

NIELINIOWE DRGANIA ELASTYCZNIE ZAWIESZONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH PRZY KINEMATYCZNYCH WYMUSZENIACH STOCHASTYCZNYCH

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

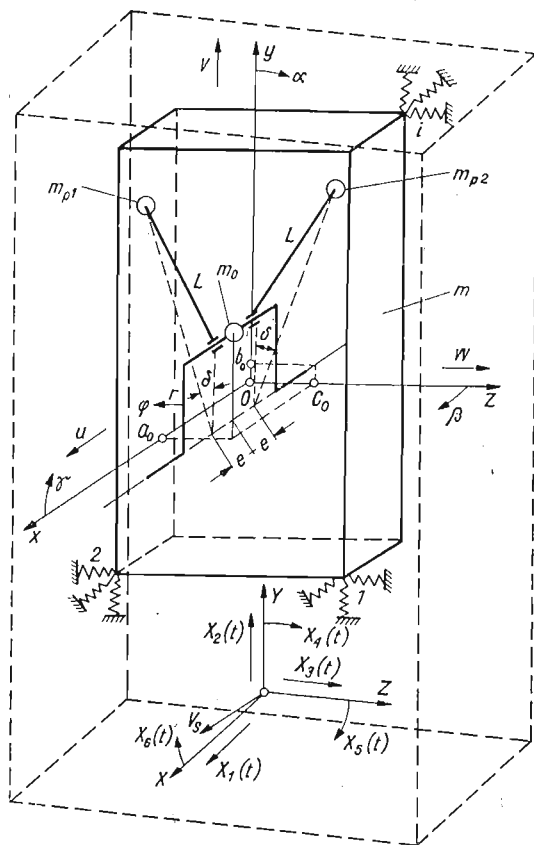
1. Wstęp

Silniki tłokowe zainstalowane na środkach transportu lądowego lub morskiego (zwanych dalej pojazdami) poddawane są kinematycznym wymuszeniom, wynikającym z losowych ruchów pojazdu na skutek nierówności nawierzchni drogi lub falowania morza. Wymuszenia te wpływają na wartości parametrów drgań silników, a tym samym na warunki ich pracy, żywotność i niezawodność. Wskazuje to na celowość uwzględniania tego typu wymuszeń przy analizie drgań silników. W przypadkach, gdy wymuszenia wywołane obrotami wału silnika i zmiennymi składowymi momentu reakcyjnego są pomijalnie małe w stosunku do kinematycznych wymuszeń, obliczenia mogą być wykonane w oparciu o prace dotyczące wpływu losowych przemieszczeń fundamentów na drgania amortyzowanych obiektów nie posiadających własnych źródeł wymuszeń (np. [1]).

Poniżej rozpatrzono w pierwszym przybliżeniu częściej występujący w praktyce przypadek, gdy wymuszenia związane z pracą silnika nie mogą być pominięte, a losowe zaburzenia wartości parametrów drgań silnika są małe. W celu uwzględnienia nierównomierności obrotów silnika oraz oddziaływania drgań na silnik, jako nieidealne źródło energii, prędkość kątową silnika potraktowano jako wielkość zmienną. Do obliczeń zastosowano metodę linearyzacji [2]. Ograniczono się przy tym do silników z cylindrami w układzie V , gdyż wyniki obliczeń mogą być łatwo wykorzystane dla silników o pionowym układzie cylindrów i silników typu bokser.

2. Równania ruchu

Obliczeniowy schemat rozpatrywanego układu przedstawia rys. 1. Masa m oznacza łączną masę silnika i sztywno połączonych z nim elementów (np. łączną masę zespołu pędnego pojazdu samochodowego lub łączną masę zespołu silnik-sztywne sprzęgło-odbiornik mocy). Elastyczne elementy zawieszenia 1, 2, ..., i , ... są zamocowane do masy m oraz do konstrukcyjnego elementu pojazdu, którym może być nadwozie samoniosące lub rama pojazdu samochodowego, fundament zespołu prądotwórczego na statku etc. Równania ruchu układu wyprowadzono dla ustalonego kierunku ruchu pojazdu i niezmiennej w czasie ilości paliwa zasilającego silnik napędowy pojazdu, przy której pojazd porusza się ze średnią prędkością $V_s = \text{const}$. Jako układ odniesienia dla pojazdu przyjęto układ współrzędnych ortokartezjańskich XYZ , którego początek przemieszcza się



