

OPTYMALNY DOBÓR BEZINERCYJNEGO UKŁADU AMORTYZACJI PRZY WYMUSZENIU
HARMONICZNYM

JAN ŁUCZKO (KRAKÓW)

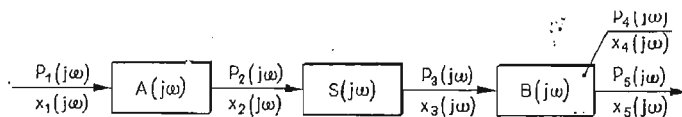
1. Wstęp

W pracy rozważono ustalone drgania układu liniowego wymuszanego harmonicznie, reprezentującego klasę układów mechanicznych typu: obiekt-amortyzator-otoczenie. Założono, że układ amortyzacji jest bezinercyjny i określono jego optymalne parametry przy przyjęciu stosownego kryterium jakości działania układu wibroizolacji. Układ mechaniczny strukturalnie traktowany jest jako zespół czwórników połączonych łańcuchowo [1], [2]. Podobny sposób podejścia do zagadnienia wibroizolacji można znaleźć w pracach Gureckiego i Mazina [3], [4].

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzmy ustalone drgania pasywnego układu liniowego przedstawionego na rys. 1.

Układ **A** przedstawia obiekt (narzędzie wibracyjne) poddany wymuszeniu kinematycznemu lub siłowemu, element **S** układu jest amortyzatorem natomiast układ **B** reprezentuje otoczenie (człowiek — operator, zamocowanie obiektu). Celem dalszych rozważań będzie dobranie układu amortyzacji w taki sposób, aby przekazywanie drgań z obiektu na oto-



Rys. 1

czenie było minimalne. Będziemy uważać, że elementy **A**, **S** i **B** układu mechanicznego są co do struktury, czwórnikami połączonymi łańcuchowo [1]. Założymy ponadto, że są one liniowymi układami pasywnymi o dowolnej liczbie stopni swobody, określonymi przez odpowiednie macierze przejścia [2]. Stan wibracji w dowolnym punkcie „*k*” układu ($k = 1-5$) określimy przez wektor $q_k(j\omega) = [P_k(j\omega), x_k(j\omega)]^T$ przy czym $P_k(j\omega)$ i $x_k(j\omega)$ są transformatami siły i przemieszczenia w rozpatrywanym punkcie układu. Pomiedzy dwoma dowolnymi punktami zachodzą związki:

$$(2.1) \quad q_i(j\omega) = F_{k-i}(j\omega)q_k(j\omega)$$

$$(2.2) \quad F_{k-n}(j\omega) = F_{l-n}(j\omega)F_{k-l}(j\omega)$$

oznaczymy:

$$(2.3) \quad F_{1-2}(j\omega) = \mathbf{A}(j\omega) \quad F_{2-3}(j\omega) = \mathbf{S}(j\omega) \quad F_{3-5}(j\omega) = \mathbf{B}(j\omega)$$

przy czym $\mathbf{A}(j\omega)$, $\mathbf{S}(j\omega)$, $\mathbf{B}(j\omega)$ są kwadratowymi macierzami przejścia układów \mathbf{A} , \mathbf{S} i \mathbf{B} .

Kryterium jakości działania układu amortyzacji zostanie przyjęte jako zależne od przyspieszenia $(j\omega)^2 x_4(j\omega)$ dowolnego punktu układu \mathbf{B} i przemieszczenia względnego amortyzatora $x_3(j\omega) - x_2(j\omega)$. Wprowadzimy wielkości bezwymiarowe odnosząc przyspieszenie punktu „4” do przyspieszenia $(j\omega)^2 x_4^0(j\omega)$ tego samego punktu, obliczonego dla sztywnego połączenia układów \mathbf{A} i \mathbf{B} , zaś amplitudę ruchu względnego amortyzatora do amplitudy $x_2^0(j\omega)$ ruchu swobodnego obiektu \mathbf{A} (układy \mathbf{A} i \mathbf{B} niepołączone). Przyjmijemy funkcjonał w postaci:

$$(2.4) \quad \mathbf{J} = \left| \frac{-\omega^2 x_4(j\omega)}{-\omega^2 x_4^0(j\omega)} \right|^2 + \lambda \left| \frac{x_3(j\omega) - x_2(j\omega)}{x_2^0(j\omega)} \right|^2,$$

gdzie $\lambda \geq 0$ jest współczynnikiem wagi.

Tak wybrany funkcjonał (24) zapewni nam więc z jednej strony minimum przyspieszenia pewnego punktu należącego do otoczenia (np. człowieka-operatora) lub obiektu, jeśli zamienić rolami układy \mathbf{A} i \mathbf{B} , zaś z drugiej strony będzie minimalny ruch względny amortyzatora co jest pożądane ze względu na ograniczenia konstrukcyjne i eksploatacyjne nałożone w praktyce na układ amortyzacji.

