

## OKREŚLENIE UGIĘĆ LEPKOPLASTYCZNEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ OBCIĄŻONEJ IMPULSEM CIŚNIENIA

WIESŁAW WOJEWÓDZKI, ANNA PERDZYŃSKA (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Istnieje wiele prac dotyczących dynamicznych problemów cienkich płyt niesprężystych o warunkach kołowej symetrii. Wyczerpująca bibliografia tych opracowań nie jest naszym celem. Wymienione zostaną tylko niektóre prace. Pierwsze rozwiązania w ramach klasycznej teorii plastyczności podali WANG, HOPKINS [1], HOPKINS, PRAGER [2], WANG [3]. Następnie uwzględniono niektóre z dodatkowych czynników jak: własności sprężyste materiału, wzmocnienie, lepkość i zmiany geometrii. Uczynili to: DUFFY, KEY [4], WITMER, CLARK, BALMER [5], FLORENCE [6], JONES [7], WIERZBICKI [8—12], LEPIK [13], PERRONE [14]. Obszerne rozprawy WIERZBICKIEGO [15] poświęcone dynamice powłok i płyt lepkoplastycznych podaje analityczne metody wyznaczania deformacji, metody oszacowania ugięć, omawia wpływ różnych czynników decydujących o przebiegu procesu dynamicznego, oraz przegląd dotychczasowych osiągnięć. Istnieje nieporównanie mniej rozwiązań płyt o dowolnym kształcie. Przyczyna leży w złożoności fizycznej i matematycznej problemu. Dynamiczny warunek plastyczności musi być wyrażony w conajmniej trójwymiarowej przestrzeni sił wewnętrznych. Uniemożliwia to prostą linearyzację prawa płynięcia. Równania różniczkowe rządzące problemem stają się bardziej skomplikowane niż w przypadku kołowej symetrii. Uwzględnienie wymienionych już dodatkowych czynników komplikuje problem jeszcze bardziej. COX i MORLAND [16] jako pierwsi podali rozwiązanie dla płyty kwadratowej. Podobny problem z uwzględnieniem lepkości materiału był rozpatrywany w pracy WIERZBICKIEGO [17]. JONES, URAN, TEKIN [18] badali eksperymentalnie prostokątne płyty utwierdzone na krawędziach wykonane z aluminium i miękkiej stali obciążone impulsem ciśnienia. Stwierdzono istotny wpływ zmian geometrii i lepkości materiału na zmniejszenie przemieszczeń. W pracy [19] JONES uwzględnił efekt zmian geometrii podając uproszczoną teorię idealnie plastycznych płyt dowolnego kształtu. Podane wyżej rozwiązania [16], [19] jak również rozwiązanie BAKA, NIEPOSTYNA [20], bazując na teorii linii załomów, przyjmują ustalone pole prędkości, a tym samym narzucają końcowy kształt odkształconej płyty. Stwierdzono doświadczalnie, że w procesie dynamicznym deformacja płyty charakteryzuje się znaczną zmianą postaci pola prędkości przemieszczeń. W pracy WOJEWÓDZKIEGO, WIERZBICKIEGO [21] uogólniono teorię WIERZBICKIEGO dotyczącą konstrukcji powierzchniowych o osiowej symetrii na przypadek płyt o dowolnym kształcie. Jako przykład rozwiązano prostokątną płytę utwierdzoną na obwodzie, obciążoną idealnym impulsem ciśnienia. Celem niniejszej

pracy jest szczegółowa analiza w ramach założeń [21] procesu deformacji i określenie końcowych ugięć płyty prostokątnej o krawędziach zamocowanych przegubowo, obciążonej dynamicznie. Zbadany będzie wpływ lepkości materiału, kształtu i wielkości impulsu. Końcowe ugięcia będą wyznaczone przy zastosowaniu dwóch sposobów spełnienia kryterium odciążenia. W wyniku przejścia granicznego podane będą wyniki dla plastyczności idealnej.

## 2. Równanie ruchu lepkoplastycznej płyty

Równanie ruchu płyty ma postać, [21]

$$(2.1) \quad \ddot{w} + \alpha_0 \Delta^4 \dot{w} - (P - P^*)/\mu = 0,$$

gdzie  $w$  — oznacza przemieszczenie normalne,  $\nabla^4 \dot{w} = \dot{w}_{,\alpha\alpha\beta\beta}$  jest operatorem Laplace'a,  $\alpha_0 = 4kh^3/(3\gamma\mu)$ ,  $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ ,  $\mu = 2h\rho$ ,  $\sigma_0$  — oznacza granicę plastyczności materiału,  $\gamma$  — lepkość,  $\rho$  — gęstość materiału, zaś  $2h$  jest grubością płyty. Przecinkiem oznaczono różniczkowanie względem współrzędnych kartezjańskiego układu  $x_\alpha$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ), a kropką względem czasu  $t$ . Przez  $P(x_\alpha, t)$  oznaczono ciśnienie przyłożone do płyty, a przez  $P^*$  jej nośność graniczną.

Równanie powyższe wprowadzone zostało w oparciu o zlinearyzowane prawo lepkoplastyczności, przy pominięciu odkształceń sprężystych i założeniu małych ugięć. Obowiązuje ono tylko w obszarach plastycznego płynięcia. Granicę między sztywnymi obszarami, które mogą występować w płycie, a lepkoplastycznymi określamy z warunku odciążenia,  $\dot{w} = 0$ . Równanie (2.1) wraz z warunkiem odciążenia opisuje plastyczne i lepkie efekty, propagację stref sztywnych i zmianę postaci pola przemieszczeń. Równanie to można względnie szybko rozwiązać i wyznaczyć trwale ugięcia płyty.

## 3. Metoda rozwiązania

Płyta prostokątna o krawędziach przegubowo zamocowanych jest obciążona równomiernie rozłożonym na całej powierzchni impulsem ciśnienia dowolnie zmiennym w czasie i działającym w kierunku normalnym do jej powierzchni, rys. 1, 2. Lepkoplastyczna deformacja wystąpi, jeżeli w chwili  $t = 0$  będzie  $\bar{P} > P^*$ . Gdyby przez cały czas  $\bar{P} = P^*$  to plastyczna deformacja płyty byłaby nieskończenie powolna i nie pojawiłyby się siły inercji i efekty lepkie. W przypadku przedstawionym na rys. 2 należy rozpatrzyć dwie fazy ruchu płyty.

Faza I.  $0 \leq t \leq \tau$ .