Rys. 1. Obliczeniowy schemat układu: m — łączna masa silnika i sztywno połączonych z nim elementów; m_0 — wirująca masa niewyrównoważona, odpowiadająca jednemu wykorbieniu i skupiona na osi czopa korbowego; $m_{p1/2}$ — niewyrównoważona masa w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadająca jednemu cylindrowi i skupiona na osi sworznia tłokowego; L — długość korbowodu; r — długość ramienia korby; a_0, b_0, c_0 — współrzędne punktu przecięcia z osią wału prostej prostopadłej do osi wału, poprowadzonej ze środka ciężkości masy m_0 pierwszego wykorbienia, w stanie spoczynku układu i przy $\varphi = 0$, w układzie współrzędnych x, y, z ; e — odległość osi korbowodu od środka ciężkości masy m_0 ; u, v, w — przemieszczenia środka ciężkości masy m w kierunkach osi x, y, z ; x, y, z — osie pokrywające się z głównymi centralnymi osiami bezwładności masy m w stanie spoczynku układu i przy $\varphi = 0$, nieruchome względem układu współrzędnych X, Y, Z ; α, β, γ — kąty obrotu masy m względem jej głównych centralnych osi bezwładności; δ — połowa kąta pomiędzy płaszczyznami dwóch rzędów cylindrowych, φ — kąt obrotu pierwszego wykorbienia; X, Y, Z — układ współrzędnych, którego osie pokrywają się z głównymi centralnymi osiami bezwładności pojazdu w stanie spoczynku układu, a początek przemieszcza się w kierunku wyznaczonym przez ruch pojazdu z prędkością $V_s = \text{const}$; V_s — średnia prędkość pojazdu; $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ — przemieszczenia środka ciężkości pojazdu w kierunkach osi X, Y, Z ; $X_4(t), X_5(t), X_6(t)$ — kąty obrotu pojazdu względem jego głównych centralnych osi bezwładności

w kierunku wyznaczonym przez ruch pojazdu ze stałą prędkością V_s , pokrywający się z układem głównych centralnych osi bezwładności pojazdu w stanie spoczynku układu drgającego. W przypadku ruchu pojazdu po nierównej nawierzchni środek ciężkości pojazdu doznaje losowych przemieszczeń liniowych $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ względem początku układu XYZ w kierunkach osi X , Y , Z i pojazd wykonuje ruchy obrotowe względem swych głównych centralnych osi bezwładności. Losowe przemieszczenia kątowe oznaczono $X_4(t)$, $X_5(t)$, $X_6(t)$.

Przyjęto, że układ współrzędnych xyz jest nieruchomy względem układu XYZ i pokrywa się z układem głównych centralnych osi bezwładności masy m w stanie spoczynku układu drgającego przy kącie obrotu pierwszego wykorbienia $\varphi = 0$. W obliczeniach uwzględniono, że amplitudy drgań obrotowych α , β i γ masy m są w praktyce małe i w rozkładach funkcji trygonometrycznych tych kątów w szeregi potęgowe zachowano tylko pierwsze wyrazy.

Gdy punkt zamocowania i -tego elementu elastycznego do konstrukcyjnego elementu pojazdu ma w stanie spoczynku układu drgającego współrzędne x_{is} , y_{is} , z_{is} w układzie XYZ , to na skutek losowych przemieszczeń pojazdu $X_1(t) - X_6(t)$ punkt ten dozna następujących przemieszczeń w kierunkach osi X , Y , Z :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u'_{is} &= X_1 - x_{is} + (x_{is} \cos X_6 - y_{is} \sin X_6) \cos X_5 + [z_{is} \cos X_4 + (y_{is} \cos X_6 + \\ &\quad + x_{is} \sin X_6) \sin X_4] \sin X_5, \\ v'_{is} &= X_2 - y_{is} + (y_{is} \cos X_6 + x_{is} \sin X_6) \cos X_4 - z_{is} \sin X_4, \\ w'_{is} &= X_3 - z_{is} + [z_{is} \cos X_4 + (y_{is} \cos X_6 - x_{is} \sin X_6) \sin X_4] \cos X_5 - \\ &\quad - (x_{is} \cos X_6 - y_{is} \sin X_6) \sin X_5. \end{aligned}$$

