigma}_{j3}n_j, \quad \bar{s}_l = \bar{\mu}_{jl}n_j. \tag{2.17}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzimy oznaczenie

$$W = \frac{1}{2}[2\mu\bar{\gamma}_{(i3)}\bar{\gamma}_{(i3)} + 2\alpha\bar{\gamma}_{\langle i3\rangle}\bar{\gamma}_{\langle i3\rangle} + 2\gamma\bar{\varkappa}_{(ij)}\bar{\varkappa}_{(ij)} + 2\varepsilon\bar{\varkappa}_{\langle ij\rangle}\bar{\varkappa}_{\langle ij\rangle} + \beta\bar{\varkappa}_{ll}\bar{\varkappa}_{jj}]. \tag{2.18}$$

Możemy wtedy napisać, że (podobnie jak w [4])

$$f(r) = 2\int_A W\,dA - \int_{\partial\bar{K}(0,\delta)\cap\bar{D}} (\bar{\sigma}_{j3}\bar{u}_3 + \bar{\mu}_{jl}\bar{\varphi}_l)n_j\, d\sigma. \tag{2.19}$$

Obliczając pochodną funkcji $f$ otrzymujemy

$$f'(r) = -2\int_{C_r} W\,d\sigma \leqslant 0, \tag{2.20}$$

co oznacza, że funkcja $f$ jest monotonicznie malejąca.

Wykażemy teraz, że istnieje taka stała $c \geqslant 0$, dla której spełniona jest nierówność:

$$|f(r)| \leqslant c\sqrt{-rf'(r)}. \tag{2.21}$$

Widzimy, że

$$\begin{aligned} |f(r)| &= \Big|\int_{C_r} (\bar{p}_3\bar{u}_3 + \bar{s}_l\bar{\varphi}_l)\,d\sigma\Big| \leqslant \int_{C_r} |\bar{p}_3\bar{u}_3 + \bar{s}_l\bar{\varphi}_l|\,d\sigma \leqslant \int_{C_r} |\bar{p}_3\bar{u}_3|\,d\sigma + \\ &+ \int_{C_r} |\bar{s}_l\bar{\varphi}_l|\,d\sigma \leqslant \int_{C_r} \sqrt{\bar{p}_3\bar{p}_3}\sqrt{\bar{u}_3\bar{u}_3}\,d\sigma + \int_{C_r} \sqrt{\bar{s}_l\bar{s}_l}\sqrt{\bar{\varphi}_j\bar{\varphi}_j}\,d\sigma \leqslant \\ &\Big(\int_{C_r} \bar{p}_3\bar{p}_3\,d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\int_{C_r} \bar{u}_3\bar{u}_3\,d\sigma\Big)^{1/2} + \Big(\int_{C_r} \bar{s}_l\bar{s}_l\,d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\int_{C_r} \bar{\varphi}_j\bar{\varphi}_j\,d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 8M\sqrt{\pi r}\Big[\Big(\int_{C_r} \bar{p}_3\bar{p}_3\,d\sigma\Big)^{1/2} + \Big(\int_{C_r} \bar{s}_l\bar{s}_l\,d\sigma\Big)^{1/2}\Big], \end{aligned} \tag{2.22}$$

bo $|\bar{u}_3| = |u_3' - u_3''| \leqslant |u_3'| + |u_3''| \leqslant 2M$, analogicznie $|\bar{\varphi}_1| \leqslant 2M$, $|\bar{\varphi}_2| \leqslant 2M$, a $\int_{C_r} d\sigma = 2\pi r$.

Dalej mamy

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \bar{p}_3\bar{p}_3\,d\sigma &= \int_{C_r} \bar{\sigma}_{j3}n_j\bar{\sigma}_{k3}n_k\,d\sigma \leqslant \int_{C_r} \bar{\sigma}_{j3}\bar{\sigma}_{j3}\,d\sigma, \\ \int_{C_r} \bar{s}_l\bar{s}_l\,d\sigma &= \int_{C_r} \bar{\mu}_{jl}n_j\bar{\mu}_{kl}n_k\,d\sigma \leqslant \int_{C_r} \bar{\mu}_{jl}\bar{\mu}_{jl}\,d\sigma, \end{aligned} \tag{2.23}$$

a więc

$$\int_{C_r} (\bar{p}_3\bar{p}_3 + \bar{s}_l\bar{s}_l)\,d\sigma \leqslant \int_{C_r} (\bar{\sigma}_{j3}\bar{\sigma}_{j3} + \bar{\mu}_{jl}\bar{\mu}_{jl})\,d\sigma \leqslant \frac{1}{k^2}\int_{C_r} W\,d\sigma = -\frac{1}{2k^2}f'(r), \tag{2.24}$$

gdzie wykorzystano dodatnią określoność $W$, tzn. istnienie takiej stałej $k > 0$, że $W(\bar{\sigma}_{j3}, \bar{\mu}_{jl}) \geqslant k^2(\bar{\sigma}_{j3}\bar{\sigma}_{j3} + \bar{\mu}_{jl}\bar{\mu}_{jl})$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in D$.