Równanie ruchu płyty ma postać

$$(3.1) \quad L(\dot{w}) = \dot{w} + \alpha_0 \nabla^4 \dot{w} - (P(t) - P^*)/\mu = 0,$$

gdzie nośność graniczna płyty obciążonej stałym i równomiernie rozłożonym na całej powierzchni ciśnieniem wynosi

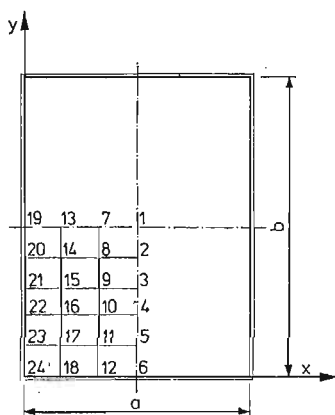
$$(3.2) \quad P^* = \frac{24M_0\lambda^2}{b^2(\sqrt{3+1/\lambda^2} - 1/\lambda)^2}, \quad M_0 = \sigma_0 h, \quad \lambda = \frac{b}{a} \geq 1.$$

Przyjmujemy, że nieodkształcona płyta jest płaska, zatem warunki początkowe są następujące:

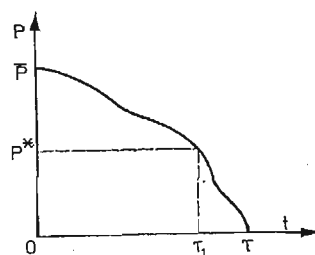
$$(3.3) \quad \dot{w}(x, y, 0) = 0 \quad w(x, y, 0) = 0.$$

Warunki brzegowe są określone przez

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w(0, y, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ w(a, y, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ w(x, 0, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} &= 0, \\ w(x, b, t) &= 0, & \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 1. Wymiary płyty



Rys. 2. Impuls ciśnienia

Pole prędkości ugięcia spełniające warunki brzegowe (3.4) przyjmujemy w postaci szeregu:

$$(3.5) \quad \dot{w}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Funkcję amplitudy  $A_{nm}(t)$  wyznaczamy metodą Galerkina:

$$(3.6) \quad \int_0^a \int_0^b L(\dot{w}) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy = 0, \quad k, l = 1, 2, 3 \dots$$

Otrzymane z (3.6) równanie różniczkowe ma postać

$$(3.7) \quad \dot{A}_{nm}(t) + C_{nm} A_{nm}(t) - G_{nm}(P(t) - P^*) = 0,$$

gdzie

$$(3.8) \quad C_{nm} = (m^2 a^2 + n^2 b^2)^2 \frac{\alpha_0 \pi^4}{a^4 b^4}, \quad G_{nm} = \frac{16}{nm\mu\pi^2},$$

a wskaźniki  $n$  i  $m$  przyjmują tylko wartości liczb całkowitych nieparzystych. Rozwiązując równanie (3.7) metodą uzmienniania stałych i wykorzystując pierwszy z warunków początkowych (3.3) do wyznaczenia stałej całkowania otrzymujemy funkcję amplitudy

$$(3.9) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [D_{nm}(t) + P^*(e^{-C_{nm}t} - 1) - D_{nm}(0)e^{-C_{nm}t}],$$

gdzie

$$(3.10) \quad D_{nm}(t) = C_{nm} e^{-C_{nm}t} \int P(t) e^{C_{nm}t} dt.$$

Całkując (3.5) z uwzględnieniem (3.9) i drugiego warunku początkowego (3.3) otrzymujemy następujące pola ugięć:

$$(3.11) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(P^* - D_{nm}(0))(1 - e^{-C_{nm}t}) + (Y_{nm}(t) - Y_{nm}(0))C_{nm} - P^* C_{nm}t] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

gdzie

$$(3.12) \quad Y_{nm}(t) = \int D_{nm}(t) dt.$$

Ruch płyty może zakończyć się jeszcze pod działaniem obciążenia w przedziale czasu  $\tau_1 - \tau$ , gdzie  $\tau_1$  jest czasem, w którym funkcja  $P(t)$  przyjmuje wartość obciążenia granicznego  $P^*$ .

Warunek odciążenia

$$(3.13) \quad \dot{w}(x, y, t_f) = 0$$

można spełnić w dwojaki sposób. Pierwszy sposób dopuszcza ujemne wartości amplitud prędkości ugięcia. Stosując ten sposób należy zbadać czy w poszczególnych punktach płyty warunek (3.13) jest spełniony dla czasów  $\tau_1 \leq t \leq \tau$ . W tych punktach, w których ten warunek jest spełniony końcowe ugięcia obliczamy według (3.11). W pozostałych punktach płyty ruch zakończy się w fazie II. Drugi sposób uwzględnienia tylko dodatnie wartości funkcji amplitud  $A_{nm}(t)$ . Zatem stosując ten sposób amplitudy następnym postaci  $A_{nm}(t)$ , dla ustalonego problemu brzegowego, będą równe zero dla czasu  $t > t_{f_{nm}}$ , gdzie  $t_{f_{nm}}$  jest określone przez równanie  $A_{nm}(t_{f_{nm}}) = 0$ , które po uwzględnieniu (3.9) ma postać

$$(3.14) \quad D_{nm}(t)_{f_{nm}} + P^*(e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}} - 1) - D_{nm}(0)e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}} = 0.$$

W końcowym okresie deformacji istnieje tylko pierwsza postać  $A_{11}(t)$  i w czasie  $t_{f_{11}}$  wszystkie punkty płyty zatrzymują się jednocześnie. Jeżeli wyznaczony z (3.14) czas  $t_{f_{11}}$  będzie mniejszy od  $\tau$ , oznacza to, że ruch płyty zakończy się w fazie I. Końcowe ugięcia wyznacza się wtedy z (3.11).

Faza II,  $\tau < t$ .

W tej fazie ruchu  $P(t) = 0$ , ale płyta będzie odkształcała się dalej zanim energia kinetyczna wprowadzona uprzednio przez działanie obciążenia nie zostanie rozproszona w lepkoplastycznej pracy. Równanie ruchu płyty w tej fazie jest następujące:

$$(3.15) \quad L(\dot{w}) = \ddot{w} + \alpha_0 \nabla^4 \dot{w} + P^*/\mu = 0.$$

Pole prędkości ugięcia przyjmujemy jak poprzednio, w postaci (3.5). Dalej postępujemy analogicznie jak w fazie I.

Równanie różniczkowe amplitudy ma postać (3.7) z podstawieniem  $P(t) = 0$ .

Spełniając warunki ciągłości

$$(3.16) \quad \dot{w}_I(x, y, \tau) = \dot{w}_{II}(x, y, \tau), \quad w_I(x, y, \tau) = w_{II}(x, y, \tau),$$

gdzie indeksy I i II odnoszą się odpowiednio do wielkości fazy pierwszej i drugiej, obliczamy stałe całkowania i ostatecznie otrzymujemy

$$(3.17) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [(D_{nm}(\tau)e^{C_{nm}\tau} + P^* - D_{nm}(0))e^{-C_{nm}t} - P^*],$$

$$(3.18) \quad \dot{w}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$(3.19) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(D_{nm}(0) - P^* - D_{nm}(\tau)e^{C_{nm}\tau}) \times \\ \times e^{-C_{nm}t} - P^* C_{nm}t + (Y_{nm}(\tau) - Y_{nm}(0))C_{nm} + D_{nm}(\tau) - D_{nm}(0) + P^*] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Dla tych punktów płyty, które nie zatrzymały się w fazie I stosownie do pierwszego sposobu spełnienia kryterium (3.13) czas zatrzymania i końcowe ugięcia oblicza się korzystając z (3.18) i (3.19). Natomiast stosując drugi sposób spełnienia kryterium odciążenia czas końcowy amplitudy  $A_{nm}$  dla tych numerów wskaźników  $n$  i  $m$  dla których nie został ustalony w fazie I wyznacza się przyrównując (3.17) do zera. Otrzymujemy

$$(3.20) \quad t_{f_{nm}} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{D_{nm}(\tau)e^{C_{nm}\tau} + P^* - D_{nm}(0)}{P^*}.$$

Chwila  $t_{f_{11}}$  obliczona z tego wzoru jest czasem zakończenia ruchu płyty. Końcowe ugięcia obliczamy korzystając ze związku (3.19).

Dyskusję różnych kryteriów odciążenia dla zlineryzowanych równań lepkoelastyczności i interpretację energetyczną podanych dwóch sposobów spełnienia (3.13) zawiera praca WIERZBICKIEGO [23]. Pierwszy sposób dopuszcza przepływ energii z niższych do wyższych postaci prędkości przemieszczenia, drugi sposób takiej transmisji nie dopuszcza.

