

Wtedy równanie wrażliwości możemy napisać w postaci

$$(61) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2(\beta - \lambda) \frac{\partial \omega}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} + (\alpha - \nu) \omega = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H.$$

Ponieważ rozwiązanie $u(x, t, c)$ traktujemy jako znane, więc funkcje (60) są znane. Równanie wrażliwości (61) jest więc równaniem liniowym o zmiennych współczynnikach. W przypadku liniowego równania struny $f = 0$, kładziemy w równaniu (61) $\lambda = \sigma = \nu = 0$ i otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach, wymuszone rozwiązaniem (lub jego pochodnymi), którego wrażliwość badamy.

W przedstawionych wyżej rozważaniach dokonany został przegląd pojęciowy najważniejszych pojęć stateczności ruchu, dla modeli matematycznych dyskretnych i ciągłych, z punktu widzenia potrzeb technicznych. Pominięte zostały mniej istotne warianty pojęć stateczności oraz całkowicie pominięto zagadnienia stateczności procesów losowych, wymagających osobnego opracowania. Dla wszystkich przedstawionych tu rodzajów stateczności istnieją mniej lub bardziej zaawansowane metody ich badania. Metody te są znacznie bardziej zaawansowane dla modeli dyskretnych, niż dla modeli ciągłych. Przedstawienie nawet pobieżnego przeglądu istniejących metod przekracza znacznie ramy niniejszego opracowania. Systematyczne zapoznanie się z metodami badania stateczności ruchu ośrodków dyskretnych i ciągłych, wymaga sięgnięcia do źródłowej literatury.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Л. СОВОЛЕВ, *Уравнения математической физики*, Гос. Изд. Тех. Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1950.
2. А. И. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ, *Уравнения математической физики*, Гос. Изд. Тех. Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1951.
3. А. А. МОВЧАН, *О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем*, Прикл. Мат. Мех., **23**, (1959).
4. А. А. МОВЧАН, *Устойчивость процессов по двум метрикам*, Прикл. Мат. Мех., **24**, (1960).
5. С. Л. СОВОЛЕВ, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Новосибирск 1962.
6. R. TOMOWICZ, *Sensitivity analysis of dynamic systems*, New York 1963, Mac Graw Hill.
7. А. А. МОВЧАН, *Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел*, Arch. Mech. Stos., **5**, **15**, (1963).
8. Т. К. СИРАЗЕТНИКОВ, *К теории устойчивости процессов с распределенными параметрами*, Прикл. Мат. Мех., **31**, (1967).
9. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT 1971.
10. В. Р. ДЕМІДОВИЧ, *Математична теорія стабільності*, WNT 1972.
11. Р. ТОМОВИЧ, М. ВУКОБРАТОВИЧ, *Общая теория чувствительности*, Изд. Советское Радио, Москва 1972.
12. А. А. МАРТЫНЮК, *Техническая устойчивость в динамике*, Изд. „Техника”, Киев 1973.
13. R. GUTOWSKI, *Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений в частных производных описывающих движение механических систем в теории колебаний*, VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Band I, 1 Abhandlungen der AdW, Akademie Verlag, Berlin 1977.

14. R. GUTOWSKI, *Устойчивость колебаний зидиого шланга с учетом протекающей внутри жидкости*, Inst. of Thermomechanics, Proceedings of the XI-th Conference DYNAMICS OF MACHINES, Prague — Liblice, Czechoslovakia 1977.
15. B. RADZISZEWSKI, *O najlepszej funkcji Lapunowa i jej zastosowaniu do badania stateczności ruchu*, Prace IPPT, Warszawa 1977.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 marca 1968 r.

Referat wygłoszony na zjeździe z okazji XX lecia PTMTiS w Ustroniu.

BADANIE UGIĘĆ PŁYT METODĄ MORY

JERZY J. WĄSOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Technika mory może być użyta skutecznie nie tylko do badania przemieszczeń i naprężeń w praskich zagadnieniach mechaniki technicznej [1], ale również do wyznaczania przemieszczeń i odkształceń powłok poddanych różnym obciążeniom. W tym przypadku znajduje się metodą mory mapę warstwicową powłoki nieobciążonej, następnie mapę powłoki obciążonej, po czym z porównania obydwu map wnioskuje się o zaszytych odkształceniach jej powierzchni [2].

Ta metoda z trudem nadaje się do badania ugięć płyt, gdyż na płaskiej, nieodkształconej płycie nie ma żadnego układu linii warstwicowych, które ulegałyby zmianie w wyniku jej obciążenia. Wprawdzie linie te pojawiają się w chwili odkształcenia płyty (gdy przekształci się ona w pewną powierzchnię), jednak wobec niewielkich zazwyczaj ugięć są one tak szerokie i nieostro zarysowane, że użycie ich do celów obliczeniowych jest połączone z pewnymi trudnościami.

W takiej sytuacji autor proponuje badać ugięcia płyt nie metodą płaskich cięć optycznych, lecz metodą przecięć powierzchniami, które już na płaskiej płycie dają układ linii, mogących zmieniać się w procesie zginania. Jest to swego rodzaju odmiana metody różniczkowej, stosowanej w podobnych okolicznościach w badaniach płaskich stanów odkształceń i naprężeń [3].

2. Metoda cięć optycznych

Otrzymywanie map warstwicowych techniką mory polega na optycznym przecięciu badanej powierzchni Σ układem powierzchni Λ . W wyniku tego przecięcia na powierzchni Σ powstaje układ linii warstwicowych (jeżeli przyjąć terminologię topograficzną), które po rzutowaniu na płaszczyznę dają warstwicę poszukiwanej mapy [4]. Optyczne powierzchnie warstwowe Λ powstają w przestrzeni w rezultacie oświetlenia jej dwoma punktowymi źródłami światła Q_1, Q_2 , zmodulowanego dwiema siatkami liniowymi G_1, G_2 . Dla uproszczenia wykładu można przyjąć, że siatki są nieprzezroczystymi ekranami, w których wycięto w równych odstępach p układ równoległych i nieskończenie wąskich szczelin.

Taka siatka oświetlona przez źródło punktowe wytwarza w przestrzeni (w przybliżeniu optyki geometrycznej) współosiowy pęk płaszczyzn świetlnych o równaniu

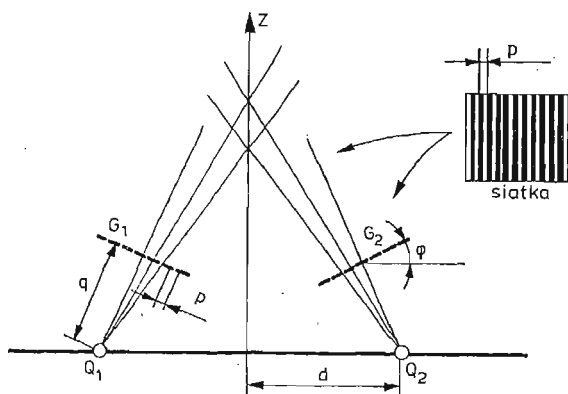
$$(2.1) \quad (q \cos \varphi + mp \sin \varphi)x + (q \sin \varphi - mp \cos \varphi)z - d(q \cos \varphi + mp \sin \varphi) = 0,$$

w którym q oznacza odległość siatki G_2 od źródła światła Q_2 , którego położenie na osi x określone jest odciętą d , φ jest kątem ustawienia siatki, a parametr $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ może być traktowany jako numer linii siatki, a tym samym płaszczyzny świetlnej. Ortokartezjański układ współrzędnych xyz dobieramy przy tym w ten sposób, by linie siatek G_1, G_2 były równoległe do osi y , co bez zmniejszenia ogólności pozwala na znaczne uproszczenie równań.