Rozpatrzono przypadek, gdy przemieszczenia $X_1(t) - X_6(t)$ stanowią stacjonarne i stacjonarnie skorelowane procesy stochastyczne o małych wartościach realizacji, znanych charakterystykach statystycznych i o wartościach oczekiwanych równych zeru. Dla małych wartości realizacji procesów $X_4(t)$, $X_5(t)$ i $X_6(t)$ zależności (2.1) przyjmują postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u'_{is} &= X_1 - y_{is} X_6 + z_{is} X_5, \\ v'_{is} &= X_2 + x_{is} X_6 - z_{is} X_4, \\ w'_{is} &= X_3 + y_{is} X_4 - x_{is} X_5. \end{aligned}$$

Jeśli oś x ma względem osi X kosinusy kierunkowe l_1 , m_1 , n_1 , oś y względem osi $Y - l_2$, m_2 , n_2 i oś z względem osi $Z - l_3$, m_3 , n_3 , to przemieszczenia w/w punktu w kierunkach osi x , y i z wyniosą

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_{is} &= l_1 u'_{is} + m_1 v'_{is} + n_1 w'_{is}, \\ v_{is} &= l_2 u'_{is} + m_2 v'_{is} + n_2 w'_{is}, \\ w_{is} &= l_3 u'_{is} + m_3 v'_{is} + n_3 w'_{is}. \end{aligned}$$

Z uwzględnieniem (2.2) otrzymuje się

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_{is} &= l_1 X_1 + m_1 X_2 + n_1 X_3 + (n_1 y_{is} - m_1 z_{is}) X_4 + (l_1 z_{is} - n_1 x_{is}) X_5 + \\ &\quad + (m_1 x_{is} - l_1 y_{is}) X_6, \\ v_{is} &= l_2 X_1 + m_2 X_2 + n_2 X_3 + (n_2 y_{is} - m_2 z_{is}) X_4 + (l_2 z_{is} - n_2 x_{is}) X_5 + \\ &\quad + (m_2 x_{is} - l_2 y_{is}) X_6, \end{aligned}$$

$$w_{is} = l_3 X_1 + m_3 X_2 + n_3 X_3 + (n_3 y_{is} - m_3 z_{is}) X_4 + (l_3 z_{is} - n_3 x_{is}) X_5 + \\ (m_3 \dot{x}_{is} - l_3 y_{is}) X_6.$$

Współczynniki sztywności i tłumienia dla elastycznych elementów zawieszenia odniesiono do liniowych przemieszczeń poprzecznych przekrojów tych elementów, gdyż wpływ kątowych przemieszczeń poprzecznych przekrojów jest przy małych założeniu amplitudach drgań obrotowych masy m i wartościach realizacji procesów $X_4 - X_6$ znacznie mniejszy.

Energję potencjalną V analizowanego układu drgającego i funkcję rozproszenia energii (Rayleigha) D wyrazić można zatem w postaci

$$(2.5) \quad V = \frac{1}{2} \sum_i [c_{xi}(u_i - u_{is})^2 + c_{yi}(v_i - v_{is})^2 + c_{zi}(w_i - w_{is})^2] + \\ + g \sum_{n=0}^{c-1} [m_{p1} (\eta_n^p)_{m_{p1}} + m_{p2} (\eta_n^p)_{m_{p2}} + m_0 (\eta_n^p)_{m_0}],$$

$$(2.6) \quad D = \frac{1}{2} \sum_i [l_{xi}(\dot{u}_i - \dot{u}_{is})^2 + l_{yi}(\dot{v}_i - \dot{v}_{is})^2 + l_{zi}(\dot{w}_i - \dot{w}_{is})^2] + \frac{1}{2} h \dot{\varphi}^2,$$