3. Synteza układu wibroizolacji

Założymy dalej, że układ amortyzacji jest układem bezinercyjnym; określonym w związku z tym przez macierz przejścia o elementach:

$$(3.1) \quad s_{11}(j\omega) = s_{22}(j\omega) = 1 \quad s_{12}(j\omega) = 0 \quad s_{21}(j\omega) = [C + j\omega b]^{-1},$$

gdzie współczynniki c i b określają odpowiednio własności sprężyste i tłumiące układu amortyzacji. Są one zależne od częstości wymuszenia ω oraz od pewnych parametrów p_i ($i = 1, 2, \dots, r$), których ilość jest zależna od struktury przyjętego amortyzatora

$$(3.2) \quad \begin{aligned} c &= c(\omega, p_1, p_2, \dots, p_r), \\ b &= b(\omega, p_1, p_2, \dots, p_r). \end{aligned}$$

Przykładowo dla modelu Voigta-Kelvina (rys. 2a) zależności (3.2) przyjmą prostą postać:

$$c = p_1 \quad b = p_2$$

zaś dla modelu standartowego (rys. 2b) otrzymamy:

$$c = p_1 + p_3 \frac{\omega^2 p_2^2}{p_3^2 + \omega^2 p_2^2} \quad b = p_2 \frac{p_3^2}{p_3^2 + \omega^2 p_2^2}.$$

Problem optymalnego doboru układu wibroizolacji sprowadza się więc do znalezienia współczynników p_i ($i = 1, 2, \dots, r$), dających minimum wyrażenia (2.4) przy warunku nieprzekroczenia przez wielkości $|x_4(j\omega)|$ i $|x_3(j\omega) - x_2(j\omega)|$ odpowiednich wartości granicznych $|x_4^0(j\omega)|$ i $|x_2^0(j\omega)|$.

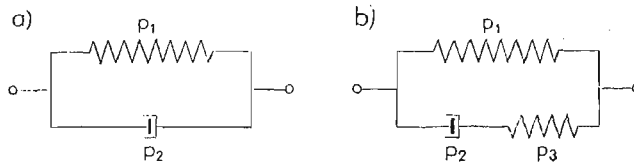
Rozważmy przypadek wymuszenia kinematycznego ($n = 1$) i siłowego ($n = 2$). Układ BSA, przedstawiony na rys. 1, można zawsze sprowadzić do układu nieobciążonego siłą na końcu $P_5(j\omega) = 0$ ($m = 1$) lub sztywno zamocowanego $x_5(j\omega) = 0$ ($m = 2$). Wykorzystując te warunki brzegowe można ze związku:

$$(3.3) \quad q_5(j\omega) = \text{BSA} q_1(j\omega)$$

znaleźć impedancję (sztywność dynamiczną) $Z_1(j\omega)$ lub admitancję (podatność dynamiczną) $Y_1(j\omega)$ w punkcie „1” układu. Otrzymamy następujące zależności dla wymuszenia kinematycznego lub siłowego:

$$(3.4) \quad P_1(j\omega) = Z_1(j\omega)x_1(j\omega),$$

$$(3.5) \quad x_1(j\omega) = Y_1(j\omega)P_1(j\omega).$$



Rys. 2

Korzystając ze wzorów (2.1), (2.2), (2.3) oraz (3.4) lub (3.5) można wyrazić wszystkie wielkości występujące w wyrażeniu (2.4) za pomocą danego wymuszenia kinematycznego lub siłowego. W zależności od zamocowania układu ($m = 1, 2$) i przyjętego rodzaju wymuszenia ($n = 1, 2$) funkcjonal (2.4) przyjmie postać:

$$(3.6) \quad J^{nm} = |K_{\ddot{x}_4}^{nm}(j\omega)|^2 + \lambda |K_{x_3-x_2}^{nm}(j\omega)|^2,$$

przy czym:

$$(3.7) \quad K_{\ddot{x}_4}^{nm}(j\omega) = \frac{a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}}{a_{1n}b_{m1}s_{11} + a_{2n}b_{m1}s_{12} + a_{1n}b_{m2}s_{21} + a_{2n}b_{m2}s_{22}},$$

$$K_{x_3-x_2}^{nm}(j\omega) = \frac{a_{1n}b_{m1}(s_{11}-1) + a_{1n}b_{m2}s_{21}}{a_{1n}b_{m1}s_{11} + a_{2n}b_{m1}s_{12} + a_{1n}b_{m2}s_{21} + a_{2n}b_{m2}s_{22}}.$$

gdzie $a_{ij}(j\omega)$, $b_{ij}(j\omega)$, $s_{ij}(j\omega)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) są elementami odpowiednich macierzy przejścia $A(j\omega)$, $B(j\omega)$ i $S(j\omega)$.