Obecnie rozpatrzmy trzy prędkości szczególne, a mianowicie obciążenie płyty prostokątnym, trójkątnym i idealnym impulsem ciśnienia.

#### 4. Obciążenie prostokątnym impulsem ciśnienia

W podanej w poprzednim rozdziale metodzie rozwiązania należy uwzględnić, że  $P(t) = \bar{P} = \text{const}$ , rys. 3. Otrzymujemy:

Faza I.  $0 \leq t \leq \tau$ .

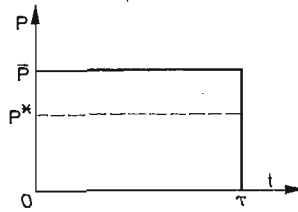
$$(4.1) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} (\bar{P} - P^*) (1 - e^{-C_{nm}t}),$$

$$(4.2) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} (\bar{P} - P^*) (e^{-C_{nm}t} + C_{nm}t - 1) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Faza II.  $\tau < t$ .

$$(4.3) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [(\bar{P} e^{C_{nm}\tau} - \bar{P} + P^*) e^{-C_{nm}t} - P^*],$$

$$(4.4) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(\bar{P} - P^* - \bar{P} e^{C_{nm}\tau}) e^{-C_{nm}t} - P^* (C_{nm} + \bar{P}\tau C_{nm} + P^*)] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$



Rys. 3. Prostokątny impuls ciśnienia

Czasy zakończenia ruchu punktów płyty według pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia określa się przez przyrównanie do zera prawej strony równania (3.5) z aktualną amplitudą (4.3), a końcowe ugięcia z (4.4). Natomiast według drugiego sposobu spełnienia kryterium przyrównując (4.3) do zera otrzymujemy

$$(4.5) \quad t_{f_{nm}} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{\bar{P} e^{C_{nm}\tau} - \bar{P} + P^*}{P^*}.$$

Dla  $t > t_{f_{nm}}$  amplitudy wyższych postaci wynoszą zero. Podstawiając (4.5) do (4.4) otrzymujemy wzór na końcowe ugięcia płyty

$$(4.6) \quad w_f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} \left( \bar{P}\tau C_{nm} - P^* \ln \frac{\bar{P} e^{C_{nm}\tau} - \bar{P} + P^*}{P^*} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Na zakończenie tego rozdziału podamy wyrażenia (4.5) i (4.6) w przypadku idealnej plastyczności tzn. gdy  $\gamma \rightarrow \infty$ , odpowiada to zgodnie z (3.8)  $C_{nm} \rightarrow 0$ . Otrzymujemy

$$(4.7) \quad t_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} t_{f_{nm}} = \frac{\bar{P}\tau}{P^*} = \frac{I}{P^*}, \quad I = \bar{P}\tau,$$

$$(4.8) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\bar{P}(\bar{P} - P^*)\tau^2}{\pi^2 P^* \mu} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

## 5. Obciążenie trójkątnym impulsem ciśnienia

W tym przypadku, rys. 4

$$(5.1) \quad P(t) = \bar{P} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

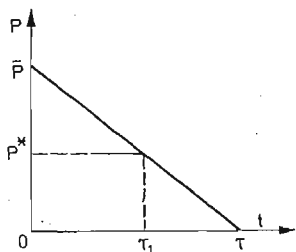
Zgodnie z rozdziałem 3 otrzymujemy:

Faza I.  $0 \leq t \leq \tau$ .

$$(5.2) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} \left[ \left( \bar{P} - P^* - \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} \right) (1 - e^{-C_{nm}t}) - \frac{\bar{P}}{\tau} t \right],$$

$$(5.3) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} \left[ \left( \bar{P} - P^* + \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} \right) (C_{nm}t + e^{-C_{nm}t} - 1) - \frac{\bar{P}t^2}{2\tau} C_{nm} \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Zależnie od wielkości przyłożonego impulsu odciążenia może nastąpić w przedziale czasu  $\tau_1 - \tau$ , gdzie  $\tau_1 = (\bar{P} - P^*) \tau / \bar{P}$  jest czasem, w którym obciążenie osiąga wartość nośności granicznej  $P^*$ .



Rys. 4. Trójkątny impuls ciśnienia

Zgodnie z pierwszą możliwością spełnienia kryterium odciążenia badamy, dla których punktów płyty  $\dot{w}(x, y, t) = 0$  w przedziale czasu  $\tau_1 - \tau$ . W tych punktach, w których warunek ten zachodzi ruch ustaje i trwałe ugięcia mogą być obliczone z (5.3). W pozostałych punktach ruch zakończy się w fazie II.

Stosując drugi sposób spełnienia kryterium odciążenia, dla każdej pary  $n$  i  $m$  szuka się takiego czasu  $\tau_1 \leq t_{fnm} \leq \tau$ , aby amplituda  $A_{nm}(t_{fnm})$  była równa zero. Zadanie to można rozwiązać graficznie. Przyrównując (5.2) do zera otrzymujemy równanie określające  $t_{fnm}$  w postaci

$$(5.4) \quad e^{-C_{nm}t_{fnm}} = 1 - r_{nm}t_{fnm},$$

gdzie

$$(5.5) \quad r_{nm} = \frac{\bar{P}/\tau}{\bar{P} - P^* + \bar{P}/(\tau C_{nm})} > 0.$$

dla każdego  $n$  i  $m$ . Dla każdej z uwzględnianych wartości  $n$  i  $m$ , po obliczeniu współczynników  $C_{nm}$  i  $r_{nm}$ , można znaleźć drugi poza punktem (0,1) punkt przecięcia krzywej  $e^{-C_{nm}t_{fnm}}$

z prostą  $1 - r_{nm} t_{f_{nm}}$ . Jeżeli odcięta punktu przecięcia będzie zawarta w granicach  $\tau_1 \rightarrow \tau$  to  $t_{f_{nm}}$  będzie poszukiwanym czasem. W przypadku istnienia w okresie działania obciążenia  $t_{f_{nm}} \leq \tau$  dla wszystkich wskaźników  $n$  i  $m$ , ugięcia końcowe w poszczególnych punktach płyty znajduje się przez podstawienie  $t_{f_{nm}}$  do (5.3), a rozpatrywanie fazy ruchu po zdjęciu obciążenia staje się zbędne. Z uwagi na szybką zbieżność szeregu wystarczy w obliczeniach uwzględnić niewielką liczbę wyrazów.

Faza II.  $\tau < t$ .

$$(5.6) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} \left\{ \left[ \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} (e^{C_{nm}\tau} - 1) - \bar{P} + P^* \right] e^{-C_{nm}t} - P^* \right\},$$

$$(5.7) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} \left\{ \left[ \bar{P} - P^* - \frac{\bar{P}}{\tau C_{nm}} (e^{C_{nm}\tau} - 1) \right] e^{-C_{nm}t} - P^* C_{nm} t + \frac{\bar{P}\tau}{2} C_{nm} + P^* \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Postępując według pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia, w punktach, w których trwałe ugięcia nie zostały znalezione w fazie I, bada się dla jakiego czasu  $\dot{w}(x, y, t) = 0$ . Wykorzystując ten wynik, ze wzoru (5.7) obliczamy końcowe ugięcia.