Podobnie równanie pęku płaszczyzn świetlnych powstałych z oświetlenia siatki G_1 punktowym źródłem światła Q_1 , położonym na osi x w punkcie o odciętej $x = -d$ jest

$$(2.2) \quad (q \cos \varphi - mp \sin \varphi)x - (q \sin \varphi + mp \cos \varphi)z + d(q \cos \varphi - mp \sin \varphi) = 0,$$

gdzie $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ może być także interpretowane jako numer linii w siatce G_1 lub numer płaszczyzny w pęku. Na rys. 1 pokazana jest schematycznie geometria układu projekcyjnego i jego elementy oraz wyjaśnione zostały wielkości występujące w równaniach (2.1) i (2.2).



Rys. 1. Zasadniczy schemat układu projekcyjnego

Z przecięcia obydwu pęków płaszczyzn powstaje w przestrzeni układ linii prostych l_{mn} . Okazuje się, że proste l_{mn} nie są luźnym zbiorem nie powiązanych ze sobą elementów, lecz układają się na powierzchniach pewnej jednoparametrowej rodziny powierzchni prostokreślnych \mathcal{A} [5]. Jej równanie otrzymamy rugując parametry m, n z równań (2.1) i (2.2) przy pomocy warunku

$$(2.3) \quad m - n = k$$

zwanego warunkiem mory. Równanie to jest postaci

$$(2.4) \quad (\sin 2\varphi - ks \sin^2 \varphi)x^2 + (\sin 2\varphi + ks \cos^2 \varphi)z^2 + d(ks \sin 2\varphi - 2 \cos 2\varphi)z - d^2(\sin 2\varphi - ks \sin^2 \varphi) = 0,$$

przy czym przyjęto w nim oznaczenie

$$(2.5) \quad s = p/q,$$

zaś całkowitoliczbową wielkość $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ jest parametrem rodziny.

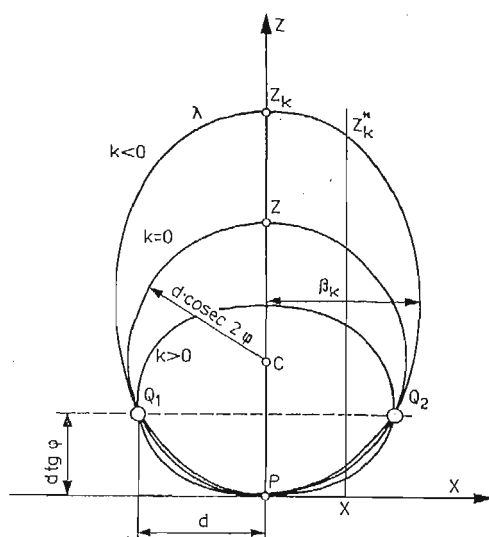
Jak widać, powierzchnie Λ opisane równaniem (2.4) są powierzchniami prostokreślnymi o tworzących l równoległych do osi y . Można wobec tego (2.4) uważać za równanie kierownicy λ_k powierzchni Λ_k .

W szczególności dla $k = 0$ otrzymujemy z (2.4)

$$(2.6) \quad x^2 + z^2 - 2d \operatorname{ctg} 2\varphi \cdot z - d^2 = 0,$$

co jest równaniem okręgu o środku C znajdującym się na osi z w punkcie $z_c = d \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi$ i mającego średnicę $2d \cdot \operatorname{cosec} 2\varphi$. Można łatwo się przekonać, że wszystkie linie λ_k rodziny (2.4) przechodzą przez punkty Q_1, Q_2 osi x oraz przez punkt P leżący na osi z i mający współrzędną $z_p = -d \operatorname{tg} \varphi$.

Okoliczność ta pozwala wprowadzić nowy układ współrzędnych XYZ o początku w punkcie P i osiach równoległych do osi układu xyz .



Rys. 2. Kierownice powierzchni Λ

Obydwa układy są w tym przypadku związane zależnościami

$$(2.7) \quad x = X, \quad y = Y, \quad z = Z - d \operatorname{tg} \varphi,$$

W nowym układzie współrzędnych rodzina kierownic (2.4) ma równanie

$$(2.8) \quad (\sin 2\varphi - k s \sin^2 \varphi) X^2 + (\sin 2\varphi + k s \cos^2 \varphi) Z^2 - 2dZ = 0,$$

które po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.9) \quad \alpha^2 = \sin 2\varphi - k s \sin^2 \varphi, \quad \beta^2 = \sin 2\varphi + k s \cos^2 \varphi,$$

da się napisać zwięźle w postaci

$$(2.10) \quad \alpha^2 X^2 + \beta^2 Z^2 - 2dZ = 0.$$

Z teorii krzywych stożkowych wiadomo, że jest to wierzchołkowe równanie elipsy o dużej osi 2α położonej na osi Z i osi małej 2β równoległej do osi X (rys. 2).

Kładąc w (2.10) $X = 0$ otrzymujemy punkty przecięcia rodziny elips z osią Z . Jednym z nich jest początek P układu współrzędnych XYZ , będący wspólnym wierzchołkiem całej rodziny, drugi ma współrzędną

$$(2.11) \quad Z_k = \frac{2d}{\sin 2\varphi + k s \cos^2 \varphi}$$

i jest funkcją parametru k . Przy $k = 0$ otrzymujemy okrąg o średnicy $Z_0 = 2d \cdot \operatorname{cosec} 2\varphi$. Przy $k \neq 0$ równanie (2.10) przedstawia elipsy, przy czym są one wydłużone wzdłuż osi Z , gdy $k < 0$ oraz wydłużone w kierunku osi X , gdy $k > 0$ (patrz rys. 2).

Reasumując otrzymane wnioski możemy stwierdzić, że opisany układ projekcyjny generuje w przestrzeni rodzinę powierzchni optycznych, którymi są walce eliptyczne o tworzących równoległych do linii siatek (tzn. do osi Y). Równanie tej rodziny dane jest wyrażeniem (2.8), w którym parametr k może być interpretowany jako numer powierzchni \mathcal{A}_k , przy czym może on przyjmować wartości dodatnie i ujemne oraz wartość 0, dla której walec eliptyczny staje się walcem kołowym.