gdzie c_{xi} , c_{yi} , c_{zi} — oznaczają współczynniki sztywności i -tego elastycznego elementu przy odkształceniach w kierunkach osi x , y i z , l_{xi} , l_{yi} , l_{zi} — współczynniki wiskotycznego tłumienia i -tego elastycznego elementu przy odkształceniach $jw.$, u_i , v_i , w_i — przemieszczenia punktu zamocowania i -tego elastycznego elementu do masy m w kierunkach osi x , y i z [3], $m_{p1/2}$ — niewyrównoważoną masą w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadającą jednemu cylindrowi i skupioną na osi sworznia tłokowego, m_0 — niewyrównoważoną masą wirującą, odpowiadającą jednemu wykorbieniu i skupioną na osi czopa korbowego η_n^p — pionowe przemieszczenie niewyrównoważonych mas n -tego wykorbienia, wywołane obrotem wału korbowego o kąt φ [3] (licząc od pionowego położenia pierwszego wykorbienia), c — liczbę wykorbień, g — przyspieszenie ziemskie, h — współczynnik wiskotycznego tłumienia przy obrotach wału silnika.

Współczynniki tłumienia l_{xi} , l_{yi} , l_{zi} mają na ogół małe wartości, stąd przy małych założeniu wartościach realizacji procesów $X_1(t) - X_6(t)$ można w pierwszym przybliżeniu pominąć wielkości \dot{u}_{is} , \dot{v}_{is} , \dot{w}_{is} w zależności (2.6)¹⁾. Na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju, zależności (2.4) — (2.6) i wyrażeń wyprowadzonych w rozdziale 2 pracy [3] otrzymuje się po wprowadzeniu małego parametru ε następujące równania ruchu w pierwszym przybliżeniu dla ustalonych i bliskich ustalonym stanów pracy silnika:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} m\dot{u} + c_x u - U_y \gamma + U_z \beta &= \varepsilon \left(P_1 + \sum_i c_{xi} u_{is} \right), \\ m\dot{v} + c_y v - V_z \alpha + V_x \gamma &= \varepsilon \left(P_2 + \sum_i c_{yi} v_{is} \right), \\ m\dot{w} + c_z w - W_x \beta + W_y \alpha &= \varepsilon \left(P_3 + \sum_i c_{zi} w_{is} \right), \end{aligned}$$

¹⁾ Gdy wartości iloczynów $l_{xi} \dot{u}_{is}$, $l_{yi} \dot{v}_{is}$, $l_{zi} \dot{w}_{is}$ nie są w pierwszym przybliżeniu pomijalnie małe, uwzględnić je można analogicznie, jak poniżej iloczyny $c_{xi} u_{is}$, $c_{yi} v_{is}$, $c_{zi} w_{is}$.

$$I_x \ddot{\alpha} + c_{xx} \alpha - V_z v + W_y w - c_{zx} \gamma - c_{xy} \beta - crT(\omega_0) = \varepsilon \left[P_4 + \sum_i (c_{zi} y_i w_{is} - c_{yi} z_i v_{is}) \right],$$

$$I_y \ddot{\beta} + c_{yy} \beta - W_x w + U_z u - c_{xy} \alpha - c_{yz} \gamma = \varepsilon \left[P_5 + \sum_i (c_{xi} z_i u_{is} - c_{zi} x_i w_{is}) \right],$$

$$I_z \ddot{\gamma} + c_{zz} \gamma - U_y u + V_x v - c_{yz} \beta - c_{zx} \alpha = \varepsilon \left[P_6 + \sum_i (c_{yi} x_i v_{is} - c_{xi} y_i u_{is}) \right],$$

$$I \ddot{\psi} = \varepsilon P_7.$$

Zachowano tu oznaczenia przyjęte w pracy [3], przy czym

$$P_j = R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \quad R_7 = R_6^c.$$