Korzystając z drugiego sposobu spełnienia warunku odciążenia czas końcowy amplitudy, dla tych  $n$  i  $m$ , dla których nie został ustalony w fazie I, oblicza się ze wzoru

$$(5.8) \quad t_{f_{nm}} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{\bar{P}(e^{C_{nm}\tau} - 1) / (\tau C_{nm}) - \bar{P} + P^*}{P^*}.$$

Czasem zakończenia ruchu płyty będzie czas  $t_{f_{11}}$ . Końcowe ugięcia stanowią sumę wyrazów wyznaczonych przez podstawienie  $t_{f_{nm}} < \tau$  obliczonych z (5.4) do szeregu (5.3) i  $t_{f_{nm}} > \tau$  z (5.8) do (5.7).

Przejście graniczne do plastyczności idealnej. Faza I. Jak widać z równania (5.4) nie można uzyskać jawnego wzoru na  $t_{f_{nm}}$  aby następnie obliczyć granicę dla  $\gamma \rightarrow \infty$  (jest to równoważne  $C_{nm} \rightarrow 0$ ). Postąpimy zatem w sposób następujący:

Wyznaczamy z (5.4) wielkość  $\bar{P}$ :

$$(5.9) \quad \bar{P} = \frac{P^*(1 - e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}})}{(1 - 1/(\tau C_{nm}))(1 - e^{-C_{nm}t_{f_{nm}}}) - t_{f_{nm}}/\tau},$$

a następnie obliczamy prawą stronę tego wyrażenia gdy  $\gamma \rightarrow \infty$ . Otrzymujemy wzór

$$(5.10) \quad \bar{P} = \frac{2\tau P^*}{2\tau - t_{f_{nm}}},$$

z którego znajdujemy interesującą nas zależność czasu zakończenia ruchu sztywno-plastycznej płyty od wartości przyłożonego obciążenia tzn.

$$(5.11) \quad t_{pf} = \frac{2\tau(\bar{P} - P^*)}{\bar{P}}.$$



Dla  $t = t_{pf}$  określonego przez (5.11) w przejściu granicznym z wyrażenia (5.3) otrzymujemy wzór na trwałe ugięcia

$$(5.12) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \frac{3\tau(\bar{P} - P^*)t_{pf}^2 - \bar{P}t_{pf}^3}{6\tau} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{32(\bar{P} - P^*)^3 \tau^2}{3\pi^2 \bar{P}^2 \mu} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

**Faza II.** Wyrażeniom (5.8) i (5.7) określającym czas zakończenia ruchu i trwałe ugięcia w przypadku sztywno-plastycznej płyty, ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) nadajemy postać

$$(5.13) \quad t_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} t_{f_{nm}} = \frac{\bar{P}\tau}{2P^*} = \frac{I}{P^*}, \quad I = \frac{\bar{P}\tau}{2},$$

$$(5.14) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{P}(3\bar{P} - 4P^*)\tau^2}{3\pi^2 P^* \mu} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Z wzorów (5.11) i (5.13) wynika, że dla obciążenia  $\bar{P} = 2P^*$  czas zakończenia deformacji będzie równy okresowi działania obciążenia  $\tau$ , a przy większym obciążeniu ruch płyty zakończy się w fazie II.

## 6. Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia

Zagadnienie to można rozwiązać obliczając granicę ostatecznych wzorów otrzymanych dla obciążenia prostokątnym impulsem, przy  $\tau$  dążącym do zera i rosnącej wartości  $P$ , przy czym iloczyn  $\tau P$  pozostaje stały i równy wielkości impulsu  $I = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} P(t) dt$  lub, jak to zostało pokazane w tym rozdziale, przez uwzględnienie działania idealnego impulsu w warunkach początkowych

$$(6.1) \quad \dot{w}(x, y, 0) = \frac{I}{\mu} = V_0, \quad w(x, y, 0) = 0.$$

Warunki brzegowe pozostają bez zmian i są określone przez (3.4). Równania ruchu i amplitudy są dane przez (3.1) i (3.7) z podstawieniem  $P(t) = 0$ . Aby rozwiązać równanie różniczkowe amplitudy wykorzystuje się pierwszy warunek początkowy (6.1) tzn.

$$(6.2) \quad \dot{w}(x, y, 0) = V_0 = \frac{I}{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(0) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Współczynnik  $A_{nm}(0)$  znajduje się mnożąc stronami (6.2) przez  $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}$  i całkując w obszarze płyty. Wynosi on

$$(6.3) \quad A_{nm}(0) = \frac{16}{nm\pi^2} V_0 = G_{nm} I,$$

a rozwiązanie równania różniczkowego amplitudy ma postać

$$(6.4) \quad A_{nm}(t) = \frac{G_{nm}}{C_{nm}} [(C_{nm}I + P^*)e^{-C_{nm}t} - P^*].$$

Pola prędkości przemieszczenia i pole ugięć określone jak w punkcie 3 mają postać

$$(6.5) \quad \dot{w}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$(6.6) \quad w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}^2} [(IC_{nm} + P^*)(1 - e^{-C_{nm}t}) - P^*tC_{nm}] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Podobnie jak w poprzednich punktach czas trwania deformacji i trwałe ugięcia płyty wyznacza się stosując dwa sposoby spełnienia kryterium odciążenia  $\dot{w}(x, y, t_f) = 0$ . Według sposobu dopuszczającego ujemne wartości amplitud  $A_{nm}(t)$  określa się, zależnie od współrzędnych  $x$  i  $y$ , czasu  $t_f$  dla których związek (6.5) przyjmuje wartość zero. Następnie tak otrzymany czas zatrzymania się poszczególnych punktów płyty podstawia się do (6.6) i ustala końcowe ugięcia  $w_f(x, y, t_{fnm})$ . Druga możliwość znalezienia poszukiwanych wielkości polega na obliczeniu  $t_{fnm}$ , dla których kolejne amplitudy  $A_{nm}(t)$  będą miały wartość równą zero i na tej podstawie określenie końcowych ugięć punktów płyty. Przystępując (6.4) do zera otrzymujemy czas

$$(6.7) \quad t_{fnm} = \frac{1}{C_{nm}} \ln \frac{P^* + IC_{nm}}{P^*},$$

a z (6.6) po uwzględnieniu (6.7) pole trwałych ugięć

$$(6.8) \quad w_f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{nm}}{C_{nm}} \left( I - \frac{P^*}{C_{nm}} \ln \frac{P^* + IC_{nm}}{P^*} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Dla  $n = m = 1$ , przy uwzględnieniu oznaczeń podanych w poprzednich rozdziałach, otrzymuje się z (6.7) czas zakończenia ruchu całej płyty tzn.

$$(6.9) \quad t_{f11} = \frac{3\sqrt{3}b^4\gamma\varrho}{2\pi^4\sigma_0h^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} \ln \left[ 1 + \frac{4\pi^4V_0\sigma_0h^3\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2}{3\sqrt{3}P^*b^4\gamma} \right]$$

oraz z (6.8) pierwszy i zarazem decydujący wyraz szeregu końcowych ugięć płyty

$$(6.10) \quad w_f(x, y) = \frac{24\sqrt{3}b^4\gamma\varrho}{\pi^6\sigma_0h^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} \left( V_0 - \frac{P^*t_{f11}}{2h\varrho} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Dla plastyczności idealnej tzn.  $\gamma \rightarrow \infty$  wzory (6.7) i (6.8) mają postać

$$(6.11) \quad t_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} t_{fnm} = \frac{I}{P^*}, \quad I = \mu V_0,$$

$$(6.12) \quad w_{pf} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I^2 G_{nm}}{2P^*} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8V_0^2 \mu}{\pi^2 P^*} \frac{1}{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

### 7. Wyniki numeryczne i ich analiza

Ze względu na symetrię szukane wielkości ugięć i prędkości ugięć liczone są w węzłach ortogonalnej siatki jednej czwartej powierzchni płyty, rys. 1. Do obliczeń numerycznych przyjęto stałe mechaniczne i geometryczne, tabl. 1, takie jak w [18,21].