Jak widać w wyrażeniach (3.7) zawarte są parametry znanych układów A i B oraz szukane parametry $c(\omega, p_1, \dots, p_r)$ i $b(\omega, p_1, \dots, p_r)$ określające optymalny amortyzator. Jeżeli współczynniki c i b zwiążemy liniowo z nowymi zmiennymi y i z poprzez funkcje częstości:

$$(3.8) \quad c = \frac{\varphi_1^{nm}(\omega)}{[\gamma^{nm}(\omega)]^2} y \quad b = \frac{\varphi_2^{nm}(\omega)}{[\gamma^{nm}(\omega)]^2} z$$

gdzie:

$$(3.9) \quad \varphi_1^{nm}(\omega) = \text{Re}(a_{1n}b_{m2})\text{Re}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}) + \text{Im}(a_{1n}b_{m2})\text{Im}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}),$$

$$(3.10) \quad \varphi_2^{nm}(\omega) = \text{Im}(a_{1n}b_{m2})\text{Re}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}) - \text{Re}(a_{1n}b_{m2})\text{Im}(a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}),$$

$$(3.11) \quad \gamma^{nm}(\omega) = |a_{1n}b_{m1} + a_{2n}b_{m2}|,$$

to wielkości występujące we wzorze (3.6) wyrażą się związkami:

$$(3.12) \quad |K_{\ddot{x}_4}^{nm}(j\omega)|^2 = \frac{y^2 + [\mu^{nm}(\omega)]^2 z^2}{(1+y)^2 + [\mu^{nm}(\omega)]^2 (1+z)^2},$$

$$|K_{x_3-x_2}^{nm}(j\omega)|^2 = \frac{1 + [\mu^{nm}(\omega)]^2}{(1+y)^2 + [\mu^{nm}(\omega)]^2 (1+z)^2},$$

przy czym:

$$\mu^{nm}(\omega) = \frac{\varphi_2^{nm}(\omega)}{\varphi_1^{nm}(\omega)}.$$

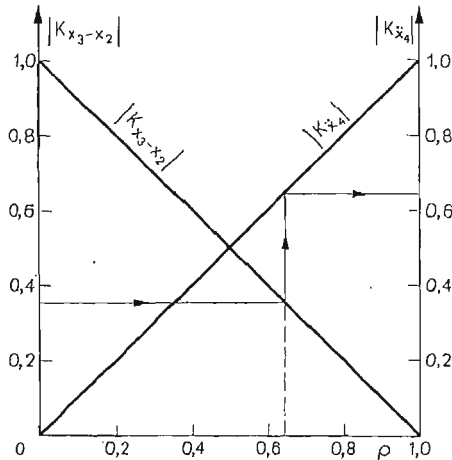
z warunku ekstremum wyrażenia (3.6) wynika, że minimum zostanie osiągnięte dla:

$$(3.13) \quad y = z = \lambda \quad \lambda \geq 0.$$

Wykresy optymalnych wartości $|K_{x_3-x_2}|$ i $|K_{\ddot{x}_4}|$ w funkcji parametru ϱ związanego z λ równością:

$$(3.14) \quad \lambda = \frac{\varrho}{1-\varrho}$$

zostały pokazane na rys. 3.



Rys. 3

Mając zadane ograniczenie na amplitudę względnego przemieszczenia amortyzatora można z rys. 3 odczytać wielkość obniżenia przyspieszenia w zadanym punkcie układu B w stosunku do jego wartości granicznej oraz wartość parametru ϱ . Korzystając ze wzoru (3.14) można obliczyć λ , a następnie wyznaczyć ze związków (3.8) optymalne wartości współczynników $c(\omega)$ i $b(\omega)$. Parametry $p_i (i = 1, 2 \dots r)$ określające układ amortyzacji muszą spełniać związki (3.2) przy obliczonych wartościach $c(\omega)$ i $b(\omega)$. Istnieje tu dla $r > 2$ pewna dowolność doboru współczynników p_i .