Równania (2.7) przekształcić można analogicznie, jak w pracy [3] do postaci odpowiadającej jednoczęstościowym drganiom

$$(2.8) \quad \ddot{q}_m + \lambda_m^2 q_m = \frac{\varepsilon}{M_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} \left(P_j + \sum_{k=1}^6 b_{jk} X_k \right),$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\varepsilon}{I} P_7,$$

gdzie

$$b_{11} = l_1 \sum_i c_{xi}, \quad b_{12} = m_1 \sum_i c_{xi}, \quad b_{13} = n_1 \sum_i c_{xi},$$

$$b_{14} = \sum_i c_{xi} (n_1 y_{is} - m_1 z_{is}), \quad b_{15} = \sum_i c_{xi} (l_1 z_{is} - n_1 x_{is}),$$

$$b_{16} = \sum_i c_{xi} (m_1 x_{is} - l_1 y_{is}),$$

$$b_{21} = l_2 \sum_i c_{yi}, \quad b_{22} = m_2 \sum_i c_{yi}, \quad b_{23} = n_2 \sum_i c_{yi},$$

$$b_{24} = \sum_i c_{yi} (n_2 y_{is} - m_2 z_{is}), \quad b_{25} = \sum_i c_{yi} (l_2 z_{is} - n_2 x_{is}),$$

$$b_{26} = \sum_i c_{yi} (m_2 x_{is} - l_2 y_{is}),$$

$$b_{31} = l_3 \sum_i c_{zi}, \quad b_{32} = m_3 \sum_i c_{zi}, \quad b_{33} = n_3 \sum_i c_{zi},$$

$$b_{34} = \sum_i c_{zi} (n_3 y_{is} - m_3 z_{is}), \quad b_{35} = \sum_i c_{zi} (l_3 z_{is} - n_3 x_{is}),$$

$$b_{36} = \sum_i c_{zi} (m_3 x_{is} - l_3 y_{is}),$$

$$b_{41} = \sum_i (l_3 c_{zi} y_i - l_2 c_{yi} z_i), \quad b_{42} = \sum_i (m_3 c_{zi} y_i - m_2 c_{yi} z_i),$$

$$\begin{aligned}
 b_{43} &= \sum_i (n_3 c_{zi} y_i - n_2 c_{yi} z_i), \\
 b_{44} &= \sum_i [c_{zi} y_i (n_3 y_{is} - m_3 z_{is}) - c_{yi} z_i (n_2 y_{is} - m_2 z_{is})], \\
 b_{45} &= \sum_i [c_{zi} y_i (l_3 z_{is} - n_3 x_{is}) - c_{yi} z_i (l_2 z_{is} - n_2 x_{is})], \\
 b_{46} &= \sum_i [c_{zi} y_i (m_3 x_{is} - l_3 y_{is}) - c_{yi} z_i (m_2 x_{is} - l_2 y_{is})], \\
 b_{51} &= \sum_i (l_1 c_{xi} z_i - l_3 c_{zi} x_i), \quad b_{52} = \sum_i (m_1 c_{xi} z_i - m_3 c_{zi} x_i), \\
 b_{53} &= \sum_i (n_1 c_{xi} z_i - n_3 c_{zi} x_i), \\
 b_{54} &= \sum_i [c_{xi} z_i (n_1 y_{is} - m_1 z_{is}) - c_{zi} x_i (n_3 y_{is} - m_3 z_{is})], \\
 b_{55} &= \sum_i [c_{xi} z_i (l_1 z_{is} - n_1 x_{is}) - c_{zi} x_i (l_3 z_{is} - n_3 x_{is})], \\
 b_{56} &= \sum_i [c_{xi} z_i (m_1 x_{is} - l_1 y_{is}) - c_{zi} x_i (m_3 x_{is} - l_3 y_{is})], \\
 b_{61} &= \sum_i (l_2 c_{yi} x_i - l_1 c_{xi} y_i), \quad b_{62} = \sum_i (m_2 c_{yi} x_i - m_1 c_{xi} y_i), \\
 b_{63} &= \sum_i (n_2 c_{yi} x_i - n_1 c_{xi} y_i), \\
 b_{64} &= \sum_i [c_{yi} x_i (n_2 y_{is} - m_2 z_{is}) - c_{xi} y_i (n_1 y_{is} - m_1 z_{is})], \\
 b_{65} &= \sum_i [c_{yi} x_i (l_2 z_{is} - n_2 x_{is}) - c_{xi} y_i (l_1 z_{is} - n_1 x_{is})], \\
 b_{66} &= \sum_i [c_{yi} x_i (m_2 x_{is} - l_2 y_{is}) - c_{xi} y_i (m_1 x_{is} - l_1 y_{is})].
 \end{aligned}$$

Wielkości M_m i $\Phi_j^{(m)}$ określono w pracy [3], a λ_m jest tą spośród częstości drgań własnych masy m , której wartość jest najbardziej zbliżona do wartości podstawowej częstości wymuszeń wynikających z wirowania wału silnika.