3. Wyznaczanie elementów układu projekcyjnego

W równaniu (2.8) rodziny powierzchni tnących \mathcal{A} występują cztery parametry φ , d , q , p , charakteryzujące układ projekcyjny i ukazane na rys. 1 [wielkość S występująca w (2.8) wyraża się przez p , q wzorem (2.5)]. Przygotowanie układu do pracy polega na ustaleniu tych wielkości w sposób umożliwiający rozwiązanie danego zagadnienia. Na przykład kąt φ dobiera się w ten sposób, żeby wiązki światła wychodzące z obydwu projektorów całkowicie oświetliły badany obiekt, odległość $2d$ między projektorami powinna pozwolić na ewentualne wstawienie między nimi aparatu fotograficznego, a operowanie wielkością s umożliwi zmianę stopnia „zagęszczenia” powierzchni \mathcal{A} . W praktyce układ zestawia się tak, by spełniał tego rodzaju warunki, ale wtedy wielkości φ , d , q są nieznane, a ponadto nie zawsze istnieje realna możliwość bezpośredniego ich pomiaru. Na przykład odległość $2d$ między środkami projekcji Q_1 , Q_2 nie może być zmierzona bezpośrednio ze względu na niedostępność tych punktów. To samo dotyczy bezpośredniego pomiaru wielkości q — odległości siatki od środka projekcji. Z tych wielkości najbardziej dostępny jest kąt φ , który daje się zmierzyć bezpośrednio.

W takiej sytuacji potrzebne wielkości można wyznaczyć w sposób pośredni. Jeżeli bowiem w zestawionym ostatecznie układzie w miejsce siatki G wstawimy określoną figurę, np. prostokąt o znanych bokach a , b , zaś w miejsce badanego modelu płaski ekran E równoległy do płaszczyzny XY układu współrzędnych, to przy spełnieniu oczywistych warunków prostokąt odwzorowuje się na ekranie jako równoramienny trapez o podstawach a'_1 i a'_2 i wysokości b' . Po zmierzeniu tych wielkości możemy za ich pomocą znaleźć niewiadome parametry układu projekcyjnego.

Podstawę rachunku stanowią równania przetworzenia optycznego [6, 7]

$$(3.1) \quad x' = \frac{e}{\cos \varphi} \frac{x}{x \sin \varphi + q \cos \varphi}, \quad y' = \frac{e y}{x \sin \varphi + q \cos \varphi}.$$

Układ współrzędnych prostokątnych xy związany jest z płaszczyzną rzucanego przezrocza, układ $x'y'$ — z płaszczyzną ekranu. W tych wzorach q oznacza odległość przezrocza (np. siatki G) od środka rzutowania Q , zaś e jest odległością ekranu E od tegoż środka. Między płaszczyzną przezrocza a płaszczyzną ekranu zawarty jest kąt φ . Znając współrzędne (x, y) punktu A przezrocza, np. wierzchołka wspomnianego prostokąta, można przy pomocy równań (3.1) obliczyć współrzędne (x', y') punktu A' , w który przetworzył się punkt A (a więc odpowiednie wierzchołka trapezu). W szczególności możemy obliczyć elementy a'_1, a'_2, b' trapezu ze znajomości boków a, b rzucanego prostokąta. Jeśli jednak znamy z pomiaru boki a, b rzucanego prostokąta oraz elementy a'_1, a'_2, b' trapezu, w który przetworzył się prostokąt, to z równań wiążących te elementy można wyznaczyć parametry układu przetwarzającego.

Po rozwiązaniu powstałego w ten sposób układu równań względem interesujących nas niewiadomych, otrzymamy zestaw wzorów pozwalających wyliczyć poszukiwane wielkości. W praktyce rachunek ten wygodnie przeprowadzić według następującego schematu. Obliczamy najpierw wielkości

$$(3.2) \quad A = \frac{a^2 b'}{b a'_1 a'_2}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{a f (a'_1 - a'_2)}{b a'_1 a'_2}$$

w oparciu o zmierzone elementy a, b oraz a'_1, a'_2, b' figury przetwarzanej (prostokąt) i przetworzonej (trapez). Wielkość f jest ogniskową obiektywu użytego w układzie przetwarzającym czyli projekcyjnym. Interpretacja kąta φ_1 podana jest niżej. Następnie za pomocą wzoru

$$(3.3) \quad \sin \varphi = \frac{\sin \varphi_1}{A} \left[\cos \varphi_1 + A \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \varphi_1}{A} \right)^2} \right]$$

znajdujemy kąt φ — jeden z podstawowych parametrów układu projekcyjnego. Z kolei obliczamy odległość e ekranu E od środka rzutowania Q wg wzoru

$$(3.4) \quad e = f \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1}$$

oraz odległość q środka rzutowania Q od płaszczyzny siatki G

$$(3.5) \quad q = A e.$$

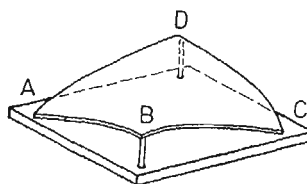
W końcu dla znalezienia odległości $2d$ między środkami rzutowania obliczamy odciętą środka rzutowania Q względem układu $x'y'$, związanego z płaszczyzną ekranu E , przy pomocy wzoru

$$(3.6) \quad x'_Q = e \operatorname{tg} \varphi.$$

W ogólnym przypadku początki układów współrzędnych $x'y'$, sprzężonych z obydwoma projektorami, nie pokrywają się. Jeśli odległość między nimi, mierzona wzdłuż osi x jest równa c , to poszukiwana wielkość

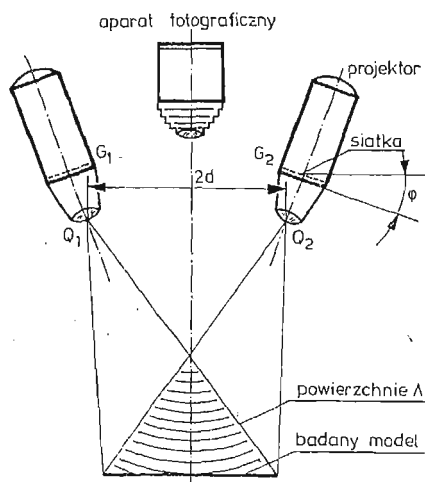
$$(3.7) \quad 2d = c + 2e \operatorname{tg} \varphi.$$

Dla ilustracji rozpatrzmy przykład układu używanego przez autora do badania ugięć kwadratowej płyty, wymuszonych w sposób pokazany na rys. 3. Schemat układu projekcyjno-fotograficznego wykreślony jest na rys. 4, a jego zdjęcie przedstawia rys. 5. Funkcję projektorów spełniały dwa powiększalniki fotograficzne typu „Krokus 3 color” z obiektywami



Rys. 3. Sposób odkształcania badanej płyty kwadratowej

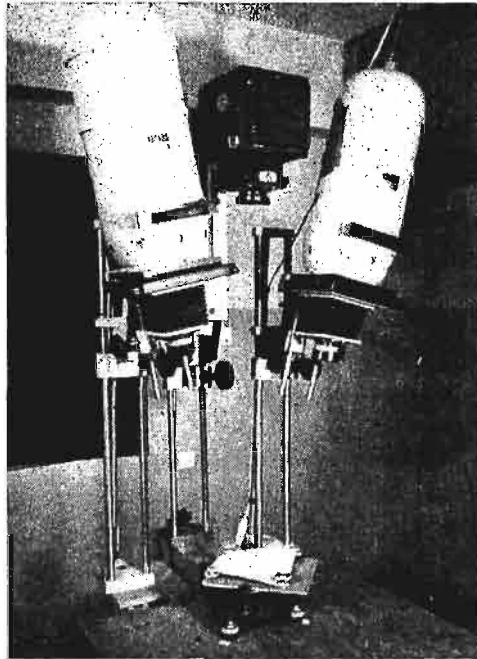
wami Amar/s o ogniskowej $f = 10.5$ cm. W ramki negatywowe zostały włożone siatki liniowe o gęstości 6 linii/mm (tzn. mające odstęp między liniami $p = 0,0167$ cm) w ten sposób, żeby ich linie były prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Między projektorami zarezerwowano miejsce na aparat fotograficzny, pozwalający rejestrować optyczne przecięcia badanej płyty, umieszczonej na jego osi optycznej. W celu oświetlenia badanego obiektu przez obydwa projektory, zostały one obrócone o pewien kąt φ , jak ilustruje to