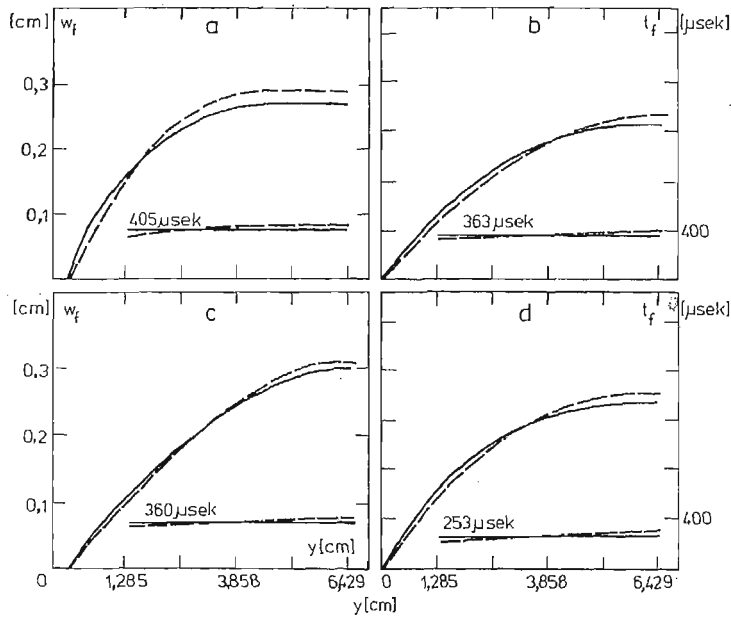
Tablica 1. Stałe materiałowe i geometryczne płyty

$\sigma_0$	$\varrho$	$2h$	$a$	$b$	$\gamma$
[kG/cm <sup>2</sup> ]	$\frac{\text{kGs}^2}{\text{cm}^4}$	[cm]	[cm]	[cm]	[s <sup>-1</sup> ]
2376,38	$8,37 \cdot 10^{-6}$	0,2489	7,62	12,859	50 200 10000

**Wpływ sposobu spełnienia kryterium odciążenia.** Rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego przy stałych granicach procesu deformacji według pierwszego sposobu spełnienia warunku odciążenia prowadzi w końcowej fazie ruchu do wyznaczania pewnej powierzchni rozdzielającej obszary o dodatnich i ujemnych prędkościach ugięcia. Z uwagi na przyjęty model materiału ujemne prędkości są fizycznie niemożliwe. Zatem ten sposób może być stosowany w przypadkach, jeżeli wszystkie punkty płyty zatrzymują się w wąskim przedziale czasu. Na rysunkach 5 - 8, 18 przedstawiono wykresy ugięć, prędkości ugięć środka płyty i czasy zatrzymania się poszczególnych punktów płyty obliczone według pierwszego i drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia. W tablicy 2 podano końcowe ugięcia i czas deformacji środka płyty prostokątnej i płyty kwadratowej (9,898 × 9,898 cm) o równym jej polu. Widać, że ugięcia prędkości i czasy zatrzymania się poszczególnych punktów płyty różnią się o kilka procent. Powierzchnia końcowych ugięć wyznaczona stosownie do drugiego sposobu spełnienia kryterium ma bardziej wyrównany kształt. Zastosowane szeregi są szybkobieżne. Pierwszy wyraz jest decydujący w określeniu prędkości ugięć i ugięć trwałych. Powoduje to małą różnicę w wynikach uzyskanych przy zastosowaniu obu sposobów spełnienia kryterium.

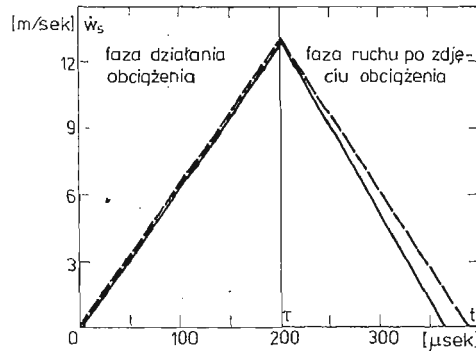
**Wpływ kształtu impulsu.** Jak wynika z wykresów zmienności amplitud prędkości ugięcia w czasie, rys. (9—11) początkowy kształt funkcji zależny jest od rodzaju obciążenia, natomiast w fazie ruchu płyty po zdjęciu obciążenia i przy obciążeniu idealnym impulsem krzywe mają ten sam charakter. Przy obciążeniu prostokątnym impulsem ciśnienia wykres amplitud prędkości ugięcia, (rys. 9) i samych prędkości ugięć w czasie (rys. 6) punktów płyty jest rosnący do czasu zdjęcia obciążenia. Punkt  $t = \tau$  jest ostrzem na wykresie,

pierwsza pochodna i krzywizna zmieniają znak. Dla obciążenia trójkątnym impulsem ciśnienia funkcje amplitudy prędkości ugięcia rosną w czasie od zera osiągając maksimum przed końcem działania obciążenia, a następnie maleją do momentu osiągnięcia określonej wartości ujemnej, (rys. 10). Moment zdjęcia obciążenia,  $t = \tau$  jest punktem przegięcia

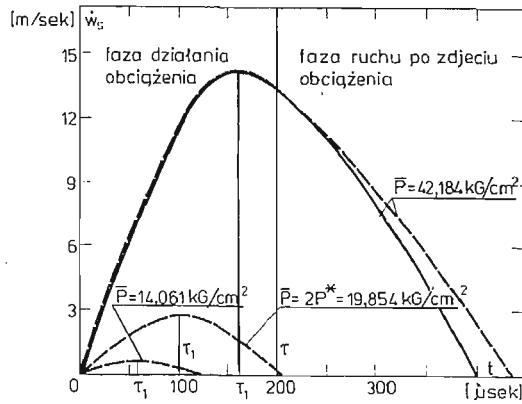


Rys. 5. Końcowe ugięcia i czas zatrzymania punktów płyty położonych na przekroju  $x = a/2$ . Linia przerywana oznacza wartości obliczone wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia a linia ciągła wg drugiego sposobu

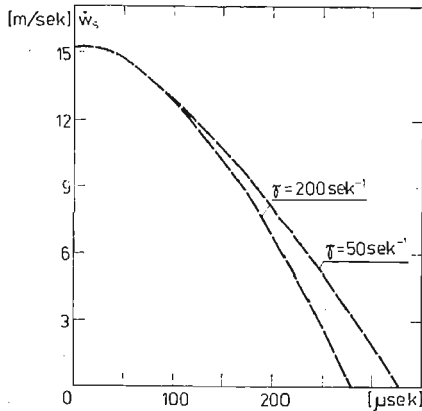
- a) Obciążenie prostokątnym impulsem  $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \mu\text{s.}$ ,  $\gamma = 200 \text{ s.}^{-1}$
- b) Obciążenie prostokątnym impulsem  $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \mu\text{s.}$ ,  $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$
- c) Obciążenie trójkątnym impulsem  $\bar{P} = 42,184 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \mu\text{s.}$ ,  $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$
- d) Obciążenie idealnym impulsem  $V_0 = 15,24 \text{ m/s.}$ ,  $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$