Z powyższych nierówności wynika, że

$$(2.25)\qquad \Big(\int_{C_r} \bar{p}_3\bar{p}_3\, d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{\int_{C_r} (\bar{p}_3\bar{p}_3 + \bar{s}_i\bar{s}_i)\, d\sigma} \leqslant \sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)},$$

$$\Big(\int_{C_r} \bar{s}_i\bar{s}_i\, d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{\int_{C_r} (\bar{p}_3\bar{p}_3 + \bar{s}_i\bar{s}_i)\, d\sigma} \leqslant \sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)},$$

czyli

$$(2.26)\qquad \Big(\int_{C_r} \bar{p}_3\bar{p}_3\, d\sigma\Big)^{1/2} + \Big(\int_{C_r} \bar{s}_i\bar{s}_i\, d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant 2\sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)}.$$

Funkcję $f$ możemy więc oszacować w następujący sposób

$$(2.27)\qquad |f(r)| \leqslant 8M\sqrt{\pi r}\cdot 2\sqrt{-\frac{1}{2k^2} f'(r)} = \frac{8M}{k}\sqrt{-2\pi r f'(r)},$$

istnieje więc stała $c\left(c = \dfrac{8M}{k}\sqrt{2\pi}\right)$, że $|f(r)| \leqslant c\sqrt{-rf'(r)}$.

Można pokazać, że ponieważ funkcja $f(r)$ jest monotonicznie malejąca oraz spełniony jest warunek (2.21), to $\lim_{r\to 0^+} f(r) = 0$ (dowód w [4]). Oznacza to, że we wzorze (2.14) przy założeniu (2.7) całki trzecia i czwarta są równe zeru. Ponieważ wielkości $\bar{u}_3, \bar{\varphi}_i, \bar{\sigma}_{j3}, \bar{\mu}_{ji}$ spełniają warunki brzegowe (2.1) lub (2.2) lub (2.3) lub (2.4) — gdzie $f_i = 0$, to pierwsza całka w (2.14) znika. Przy założeniu, że $\delta \to \infty$ zarówno z warunków (2.5) jak i (2.6) wynika, że druga całka w (2.14) jest równa zeru, czyli $F = 0$.

Ponieważ $F$ jest formą kwadratową dodatnio określoną (wzór (2.12)), to (2.15) jest równoważne warunkom:

$$(2.28)\qquad \bar{\gamma}_{i3} = 0, \quad \bar{\varkappa}_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in D.$$

Z (2.28) i (2.10) wynika, że

$$(2.29)\qquad \bar{\sigma}_{i3} = 0, \quad \bar{\mu}_{ij} = 0.$$

Na podstawie (2.28), (2.29) i (1.3) można sformułować następujące twierdzenie:

Zagadnienie brzegowe dla obszaru $\bar{D}$ sformułowane przez równania równowagi (1.2), warunki brzegowe (2.1) lub (2.2) lub (2.3) lub (2.4), warunki wypromieniowania w nieskończoności (2.5) lub (2.6) oraz warunki (2.7) lub (2.8) jest jednoznaczne względem naprężeń i odkształceń $\sigma_{j3}, \mu_{ij}, \gamma_{i3}, \varkappa_{ij} \in C^1(D) \cap C(\bar{D} - \{(0, a), (0, -a)\})$.

### Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. NOWACKI, *The «Second» Plane Problem of Micropolar Elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **18** (1970).
3. Praca zbiorowa red. W. D. KUPRADZE, *Wybrane zagadnienia teorii sprężystości i termosprężystości*, Wyd. PAN, 1970.
4. J. K. KNOWLES, T. A. PUCIK, J. of Elasticity, **3**, 3 (1973).

Р е з ю м е

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МИКРОПОЛЯРНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассмотрена однозначность решений в области $\bar{D} = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \in R\}$ для системы уравнений равновесия «второго» плоского деформированного состояния линейной несиметричной теории упругости со смешанными краевыми условиями в классе функций $C^2(D) \cap C^1(D - \{(0, a), (0, a)\})$.

S u m m a r y

ON UNIQUENESS OF SOLUTION OF MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MICROPOLAR HALF-SPACE

In the present paper the problem of uniqueness of solutions is considered for a system of equilibrium equations of the second plane state of strain of the linear micropolar elasticity in the case of a mixed boundary value problem defined in the region $\bar{D} = \{(x_1, x_2) \in R^2:\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \in R\}$.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 sierpnia 1977 r.*
*Ponownie 13 marca 1978 r.*