Rys. 4. Schemat układu projekcyjno-fotograficznego

rys. 4, a następnie drogą regulacji ostrości doprowadzono do powstania ostrego obrazu obydwu siatek na powierzchni obiektu. Należy tu dodać, że ze względu na nierównoległość płaszczyzny przedmiotowej (tzn. płaszczyzny siatki) i płaszczyzny obrazowej (płaszczyzny płyty przed odkształceniem) ostre obrazy otrzymuje się przy spełnieniu warunku Czapskiego-Scheimpfluga wymagającego, by trzy płaszczyzny — płaszczyzna przedmiotowa, obrazowa oraz płaszczyzna główna obiektywu — przecięły się wzdłuż jednej prostej. Występujący we wzorze (3.2) kąt φ_1 jest kątem między płaszczyzną przedmiotową a płaszczyzną główną obiektywu.

Parametry układu projekcyjnego znaleziono w sposób opisany powyżej. W miejsce siatki G wstawiony został dokładny rysunek prostokąta o bokach $a = 4$ cm i $b = 5$ cm w ten sposób, by jego środek leżał na osi optycznej projektora. W płaszczyźnie ekranu E , pokrywającego się z płaszczyzną badanej płyty, prostokąt ten odwzorował się w postaci równobocznego trapezu o podstawach $a'_1 = 20,55$ cm, $a'_2 = 18,75$ cm oraz wysokości $b' = 25,05$ cm. Rachunek elementów układu przeprowadzony został wg przedstawionego schematu. Ze wzorów (3.2) otrzymujemy $A = 0,207665$ oraz $\sin \varphi_1 = 0,0392409$ skąd $\varphi_1 = 2^\circ 14' 56'$ oraz $\cos \varphi_1 = 0,999230$.



Rys. 5. Układ projekcyjno-fotograficzny

Następnie za pomocą (3.3) obliczamy $\sin \varphi = 0,227351$ skąd $\varphi = 13^\circ 8' 28''$. Odległość środka rzutowania Q od płaszczyzny ekranu E jest wg (3.4) równa $e = 60,8341$ cm, a odległość płaszczyzny siatki od Q , wyliczona wzorem (3.5) wynosi $g = 12,6331$ cm. Rzutując prostokąty z obydwu projektorów jednocześnie stwierdzamy, że obrazy ich środków odległe są w płaszczyźnie ekranu $Eoc = 4,6$ cm, co pozwala wzorem (3.7) obliczyć odległość $2d = 33,00$ cm między środkami projekcji Q_1 i Q_2 . Na koniec z (2.5) obliczamy wielkość $s = 1,3219 \cdot 10^{-3}$, zamykając tym samym proces wyznaczania elementów układu projekcyjnego.

Po wstawieniu tak uzyskanych liczb do wyrażenia (2.8) otrzymujemy równanie rodziny powierzchni \mathcal{A}

$$(3.8) \quad (0.44279 - 6.3326 \cdot 10^{-5}k)X^2 + (0.44279 + 1.25357 \cdot 10^{-3}k)Z^2 - 33.00 \cdot Z = 0$$

z jednym parametrem k , który można uznać za numer powierzchni w rodzinie. Podobnie z (2.11) dostajemy wyrażenie

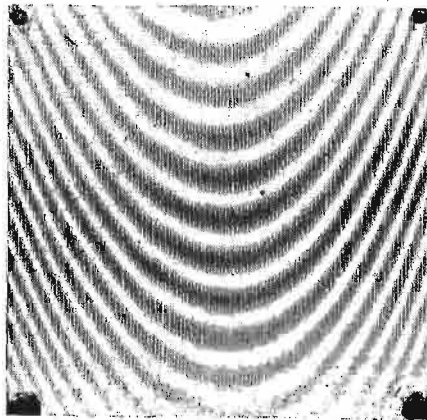
$$(3.9) \quad Z_k = \frac{33.00}{0.44279 + 1.25357 \cdot 10^{-3}k}$$

określające punkty na osi Z , w których przecięta jest ona przez powyższą rodzinę powierzchni. Są to wierzchołki elips λ_k (rys. 2). Dla $k = 0$ otrzymujemy z (3.9) $Z_0 = 74,5274$ cm, co jest średnicą okręgu λ_0 , tzn. średnicą walca kołowego, będącego jedną z powierzchni \mathcal{A} . Dla sąsiednich powierzchni \mathcal{A}_{-1} oraz \mathcal{A}_1 znajdujemy wg (3.9) wartości 74,7390 cm oraz 74,3170 cm, z czego wynika, że odległość między sąsiednimi powierzchniami mierzona wzdłuż osi Z , wynosi 0,2116 cm oraz 0,2104 cm. Stosunek tych liczb jest równy 1,0057, skąd wniosek, że różnią się one (w tym miejscu) o 0,57%.

4. Mapa przecięć optycznych

Jeżeli w przestrzeni powierzchni \mathcal{A} umieścimy materialną powierzchnię Σ np. badaną powłokę lub płytę, to pojawi się na niej układ linii V , powstałych z optycznego przecięcia powierzchni Σ rodziną powierzchni \mathcal{A} . Jeśli $\mathcal{A}(X, Y, Z, k) = 0$ jest równaniem tej rodziny, a $\Sigma(X, Y, Z) = 0$ równaniem powierzchni Σ , to rodzina linii V na powierzchni Σ ma równania

$$(4.1) \quad \mathcal{A}(X, Y, Z, k) = 0, \quad \Sigma(X, Y, Z) = 0.$$



Rys. 6. Mapa przecięć optycznych pochylej płaszczyzny

Rzutując ten układ linii V na płaszczyznę XY otrzymujemy „mapę” powierzchni Σ . Jej równanie

$$(4.2) \quad W(X, Y, k) = 0$$

uzyskujemy w wyniku rugowania zmiennej Z z równań (4.1). Należy pamiętać, że wprowadzone tu pojęcie „mapy” jest szersze od pojęcia mapy, stosowanego w topografii, gdzie powierzchniami warstwowymi są równoległe i równoodległe płaszczyzny.