Rys. 6. Zmiana prędkości ugięcia środka płyty w czasie. Obciążenie prostokątnym impulsem  $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \mu\text{s.}$ ,  $\gamma = 50 \text{ s.}^{-1}$ . Linia przerywana oznacza wartości obliczone wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia, a linia ciągła wg drugiego sposobu



Rys. 7. Zmiana prędkości ugięcia środka płyty w czasie. Obciążenie trójkątnymi impulsami  $\bar{P} = 42,184; 19,854; 14,061 \text{ kG/cm}^2$ .  $\tau = 200 \mu\text{s}$ ,  $\gamma = 200 \text{ s}^{-1}$ . Znaczenie linii jak na rys. 6

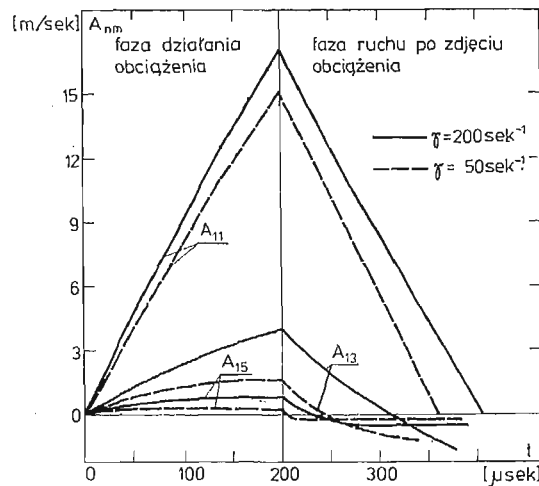


Rys. 8. Zmiana prędkości ugięcia środka płyty w czasie. Obciążenie idealnym impulsem  $V_0 = 15,24 \text{ m/s}$ . Wartości obliczono wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia

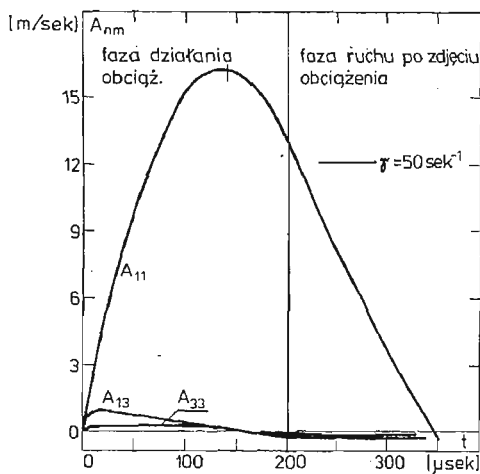
Tablica 2. Końcowe ugięcia i czas deformacji środka płyty prostokątnej i kwadratowej o równych polach

	Obciążenie prostokątnym impulsem $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$		Obciążenie trójkątnym impulsem $\bar{P} = 14,061 \text{ kG/cm}^2$		Obciążenie idealnym impulsem $V_0 = 9,525 \text{ m/s}$	
	Płyta prostokątna	Płyta kwadratowa	Płyta prostokątna	Płyta kwadratowa	Płyta prostokątna	Płyta kwadratowa
Czas deformacji* środku płyty [μs]	443	506	122	151	217	257
	405	448	117	142	191	212
Końcowe ugięcia* środku płyty [cm]	0,2814	0,3604	0,00503	0,00876	0,1143	0,1311
	0,2642	0,3221	0,00496	0,00878	0,10795	0,1191

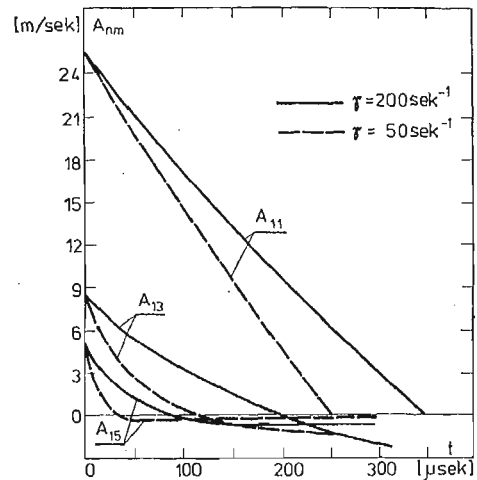
\* Wielkości nad linią przerywaną podane są wg. pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia, a wielkości pod linią przerywaną wg. drugiego sposobu.



Rys. 9. Zmiana amplitud  $A_{nm}$  w czasie. Obciążenie prostokątnym impulsem ciśnienia  $\bar{P} = 21,092 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \mu\text{s}$



Rys. 10. Zmiana amplitud  $A_{nm}$  w czasie. Obciążenie trójkątnym impulsem ciśnienia  $\bar{P} = 42,184 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \mu\text{s}$

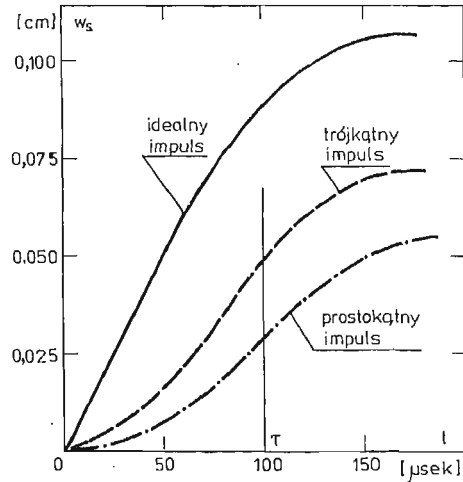


Rys. 11. Zmiana amplitud  $A_{nm}$  w czasie. Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia  $V_0 = 15,24 \text{ m/s}$

wykresu, następuje tu zmiana krzywizny. Charakter wykresu prędkości ugięcia (rys. 7) jest podobny do wykresu amplitud, przy czym maksimum prędkości ugięcia występuje w chwili zrównania się bieżącej wartości obciążenia z obciążeniem granicznym  $P^*$ , (przy brzegu płyty mogą pojawić się niewielkie odchylenia od tej zasady).

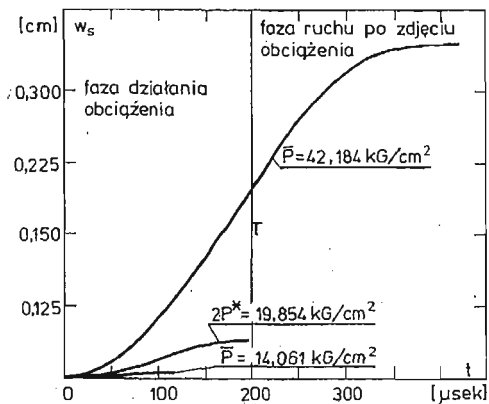
Przy obciążeniu idealnym impulsem wykres amplitud, (rys. 11) i samych prędkości ugięć, (rys. 8) jest w całym przedziale czasu malejący. Dla różnych funkcji obciążenia otrzymuje się podobne wykresy końcowych ugięć punktów lepkoplastycznej płyty. Przy tej samej wartości impulsu większą wartość końcowych ugięć uzyskuje się dla impulsów, które

mają większą początkową wartość obciążenia (większe ugięcia przy obciążaniu idealnym impulsem, mniejsze dla obciążenia trójkątnego w czasie, a najmniejsze dla obciążenia prostokątnym impulsem ciśnienia), (rys. 12). W przypadku kołowych płyt z materiału sztywnoplastycznego wpływ kształtu impulsu na ugięcie końcowe był analizowany przez PERZYŃĘ [24]. Stwierdzono niewielki wpływ, malejący ze wzrostem stosunku  $P_{max}/P^*$ .