Przy braku stochastycznych wymuszeń drgania masy m opisują się zależnościami [3]

$$(2.9) \quad u = u_0 + \varrho_1, \quad v = v_0 + \varrho_2, \quad \dots, \quad \gamma = \gamma_0 + \varrho_6,$$

gdzie $u_0, v_0, \dots, \gamma_0$ oznaczają stałe składniki, wywołane stałą składową momentu reakcyjnego, $\varrho_j(t) = \Phi_j^{(m)} q_m(t)$, natomiast $q_m(t)$ jest rozwiązaniem równań (2.8) przy $X_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, 6$. Poniżej wyznaczono $q_m(t)$ z uwzględnieniem wpływu procesów $X_k(t)$.

3. Rozwiązanie równań ruchu

W celu rozwiązania równań (2.8) wprowadza się zamianę zmiennych według wzorów

$$(3.1) \quad q_m = A \cos(\varphi + \psi), \quad \dot{q}_m = -A \lambda_m \sin(\varphi + \psi), \quad \dot{\varphi} = \Omega$$

i przekształca równania (2.8) do postaci

$$(3.2) \quad \dot{A} = X_R + X_F, \quad \dot{\Psi} = Y_R + Y_F, \quad \dot{\Omega} = Z_R,$$

gdzie A, Ψ, Ω oznaczają nowe zmienne,

$$X_R = -\frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi + \Psi),$$

$$Y_R = \varepsilon \left[\lambda_m - \Omega - \frac{1}{AM_m \lambda_m} \sum_{j=1}^6 \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi + \Psi) \right],$$

$$Z_R = \frac{\varepsilon}{I} P_7,$$

$$X_F = -\frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \sin(\varphi + \Psi) \sum_{j,k=1}^6 \Phi_j^{(m)} b_{jk} X_k,$$

$$Y_F = -\frac{\varepsilon}{AM_m \lambda_m} \cos(\varphi + \Psi) \sum_{j,k=1}^6 \phi_j^{(m)} b_{jk} X_k.$$

Z członów oznaczonych indeksem R należy oddzielić wibracyjne składniki. Płynnie zmieniające się wielkości A, Ψ, Ω i φ oznaczono indeksem p , a wielkości A, Ψ, Ω i φ uwzględniające wpływ losowych oddziaływań — gwiazdką. Po odrzuceniu z członów X_R, Y_R i Z_R wibracyjnych składników analogicznie jak w pracy [4] otrzymuje się równania

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{A}_p &= X_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ \dot{\Psi}_p &= Y_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ \dot{\Omega}_p &= Z_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \end{aligned}$$

natomiast równania uwzględniające wpływ stochastycznych wymuszeń przyjmują postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{A}^x &= X_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m} \zeta(t) \sin(\varphi^x + \Psi^x) = F^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varphi^x, \zeta, \varepsilon), \\ \dot{\Psi}^x &= Y_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{A^x M_m \lambda_m} \zeta(t) \cos(\varphi^x + \Psi^x) = G^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varphi^x, \zeta, \varepsilon), \\ \dot{\Omega}^x &= Z_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) = H^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon), \end{aligned}$$

gdzie

$$\zeta(t) = \sum_{j,k=1}^6 \phi_j^{(m)} b_{jk} X_k(t),$$

$$\begin{aligned} X_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) &= \varepsilon X_{R1}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x) + \varepsilon^2 X_{R2}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x), \\ Y_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) &= \varepsilon Y_{R1}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x) + \varepsilon^2 Y_{R2}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x), \\ Z_R^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x, \varepsilon) &= \varepsilon Z_{R1}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x) + \varepsilon^2 Z_{R2}^x(A^x, \Psi^x, \Omega^x). \end{aligned}$$

Funkcje $X_{R1}^x, X_{R2}^x, \dots, Z_{R2}^x$ określone są zależnościami (3.6) w pracy [4], przy czym $\omega^x = = \Omega^x$.