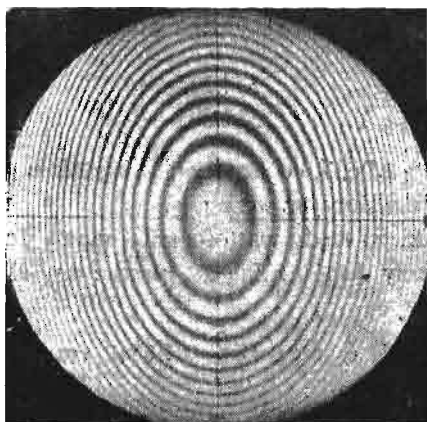
Wzmy dla ilustracji prosty przykład, gdy powierzchnią Σ jest płaszczyzna

$$(4.3) \quad Z = MY + N.$$

Jej mapa ma równanie

$$(4.4) \quad W(X, Y, k) = \alpha^2 X^2 + \beta^2 M^2 Y^2 + 2M(\beta^2 N - d)Y + N(\beta^2 N - d) = 0$$

powstałe z rugowania zmiennej Z z równań (2.10) i (4.3). Mapę tę, otrzymaną za pomocą układu projekcyjno-fotograficznego ukazanego na rys. 5 przedstawia rys. 6. Powstała ona z optycznego przecięcia płaszczyzny Σ (którą w tym przykładzie była płytka metalowa) rodziną powierzchni Λ wygenerowaną przez układ projekcyjny. W drugim przykładzie, ukazanym na rys. 7, widzimy mapę powierzchni kuli, uzyskaną przez autora w tym samym układzie projekcyjnym.



Rys. 7. Mapa przecięć optycznych powierzchni wzorcowej

Jednakże w zagadnieniach praktycznych równanie powierzchni Σ nie jest znane. Stosując przedstawioną metodę otrzymujemy mapę tej powierzchni w postaci obrazu morowego (jak np. na rys. 6 i 7) za pomocą której oraz znajomości rodziny powierzchni tnących Λ można na drodze obliczeniowej określić kształt powierzchni Σ .

5. Wyznaczanie pochodnych cząstkowych

Jeżeli interesującym nas zagadnieniem będzie rozkład momentów zginających i skręcających, działających w badanej płycie, to w tym przypadku poszukiwać będziemy drugich pochodnych cząstkowych powierzchni ugiętej, niezbędnych do tego rachunku.

Przypuśćmy, że płaska płyta sprężysta staje się w wyniku obciążenia pewną powierzchnią $Z = Z(X, Y)$ i założmy, że interesuje nas przebieg momentu zginającego wzdłuż przekroju $X = 0$. Pochodną cząstkową w punkcie $Y + \frac{1}{2}\Delta Y$ można przedstawić w postaci

$$(5.1) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \right)_{Y + \frac{1}{2}\Delta Y} \approx \frac{\Delta Z}{\Delta Y}.$$

Przyrost ΔZ obliczymy jako różnicę wartości Z_k dla dwu sąsiednich wartości k i $(k+1)$ parametru w wyrażeniu (2.11):

$$(5.2) \quad \Delta Z = \Delta Z_{k/k+1} = Z_k - Z_{k+1} = \frac{Z_k}{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k + 1}.$$

Sąsiednia różnica jest analogicznie

$$(5.3) \quad \Delta Z_{k-1/k} = Z_{k-1} - Z_k = \frac{Z_k}{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k - 1}$$

a ich stosunek jest równy

$$(5.4) \quad R = \frac{\Delta Z_{k/k+1}}{\Delta Z_{k-1/k}} = \frac{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k + 1}{(2/s)\operatorname{tg}\varphi + k - 1}.$$

W przypadku omawianego układu projekcyjnego wielkość ta jest

$$(5.5) \quad R = \frac{354,225 + k}{352,225 + k}.$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy $R = 1,0057$, co oznacza, że sąsiednie różnice $\Delta Z_{0/1}$ oraz $\Delta Z_{-1/0}$ różnią się o 0,57%, co stwierdziliśmy już wcześniej.

Aby zorientować się z jakiego rzędu wartościami k mamy do czynienia w naszym układzie projekcyjnym, znajdujemy współrzędną Z_E płaszczyzny ekranu E , z którą pokrywa się płyta nieodkształcona:

$$(5.6) \quad Z_E = d\operatorname{tg}\varphi + e = 64,6862 \text{ cm}.$$

Rozwiązując (2.11) względem k uzyskamy wyrażenie

$$(5.7) \quad k = \frac{2d - Z_k \sin 2\varphi}{Z_k \operatorname{scos}^2 \varphi} = \frac{33,00 - 0,44279 Z_k}{1,25357 \cdot 10^{-3} Z_k}$$

z którego po podstawieniu Z_E w miejsce Z_k obliczymy numer powierzchni A_k znajdujące się w pobliżu ekranu. Otrzymujemy w ten sposób $k = 53,74$ z czego wynika, że płaszczyzna E znajduje się między powierzchniami A o numerach 53 i 54. Po wstawieniu obliczonego k do (5.5) dostajemy $R = 1,0049$ co znaczy, że w otoczeniu badanej płyty sąsiednie wartości ΔZ różnią się o 0,49% czyli ok. 0,5%.

Jeżeli przyjmiemy, że taką zmienność można pominać, wtedy ΔZ we wzorze (5.1) będzie stałe i w naszym przypadku równe $\Delta Z = Z_{53} - Z_{54} = 64,8038 - 64,6447 = 0,1591 \text{ cm} = 1,59 \text{ mm}$. Jeśli tej zmienności zaniedbać nie chcemy, wtedy kolejne wartości ΔZ we wzorze (5.1) otrzymujemy z pomnożenia poprzedniej przez R , które jako wolno zmienne może być nawet w dużym przedziale k przyjęte za stały współczynnik. Znaczący to, że obliczając pochodną cząstkową należy we wzorze (5.1) podstawiać na ΔZ kolejno wartości ΔZ , $R\Delta Z$, $R^2\Delta Z$, $R^3\Delta Z$, ... dla kolejnych punktów wykresu pierwszej pochodnej cząstkowej $\partial Z / \partial Y$.

Przejdźmy teraz do dowolnego przekroju X , wzdłuż którego trzeba znaleźć przebieg pochodnej cząstkowej $\partial Z / \partial Y$. Dla uzyskania potrzebnych przyrostów ΔZ przecinamy rodzinę kierownic λ prostą X . Rozwiązując równanie kierownic (2.10) względem Z otrzy-

mujemy dwa pierwiastki, z których interesuje nas wyłącznie pierwiastek większy (co wynika z rys. 2) dany wzorem

$$(5.8) \quad Z_k^x = \frac{Z_k}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_k} \right)^2} \right].$$

w którym β_k jest półosią elipsy λ_k , równoległą do osi X (rys. 2) daną wyrażeniem

$$(5.9) \quad \beta_k = \frac{d}{\sin 2\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{kS}{2} \right)^2 + kS \operatorname{ctg} 2\varphi}}$$

a Z_k wyraża się przez (2.11). Poszukiwany przyrost $\Delta Z_{k/k+1}^x$ jest odległością między dwiema sąsiednimi elipsami λ_k i λ_{k+1} , mierzona wzdłuż prostej X , tzn.

$$(5.10) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = Z_k^x - Z_{k+1}^x = \frac{1}{2} \Delta Z_{k/k+1} + \frac{1}{2} \left[Z_k \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_k} \right)^2} - Z_{k+1} \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_{k+1}} \right)^2} \right]$$

gdzie $\Delta Z_{k/k+1}$ jest znalezionym wcześniej przyrostem liczonym wzdłuż przekroju $X = 0$ i danym przez (5.2). Jeśli dwie wielkości β_k i β_{k+1} zastąpić ich wartością średnią β_s , wtedy wyrażenie (5.10) da się przedstawić w prostszej postaci

$$(5.11) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = \frac{1}{2} Z_{k/k+1} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{X}{\beta_s} \right)^2} \right].$$

W niektórych przypadkach można wprowadzić średnią wartość β_s nie tylko dla dwu sąsiednich elips λ_k i λ_{k+1} , lecz dla wszystkich elips, które biorą udział w tworzeniu mapy badanej powierzchni Σ .