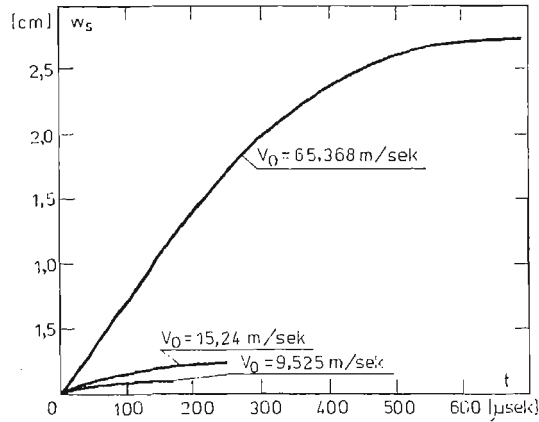


Rys. 12. Ugięcie środka płyty w czasie przy tej samej wielkości impulsów (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia)  $\gamma = 50 \text{ s}^{-1}$ . Obciążenie idealnym impulsem  $V_0 = 9,525 \text{ m/s}$ ; trójkątnym impulsem  $\bar{P} = 39,686 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 100 \text{ } \mu\text{s}$  i prostokątnym impulsem  $\bar{P} = 19,843 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 100 \text{ } \mu\text{s}$ .

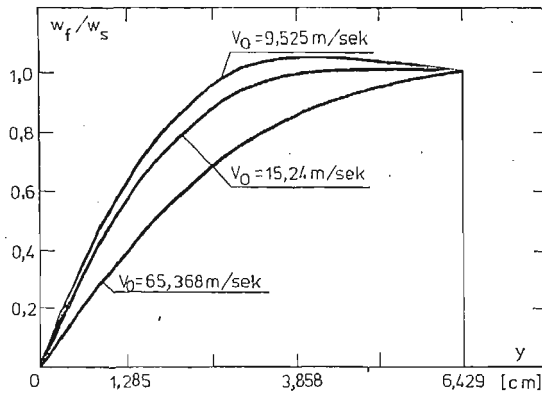
**Wpływ wielkości impulsu.** Zmiana wartości przyłożonego obciążenia lub czasu działania ma decydujący wpływ na wielkość i kształt powierzchni końcowych ugięć oraz czas zakończenia ruchu płyty. Niewielkie zwiększenie wartości obciążenia lub przedłużenie czasu działania powoduje duży wzrost ugięć i jednocześnie wydłużenie czasu ruchu płyty (rys. 13, 14). Przy większych wartościach impulsu kształt powierzchni końcowych ugięć jest mniej



Rys. 13. Ugięcie środka płyty w czasie (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Obciążenie trójkątnymi impulsami  $\bar{P} = 42,184$ ;  $19,854$ ;  $14,061 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\tau = 200 \text{ } \mu\text{s}$ .  $\gamma = 200 \text{ s}^{-1}$ .



Rys. 14. Ugięcie środka płyty w czasie (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Obciążenie idealnymi impulsami ciśnienia  $V_0 = 65,368; 15,24; 9,525$  m/s.  $\gamma = 50$  s.<sup>-1</sup>.

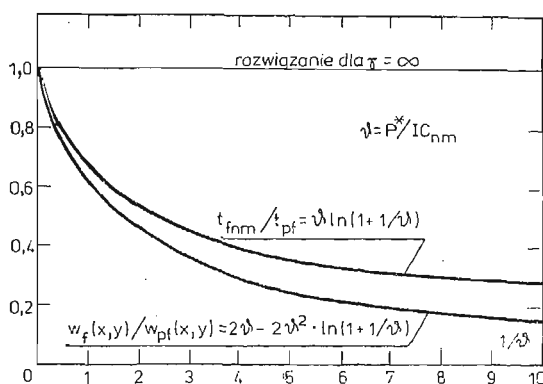


Rys. 15. Kształt powierzchni końcowych ugięć płyty (wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Przekrój środkowy  $x = 3,81$  cm. Obciążenie idealnymi impulsami ciśnienia  $V_0 = 65,368; 15,24; 9,525$  m/s.  $\gamma = 200$  s.<sup>-1</sup>.

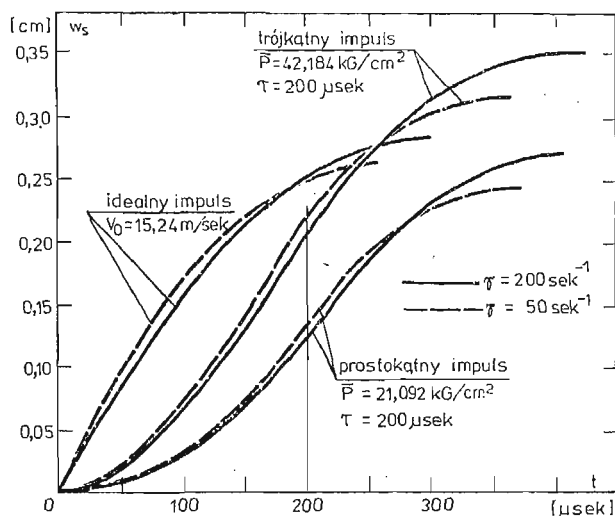
łagodny, a w punkcie środkowym krzywizna ma większą wartość, (rys. 15). Występujące, przy małych wielkościach impulsu, lokalne maksima powierzchni końcowych ugięć w okolicach brzegu płyty przy większych jego wartościach znikają wraz z powiększeniem ugięć punktu środkowego. Specjalne znaczenie ma wielkość impulsu w przypadku płyty obciążonej trójkątnym impulsem ciśnienia. Dla płyty sztywnoplastycznej przy przyłożeniu w chwili  $t = 0$  początkowego obciążenia  $2P^*$ , czas zatrzymania płyty będzie równy okresowi działania obciążenia. Przy mniejszych współczynnikach lepkości dla zrównania tych czasów potrzebna jest nieco większa wartość początkowego obciążenia (stosując drugi sposób spełnienia kryterium odciążenia). Stwierdzono, że zwiększenie wartości impulsu nieznacznie pogarsza zbieżność szeregów ugięć i prędkości ugięć.



**Wpływ lepkości materiału.** Zmniejszenie współczynnika lepkości materiału  $\gamma$  zmniejsza ugięcia płyty i skraca czas jej ruchu. Zilustrowano to na rys. 16 w ogólnym przypadku dla obciążenia idealnym impulsem ciśnienia, a w przypadkach szczególnych na (rys. 5, 17, 18.) Dla większych współczynników lepkości, a szczególnie dla płyty sztywnoplastycznej powierzchnia odkształcona może mieć nieco inny kształt (zamiast jednego maksimum w środku płyty pojawiają się dwa lub cztery maksima lokalne w pobliżu jej brzegów), rys. 18. Wpływ lepkości na wielkość amplitud i prędkość ugięcia punktu środkowego pokazano na (rys. 8, 9, 11). Szeregi ugięć stają się wolniej zbieżne dla większych współczynników lepkości.