Przy małych z założenia wartościach realizacji procesów $X_k(t)$ odchylenia

$$(3.5) \quad \delta A = A^x - A_p, \quad \delta \Psi = \Psi^x - \Psi_p, \quad \delta \Omega = \Omega^x - \Omega_p$$

są małe. Ograniczając się zatem do liniowych członów rozkładów według potęg odchyień (3.5) otrzymuje się na podstawie (3.3) — (3.5).

$$\begin{aligned} \delta \dot{A} &= F^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varphi_p, \zeta, \varepsilon) - X_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta A \frac{\partial X_R^x}{\partial A_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \\ &\quad + \delta \Psi \frac{\partial X_R^x}{\partial \Psi_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta \Omega \frac{\partial X_R^x}{\partial \Omega_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ (3.6) \quad \delta \dot{\Psi} &= G^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varphi_p, \zeta, \varepsilon) - Y_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta A \frac{\partial Y_R^x}{\partial A_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \\ &\quad + \delta \Psi \frac{\partial Y_R^x}{\partial \Psi_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta \Omega \frac{\partial Y_R^x}{\partial \Omega_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon), \\ \delta \dot{\Omega} &= H^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) - Z_R^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta A \frac{\partial Z_R^x}{\partial A_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \\ &\quad + \delta \Psi \frac{\partial Z_R^x}{\partial \Psi_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon) + \delta \Omega \frac{\partial Z_R^x}{\partial \Omega_p}(A_p, \Psi_p, \Omega_p, \varepsilon). \end{aligned}$$

Wielkości A_p, Ψ_p, Ω_p są rozwiązaniami równań (3.3), przy czym $\varphi_p = \Omega_p t$.

W analizowanym przypadku równania (3.6) przedstawić można w postaci

$$(3.7) \quad \dot{Y}_j(t) + \sum_{n=1}^3 a_{jn} Y_n(t) = Z_j(t), \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$Y_1(t) = \delta A, \quad Y_2(t) = \sigma \Psi, \quad Y_3(t) = \delta \Omega,$$

$$[a_{jn}] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial X_R^x}{\partial A_p} & -\frac{\partial X_R^x}{\partial \Psi_p} & -\frac{\partial X_R^x}{\partial \Omega_p} \\ -\frac{\partial Y_R^x}{\partial A_p} & -\frac{\partial Y_R^x}{\partial \Psi_p} & -\frac{\partial Y_R^x}{\partial \Omega_p} \\ -\frac{\partial Z_R^x}{\partial A_p} & -\frac{\partial Z_R^x}{\partial \Psi_p} & -\frac{\partial Z_R^x}{\partial \Omega_p} \end{bmatrix},$$

$$Z_1(t) = -\frac{1}{2M_n \lambda_m i} \zeta(t) [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} - e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$Z_2(t) = -\frac{1}{2A_p M_m \lambda_m} \zeta(t) [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} + e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$Z_3(t) = 0.$$

Ograniczono się do wyznaczenia rozwiązań szczególnych $Y_j(t)$ spełniających zerowe warunki początkowe, gdyż w celu otrzymania rozwiązania ogólnego układu (3.7) wystarczy dodać do $Y_j(t)$ rozwiązanie ogólne układu równań jednorodnych, które dla dostatecznie długiego czasu t dzięki istnieniu tłumienia można zaniedbać.