Rozpatrzmy dla ilustracji nasz układ, w którym umieszczona jest badana płyta, będąca kwadratem o boku 15,3 cm. Jej największy rozmiar (przekątna) wynosi 21,6 cm, tzn. przy ustawieniu przekątnych wzdłuż osi X, Y zajmie ona na osi X przedział od $X_E = -10,8$ cm do $X_E = 10,8$ cm. Płyta zostanie optycznie przecięta pewną liczbą Δk powierzchni \mathcal{A} . Dla znalezienia tej wielkości rozwiązujemy równanie (2.10) względem k otrzymując

$$(5.12) \quad k = \frac{Z_0 Z - (X^2 + Z^2)}{\frac{S}{2} (Z^2 \operatorname{ctg} \varphi - X^2 \operatorname{tg} \varphi)}$$

określające numer powierzchni \mathcal{A}_k , przecinającej płaszczyznę Z w punkcie X przekroju $Y = 0$. Kładąc w (5.12) $Z = Z_E = 64,69$ cm oraz $X = X_E = 10,8$ cm otrzymujemy $k = 43,94$, co znaczy, że ostatnia powierzchnia \mathcal{A} , przecinająca naszą płytę przy narożniku ma numer $k = 43$, a następna $k = 44$ przechodzi już poza nim. Poprzednio stwierdziliśmy, że najbliższą środka płyty ($X = 0$) jest powierzchnia $k = 53$, z czego wynika, że płaszczyznę płyty przecina $\Delta k = 10$ powierzchni warstwowych \mathcal{A} .

Wstawiając do wzoru (5.9) wartości $k = 53,74$ oraz $k = 43,94$ obliczamy $\beta(53,74) = 34,863$ cm oraz $\beta(43,94) = 35,263$ cm, skąd wynika, że zmiana β na obszarze badanej płyty wynosi $\Delta\beta = 0,400$ cm = 4 mm, a największa w naszym przykładzie wartość $(X/\beta)^2$ jest równa 0,094 przy końcu przekątnej. Po rozwinięciu w szereg i odrzuceniu potęg X/β_s większych od 2 wyrażenie (5.11) przepiszemy w postaci

$$(5.13) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = \Delta Z_{k/k+1} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{X}{\beta_s} \right)^2 \right]$$

przydatnej do praktycznych obliczeń. Przyjmując wartość średnią $\beta_s = 35,06$ cm, wzór rachunkowy dla rozpatrywanego przykładu przyjmie postać

$$(5.14) \quad \Delta Z_{k/k+1}^x = \Delta Z_{k/k+1} (1 + 2,03 \cdot 10^{-4} X^2).$$

Zestawiając otrzymane wnioski otrzymujemy wyrażenie

$$(5.15) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \right)_{Y+\frac{1}{2}\Delta Y} \approx \frac{\Delta Z}{\Delta Y} R^t \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{X}{\beta_s} \right)^2 \right]$$

pozwalające obliczyć pochodną cząstkową $\partial Z/\partial Y$ w punkcie (X, Y) powierzchni $Z(X, Y)$ badanej płyty. Na t kładziemy kolejne wartości 1, 2, 3 ... dla kolejnych punktów przekroju X .

W analogiczny sposób uzyskać można wzór

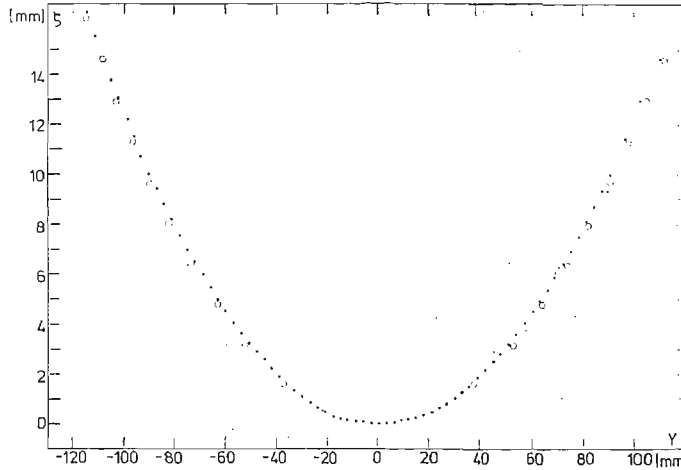
$$(5.16) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X+\frac{1}{2}\Delta X} \approx \frac{\Delta Z}{\Delta X} R^t \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{Y}{\beta_s} \right)^2 \right]$$

dla obliczenia pochodnej cząstkowej $\partial Z/\partial X$. Potrzebną do tego celu mapę otrzymujemy w wyniku obrócenia badanego modelu wokół osi Z o 90° w stosunku do ustawienia poprzedniego. Wyznaczywszy w opisany sposób pierwsze pochodne cząstkowe $\partial Z/\partial X$ i $\partial Z/\partial Y$ możemy na ich podstawie obliczyć pochodne drugie $\partial^2 Z/\partial X^2$, $\partial^2 Z/\partial Y^2$ oraz pochodną mieszaną $\partial^2 Z/\partial X \partial Y$ potrzebne do rachunku momentów.

6. Weryfikacja metody

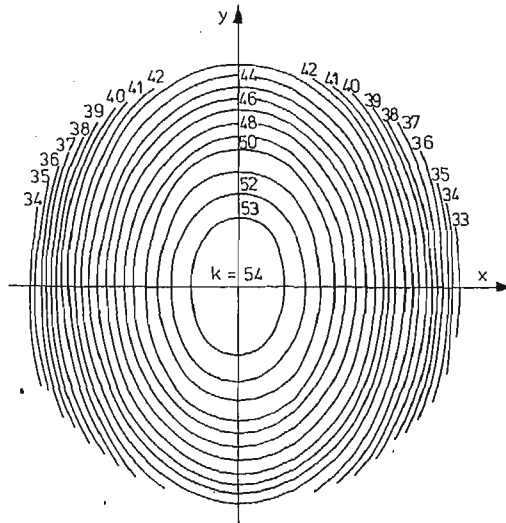
Dla sprawdzenia opisywanej metody, wyniki otrzymane przy jej pomocy zostały porównane z wynikami uzyskanymi w sposób niezależny. W tym celu przygotowano powierzchnię wzorcową, dla której określono kształt obranego przekroju mierząc z dokładnością 0,01 mm współrzędne Y, ζ punktów w odstępach $\Delta Y = 3$ mm. Powstały w ten sposób wykres przekroju ukazany jest na rys. 8. Powierzchnia wzorcową została następnie wstawiona w układ projekcyjno-fotograficzny, który wyprodukował jej mapę morową, przedstawioną na rys. 7, na podstawie której wykreślony został rys. 9, na którym jasne prążki mory zastąpiono liniami geometrycznymi; umożliwiającymi wyznaczenie współrzędnej Y warstwic wzdłuż wybranego przekroju, w naszym przykładzie przekroju $X = 0$. Powierzchnię wzorcową umieszczono w układzie tak, żeby w środku stykała się z powierzchnią warstwową A_{54} . Następnie za pomocą wzoru (3.9) wyliczono wartości Z_k dla kolejnych wartości $k = 54, 53, 52, \dots, 44$ (wzdłuż przekroju $X = 0$ powierzchnię wzorcową prze-