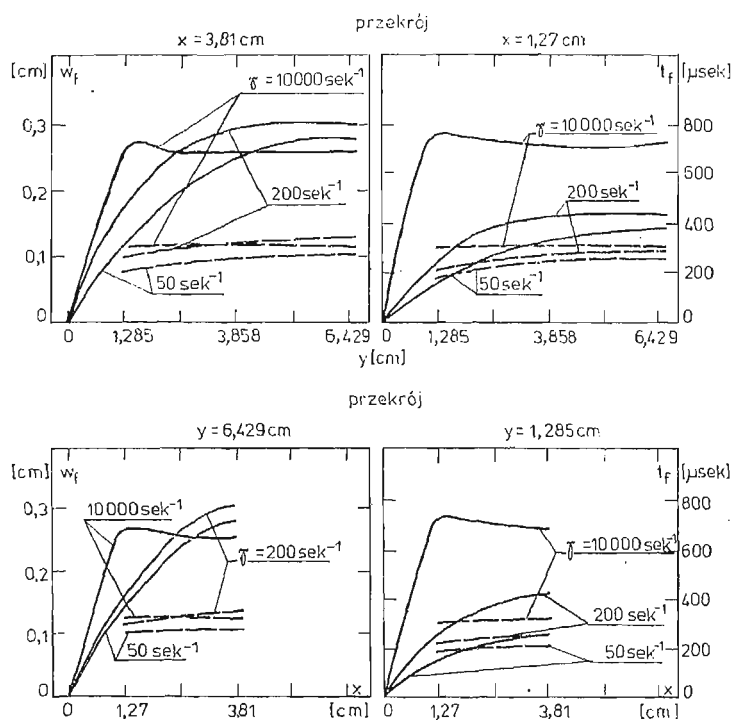


Rys. 16. Wpływ lepkości materiału na zmniejszenie czasu deformacji i końcowych ugięć płyty (wg. drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia). Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia.



Rys. 17. Ugięcie środka płyty w czasie (wg drugiego sposobu spełnienia kryterium odciążenia) dla  $\gamma = 50$  i  $200 \text{ s}^{-1}$

Wyniki zamieszczone w tabl. 2 dla płyt o jednakowym polu prostokątnej i kwadratowej wskazują na duży wpływ wzajemnych proporcji wymiarów liniowych płyty na wielkość końcowych ugięć. Również porównanie z płytą utwierdzoną [21], chociaż wykraczające poza małe ugięcia, wskazuje na duży wpływ warunków brzegowych na wielkość przemieszczeń.



Rys. 18. Końcowe ugięcia i czas zatrzymania punktów płyty (wg pierwszego sposobu spełnienia kryterium odciążenia dla  $\dot{\gamma} = 50, 200$  i  $10000 \text{ s}^{-1}$ . Obciążenie idealnym impulsem ciśnienia  $V_0 = 15,24 \text{ m/s}$ . Linia ciągła oznacza ugięcia a przerywana czas zatrzymania

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. J. WANG, H. G. HOPKINS, *On the plastic deformation on built in circular plate under impulsive loading*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 22—37 (1954).
2. H. G. HOPKINS, W. PRAGER, *On the dynamics of plastic circular plates*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 317—330 (1954).
3. A. J. WANG, *The permanent deflection of a plastic plate under blast loading*, J. Appl. Mech., 22, 375—376 (1955).
4. T. A. DUFFY, S. W. KEY, *Experimental-theoretical correlation of impulsively loaded clamped circular plate*, Exp. Mech., 9, 6, 241—249 (1969).
5. E. A. WITMER, E. N. CLARK, H. A. BALMER, *Experimental and theoretical studies of explosively induced large dynamic and permanent deformations of simple structures*, Exp. Mech., 7, 2, 56—66 (1967).

6. A. L. FLORENCE, *Circular plate under a uniformly distributed impulse*, Int. J. Solids Structures, **1**, 2, 37—47, (1966).
7. N. JONES, *Finite deflections of rigid viscoplastic strainhardening annular plate loaded impulsively*, J. Appl. Mech., **35**, 2, 349—356 (1968).
8. T. WIERZBICKI, A. FLORENCE, *A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, **6**, 553—558 (1970).
9. T. WIERZBICKI, *Impulsive loading of rigid viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, **3**, 635—647 (1967).
10. T. WIERZBICKI, *Dynamics of rigid — viscoplastic circular plates*, Arch. Mech. **17**, 851 (1965).
11. T. WIERZBICKI, *Large deflections of a strain sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech. Stos., **21**, 1, 67—69 (1969).
12. T. WIERZBICKI, J. M. KELLY, *Finite deflection of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact*, Int. J. Solids Structures, **4**, 1081—1092 (1968).
13. Ju. R. LEPIK, *Dynamika kołowych i pierścieniowych płyt z materiału sztywno-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia*, Prikladna Miechanika, **5**, 1, 60—66 (1969).
14. N. PERRONE, *Impulsively loaded strain-rate sensitive plates*, J. Appl. Mech., **34**, 2, 380—384 (1967).
15. T. WIERZBICKI, *Dynamika powłok lepkoplastycznych*, Rozpr. Inż. **19**, 4, 667—730 (1971).
16. A. D. COX, L. W. MORLAND, *Dynamic plastic deformation of simply supported square plates*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 229—241 (1959).
17. T. WIERZBICKI, *Response of rigid-viscoplastic circular and square plates to dynamic loading*, Stanford University, Div. Eng. Mech., Report No. 162 (1966).
18. N. JONES, T. O. URAN, S. A. TEKIN, *The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates*, MIT, Dep. Naval Architecture Marine Eng., Report No. 69—13.
19. N. JONES, *A theoretical study of the dynamic plastic behaviour of beams and plates with finite deflections*, MIT, Dep. Naval Architecture Marine, Eng. Report No. 70—14.
20. G. BAK, D. NIEPOSTYN — *Płyty plastyczne obciążone statycznie i dynamicznie*, Biul. WAT, **5** (1972).
21. W. WOJEWÓDZKI, T. WIERZBICKI, *Transient response of viscoplastic rectangular plates*, Arch. Mech. Stos., **24**, 4 (1972).
22. T. WIERZBICKI, *Non — associated constitutive law in viscoplasticity with application to dynamics of plates and shells*, Acta Mechanika, **12**, 1—2 (1971).
23. T. WIERZBICKI, *An approximate linear theory of thin viscoplastic shells*, Arch. Mech. Stos., **24**, 5—6 (1972).
24. P. PERZYNA, *Dynamic load — carrying capacity of circular plates*, Arch. Mech. Stos. **10**, 5 (1958).

## Р е з ю м е

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

В статье приводится решение уравнения движения вязкопластической прямоугольной пластинки с шарнирно опертыми краями и нагруженной равномерно распределенным поперечным импульсом давления. Рассмотрено общий случай нагружения давлением взрывного типа, а также особые случаи как нагружение прямоугольным, треугольным и идеальным импульсом давления. Остаточные прогибы определено применяя два способа исполнения условий разгрузки. Исследовано влияние вязкости материала, влияние формы и величины импульса давления на развитие процесса деформирования и величину остаточных прогибов. Получено также решение для жестко-пластической пластинки, являющееся результатом предельного перехода в решениях вязкопластической пластинки.

## S u m m a r y

## DETERMINATION OF DEFLECTIONS OF A VISCOPLASTIC RECTANGULAR PLATE UNDER PRESSURE IMPULSE

The solution of the motion equation for a viscoplastic plate is presented. The plate is hinge-supported on all edges and subjected to a uniformly distributed transverse impulse. The general case of the blast type pressure is considered together with such particular cases as the rectangular, triangular and perfect impulse. The final deflections are determined by using two ways of satisfying the unloading criterion. The influence of viscosity of the material as well as of the shape and the magnitude of the applied impulse on the process of deformation and on the permanent deflections is investigated. The solution for a perfectly plastic plate is also obtained as a limiting case of the viscoplastic solution.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INST. MECH. KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

*Praca została złożona w Redakcji 17 stycznia 1978 r.*

---