Istotną wydaje się być uwaga, że rozwiązanie optymalne w dziedzinie zmiennych y i z jest niezależne od struktury układu BSA, zależy ono tylko od tego w jakiej proporcji chcemy

obniżyć przyspieszenie \ddot{x}_4 i przemieszczenie względne $x_3 - x_2$ w stosunku do odpowiednich wartości granicznych. Należy zauważyć, że na skutek założenia pasywności układu, funkcja $\varphi_2^{nm}(\omega)$ jest stale większa lub równa zero i w związku z tym optymalne rozwiązania są słuszne w obszarze częstości, dla których:

$$(3.15) \quad \varphi_1^{nm}(\omega) \geq 0$$

co uwarunkowane jest żądaniem aby współczynnik sztywności $c(\omega)$ był większy od zera. Obszary wyznaczone nierównością (3.15) w których to możliwe jest obniżenie wartości przyspieszenia jak i przemieszczenia względnego amortyzatora poniżej odpowiednich wartości granicznych można by nazwać obszarami „pozarezonansowymi”.

Wnioski

Z przeprowadzonych rozważań i wyników końcowych nasuwają się następujące wnioski:

- z rys. 3 wynika, że nie można jednocześnie dowolnie obniżyć wartości przyspieszenia rozpatrywanego punktu układu **B** i amplitudy ruchu względnego amortyzatora,
- obniżenie wartości przyspieszenia i przemieszczenia względnego nie zależy od przyjętej struktury układu amortyzacji przy założeniu, że jest on bezinercyjny,
- w przypadku, gdy częstość wymuszenia znajduje się w pewnym zakresie częstości, ale jest ustalona, wskazane jest takie dobranie struktury układu amortyzacji, aby współczynniki $c(\omega)$ i $b(\omega)$ były w tym zakresie funkcjami częstości możliwie bliskimi funkcjom określonym wzorami (3.8),
- w zakresie częstości, dla których nie jest spełniona nierówność (3.15), należy przyjąć $c = b = 0$ (praktycznie sprężyny bardzo miękkie).
- jeżeli układ pracuje w powyższym zakresie częstości to można go sprowadzić do pracy w obszarze (3.15) dwoma sposobami:
 - przez nieznaczną zmianę parametrów układów **A** i **B**, bez naruszenia właściwej pracy układu, tak aby nierówność (3.15) została spełniona,
 - przez wprowadzenie do układu amortyzacji elementów inercyjnych lub przez dołączenie równoległe inercyjnych układów dodatkowych (np. układ wibroizolacji z kompensacją [5]).

Rozważania przeprowadzone były dla układów liniowych, jednak możliwe jest zastosowanie uzyskanych wyników w przypadku występowania w układzie odpowiednio małych nieliniowości po uprzednim ich zlinearyzowaniu. Metoda rozwiązywania zagadnienia wibroizolacji może być analogicznie zastosowana przy przyjęciu innych modeli układów wibroizolacji i innych kryteriów jakości ich działania.

Literatura cytowana w tekście

1. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1965
2. J. M. PRENTIS, F. A. LECKIE, *Mechanical Vibrations: An Introduction to Matrix Methods*, London 1963, Longmans, GREEN and Co. Ltd.
3. V. V. GURECKIJ, L. S. MAZIN, *Pribliżennyi sintez vibrozascitnoj sistemy pri ucete dinamiceskich svojstv podderżivajuszej konstrukcji*, Izv. AN SSSR. Mechanika Tverdovo Tela 1971, 2.

4. V. V. GURECKIJ L. S. MAZIN, *Sintez optimalnoj vibrozascitnoj sistemy pri ucete dinamičeskich svojstv amortizirujescevo krepłenija*, Izd. AN SSSR, *Mechanika Tverdogo Tela* 1974, 3
5. Cz. CEMPEL, *Synteza układów wibroizolacji z kompensacją*, *Rozprawy Inżynierskie*, 21, 4, 1973.

Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 — „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОДБОР БЕЗИНЕРЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АМОРТИЗАЦИИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВЫНУЖДЕНИИ

В работе приводится метод оптимального подбора безинерционной системы амортизации для некоторого класса механических систем с условием, чтобы ускорение в заданной точке системы было минимальное при одновременно ограниченной амплитуде относительного движения амортизатора. Получены отношения определяющие коэффициенты жесткости и затухания системы амортизации в функции частоты вынуждения и параметров определяющих исследованную систему. Определено области применимости полученных формул.

S u m m a r y

OPTIMAL CHOICE OF NON-INERTIAL SYSTEM OF VIBROISOLATION WITH HARMONIC FORCING

Paper presents the way of optimization of noninertial system of vibroisolation represented by stiffness coefficient $c(\omega)$ and damping coefficient $b(\omega)$. The following criterion of optimization was assumed: when the amplitude of the relative motion of the vibroisolation system is limited, acceleration of chosen point of the vibroisolated system should be the minimum. Coefficients $c(\omega)$ and $b(\omega)$ were carried out as the functions of excitation's frequency and parameters of vibroisolated system. Range of application of the obtained results was determined.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INST. MECH. I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 grudnia 1977 r.