cina 11 powierzchni warstwowych A o tych numerach), z których z kolei można było wyliczyć współrzędne $\xi_k = Z_k - Z_{54}$, mierzone od wierzchołka powierzchni wzorcowej i umożliwiające konfrontację z pomiarami kontrolnymi. Porównanie obydwu pomiarów



Rys. 8. Porównanie pomiaru optycznego metodą mory (kółeczka) z pomiarem mechanicznym (kropki)

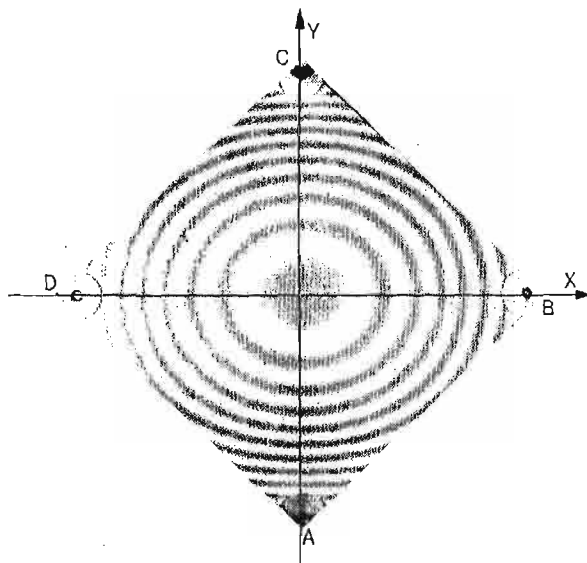
przedstawia rys. 8, na którym kółeczkami zaznaczone zostały wyniki otrzymane metodą mory opisywaną w artykule. Jak widać, zgodność jest zadowalająca. Należy jednak dodać, że dokładność metody może być zwiększona przez użycie doskonalszego sprzętu oraz fotometrycznego wyznaczania linii warstwowych z prążków mory ze zdjęcia przecięć optycznych. Także liczbę warstw można zwiększyć używając gęstszych siatek do projekcji.



Rys. 9. Mapa warstwowa powierzchni wzorcowej (powstała z zastąpienia liniami prążków mory na rys. 7)

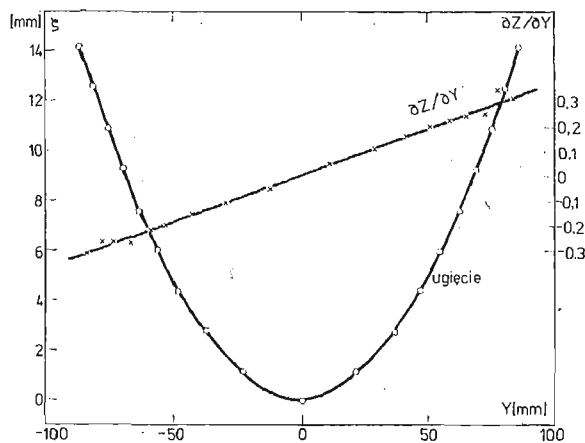
7. Przykład zastosowania metody do badania płyty

Dla ilustracji rozpatrzmy przykład płyty kwadratowej $153 \text{ mm} \times 153 \text{ mm}$, odkształconej w sposób ukazany na rysunkach 3 i 5. Mapę przecięć płyty przedstawia rys. 10. Ograniczając się do przekroju $X = 0$ wyznaczamy z tego zdjęcia współrzędne Y_k punktów przecięcia kolejnych warstwic (jasnych prążków mory) z linią wybranego przekroju (tu



Rys. 10. Mapa przecięć optycznych badanej płyty kwadratowej. Tworzące wałców eliptycznych, przecinających płytę, są równoległe do osi Y

osią Y), a następnie przy pomocy wzoru (3.9) obliczamy rzędne Z_k tych punktów, kładąc kolejno wartości parametru $k = 53, 52, \dots, 45$. W środku płyty, jak wyliczyliśmy poprzednio, jest $k = 53,74$ czemu odpowiada $Z_0 = 648,04 \text{ mm}$. Ugięcie ζ_k w punktach Y_k naszego przekroju jest wobec tego $\zeta_k = Z_k - Z_0$ i wykresie przedstawione jest na rys. 11.

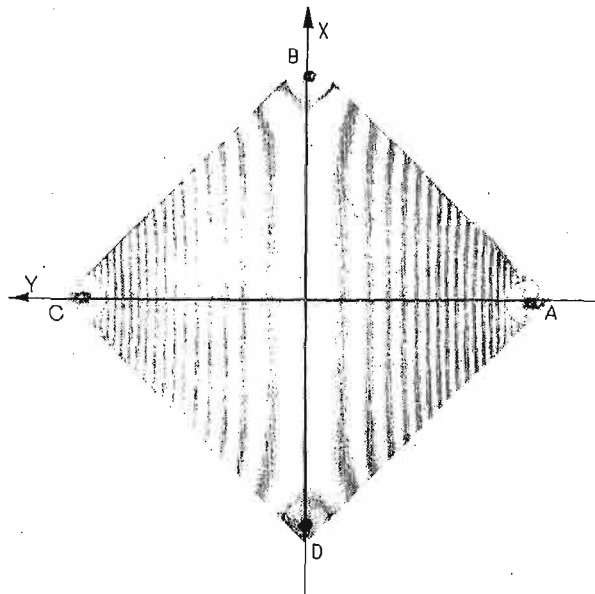


Rys. 11. Wykres ugięcia (kółeczka) oraz wykres pochodnej (krzyżyki) w przekroju $AC (X = 0)$ badanej płyty kwadratowej

Wyniki obliczeń zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1. Wyniki obliczeń dla płyty kwadratowej

k	Y_k	Z_k	ζ_k	ΔY	ΔZ	$\partial Z / \partial Y$	$Y + \frac{\Delta Y}{2}$	$R^t \Delta Z$
45	-87.90	661.06	14.20	5.41	-1.66	-0.3068	-85.2	
46	-82.49	659.40	12.54	6.09	-1.65	-0.2709	-79.4	
47	-76.40	657.75	10.89	6.08	-1.64	-0.2697	-73.4	
48	-70.32	656.11	9.25	6.09	-1.63	-0.2676	-67.3	
49	-64.23	654.48	7.62	7.43	-1.62	-0.2207	-60.5	
50	-56.80	652.86	6.00	8.12	-1.62	-0.1995	-52.7	
51	-48.68	651.24	4.38	10.82	-1.60	-0.1479	-43.3	
52	-37.86	649.64	2.78	14.87	-1.60	-0.1076	-30.4	
53	-22.99	648.04	1.18	22.99	-1.18	-0.0513	-11.5	
53.74	0.00	646.86	0.00	21.64	1.18	0.0545	10.8	
53	21.64	648.04	1.18	15.55	1.60	0.1029	29.4	1.60
52	37.19	649.64	2.78	10.14	1.60	0.1578	42.3	1.61
51	47.33	651.24	4.38	8.11	1.62	0.1997	51.4	1.61
50	55.44	652.86	6.00	7.44	1.62	0.2177	59.2	1.62
49	62.88	654.48	7.62	6.76	1.63	0.2411	66.3	1.63
48	69.64	656.11	9.25	6.76	1.64	0.2426	73.0	1.64
47	76.40	657.75	10.89	4.74	1.65	0.3481	78.8	1.65
46	81.14	659.40	12.54	5.41	1.66	0.3068	83.8	1.65
45	86.55	661.06	14.20					



Rys. 12. Mapa przecięć płyty kwadratowej przy drugim ustawieniu płyty (tworzące walców są teraz równoległe do osi X)

Przyrosty ΔZ zostały tu obliczone jako różnice $\Delta Z = Z_k - Z_{k+1}$, ale to samo można było otrzymać wzorem $R^t \Delta Z$, gdzie $\Delta Z = Z_{53} - Z_{54} = 1,591$ mm, $R = 1,0049$ (patrz §5), kładąc na t wartości 1, 2, 3, ... dla kolejnych $k = 53, 52, 51, \dots 45$. Są one podane w ostatniej kolumnie tablicy 1 w celu porównania ich z wartościami ΔZ z kolumny 6-ej. Obliczając przyrosty ΔZ wzorem $R^t \Delta Z$ nie musimy wielokrotnie wyliczać Z_k ze wzoru (3.9), co znacznie skraca proces obliczeniowy.

Po obliczeniu przyrostów ΔZ oraz ΔY znajdujemy za pomocą (5.1) wartości pochodnej cząstkowej $\partial Z / \partial Y$, podane w tablicy 1 w kolumnie pod tym nagłówkiem. Jej wykres nanie-siony jest na rys. 11. Jak widać, wyliczone punkty układają się wzdłuż linii prostej, mającej współczynnik kierunkowy 0,366, skąd wniosek, że druga pochodna cząstkowa jest stała i równa $\partial^2 Z / \partial Y^2 = 0,366$.

Dla otrzymania pochodnej cząstkowej $\partial Z / \partial X$ badany obiekt należy obrócić wokół osi Z o kąt 90° i całą procedurę powtórzyć. W rozpatrywanym przykładzie orzymano mapę przecięć, przedstawioną na rys. 12. Jak widać, warstwice są liniami równoległymi, z czego wynika, że zginanie jest walcowe. Jedyne w pewnym otoczeniu punktów B, D podparcia płyty widoczne jest zaburzenie tego przebiegu. Widać następnie, że środek płyty (oraz znaczna część jej przekątnej BD) obniżony jest o ok. $\Delta Z / 2 = 0,8$ mm w stosunku do punktów podparcia B, D .

8. Podsumowanie i streszczenie

W artykule opisano metodę badania ugięć płyt metodą przecięć optycznych powierzchniami walcowymi, wygenerowanymi w przestrzeni przy pomocy układu projekcyjnego, zaprojektowanego i zbudowanego przez autora. Układ jest prosty w budowie i może być wykonany niewielkim kosztem z elementów dostępnych na krajowym rynku fotograficznym. Przy jego pomocy można badać ugięcia płyt i powłok dowolnie obciążanych, przy czym rozmiary badanych obiektów mogą zawierać się w szerokich granicach od kilkunastu centymetrów do kilku metrów, co pozwala wykorzystywać metodę w warunkach naturalnych bez konieczności modelowania. W artykule wyłożono w zarysie teorię powstawania powierzchni optycznych oraz mechanizm optycznych przecięć. Podane zostały wzory umożliwiające zastosowanie opisywanej metody do praktycznych zagadnień mechaniki stosowanej. Dla ilustracji dość szczegółowo opisano przykład zginania płyty, a w celu weryfikacji metody, wyniki otrzymane przy jej pomocy porównano z wynikami niezależnego pomiaru.

Literatura cytowana w tekście

1. A. J. DURELLI, V. J. PARKS: *Moiré Analysis of Strain*, Prentice Hall, 1970.
2. J. J. WĄSOWSKI: *Badanie ugięć powłok techniką warstwicowych map morowych*. *Archiwum Budowy Maszyn*, 23, zeszyt 3 (1976) str. 423—432.
3. P. S. THEOCARIS: *Moiré Patterns in Strain Analysis*. Pergamon Press, 1969.
4. J. J. WĄSOWSKI: *Moiré Topographic Maps*. *Optics Communications*, 2, 7 (1970) str. 321—323.
5. J. J. WĄSOWSKI: *Badanie kształtu powierzchni metodą mory*. Praca doktorska, Instytut Fizyki Politechniki Warszawskiej, 1974.

6. M. B. PIASECKI: *Fotogrametria lotnicza i naziemna*. Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, 1958.
7. R. FINSTERWALDER, W. HOFMAN: *Photogrammetrie*. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1968.

Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 1205 — „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИН МЕТОДОМ МУАРА

В работе представлено использование метода проекционного муара в исследовании изгиба нагруженных пластин. На поверхности исследуемой пластины проецируется две линейные сетки с помощью двух проекторов. Из наложения их образцов получаем муаровую картину, которую можно рассматривать как карту деформированной пластины, а муаровые полосы как линии уровня, которые получаются в результате пересечения исследуемой пластины семейством поверхностей, которыми в рассматриваемом случае были эллиптические цилиндры. Указано, как из полученной карты можно одержать не только кривую прогиба пластины в данном сечении, но также эпюру изгибающего момента. В работе представлено теорито оптических сечений методом проекционного муара, описано проекционно-фотографическую установку и рассмотрено детально пример, что в итоге позволяет применить данный метод к решению ряда практических задач прикладной механики.

Summary

EXAMINATION OF THE DEFLECTION OF PLATES BY MOIRÉ METHOD

The application of projective moiré to the study of the deflection of plates is presented in the paper. By means of two projectors two linear gratings are projected onto the surface of the tested plate, where from their superposition a moiré is produced. The moiré fringes can be interpreted as the contour lines obtained from optical sectioning of the plate by a family of contouring surfaces and hence the moiré can be regarded as the contour map of deflected plate. A special case, in which the contouring surfaces are elliptic cylinders, has been discussed. It was shown, how to obtain not only the shape of deflection of the plate in a chosen cross section, but also the distribution of bending moment. The theory of moiré optical contouring is presented in the paper, the projective-photographic setup is described and an illustrative example is discussed in detail, what permits immediate application of the method to the problems of applied mechanics.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INST. TECHN. LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.

Praca uzyskała I nagrodę w ogólnopolskim konkursie na prace doświadczalną w mechanice, organizowanym w 1977 r. przez Oddział Częstochowski PTMTiS