Wyrażając proces $\zeta(t)$ przez jego rozkład widmowy

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\phi(\omega),$$

gdzie $\phi(\omega)$ oznacza funkcję losową, której różniczki spełniają warunek

$$\langle d\phi^*(\omega) d\phi(\omega_1) \rangle = S(\zeta, \omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1,$$

można napisać

$$(3.8) \quad Z_1(t) = -\frac{1}{2M_m \lambda_m i} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} - e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}] e^{i\omega t} d\phi(\omega),$$

$$Z_2(t) = -\frac{1}{2A_p M_m \lambda_m} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\Omega t + \Psi_p)} + e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}] e^{i\omega t} d\phi(\omega),$$

przy czym $\langle \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną, $\phi^*(\omega)$ — zespoloną funkcję sprzężoną z $\phi(\omega)$, $S(\zeta, \omega)$ — gęstość widmową procesu $\zeta(t)$, δ — funkcję delta Diraca. Funkcja korelacyjna procesu $\zeta(t)$ wyraża się zależnością

$$(3.9) \quad K_\zeta(\tau) = \sum_{j,k=1}^6 [\phi_j^{(m)} b_{jk}]^2 K_{X_k}(\tau) + \sum_{j,k=1}^6 \phi_j^{(m)} b_{jk} \sum_{\substack{l,r=1 \\ l,r \neq jk}}^6 \phi_l^{(m)} b_{lr} [R_{X_k X_r}(\tau) + R_{X_k X_r}(-\tau)]$$

gdzie K_{X_k} jest funkcją korelacyjną procesu $X_k(t)$, $R_{X_k X_r}$ — funkcją korelacji wzajemnej procesów $X_k(t)$ i $X_r(t)$. Gęstość widmowa procesu $\zeta(t)$ związana jest z funkcją korelacyjną $K_\zeta(\tau)$ relacją

$$(3.10) \quad S(\zeta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\zeta(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau.$$

Rozwiązania szczególne odpowiadające funkcjom (3.8) mogą być przedstawione w postaci

$$(3.11) \quad Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_j(\omega, t) d\phi(\omega), \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie $y_j(\omega, t)$ są rozwiązaniami szczególnymi układu liniowych równań różniczkowych

$$(3.12) \quad \dot{y}_1 + \sum_{n=1}^3 a_{1n} y_n = -\frac{1}{2M_m \lambda_m i} e^{i\omega t} [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} - e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$\dot{y}_2 + \sum_{n=1}^3 a_{2n} y_n = -\frac{1}{2A_p M_m \lambda_m} e^{i\omega t} [e^{i(\Omega_p t + \Psi_p)} + e^{-i(\Omega_p t + \Psi_p)}],$$

$$\dot{y}_3 + \sum_{n=1}^3 a_{3n} y_n = 0.$$

Rozwiązania $y_j(\omega, t)$ mają zatem postać

$$(3.13) \quad y_j(\omega, t) = A_j(\omega) e^{i(\omega + \Omega_p)t} + B_j(\omega) e^{i(\omega - \Omega_p)t}, \quad j = 1, 2, 3,$$

przy czym współczynniki $A_j(\omega)$ i $B_j(\omega)$ otrzymuje się z równań (3.12) po podstawieniu do nich (3.13). Dla rozwiązań szczególnych $Y_j(t)$ otrzymuje się z uwzględnieniem (3.11) i (3.13) rozkład widmowy

$$(3.14) \quad Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(\omega) e^{i(\omega + \Omega_p)t} + B_j(\omega) e^{i(\omega - \Omega_p)t}] d\phi(\omega),$$

za pomocą którego korzystając z własności różniczek $d\phi(\omega)$ wyznacza się funkcje korelacyjne i wariancje rozwiązań

$$(3.15) \quad K_{y_j}(t_1, t_2) = e^{i\Omega_p(t_1 - t_2)} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^*(\omega) A_j(\omega) e^{i\omega(t_2 - t_1)} S(\zeta, \omega) d\omega + \\ + e^{-i\Omega_p(t_2 - t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} [B_j^*(\omega) B_j(\omega) e^{i\omega(t_2 - t_1)} S(\zeta, \omega) d\omega,$$

$$(3.16) \quad D^2[Y_j(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(\omega)]^2 S(\zeta, \omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} [B_j(\omega)]^2 S(\zeta, \omega) d\omega.$$

$A_j^*(\omega)$ i $B_j^*(\omega)$ są zespolonymi funkcjami sprzężonymi odpowiednio z $A_j(\omega)$ i $B_j(\omega)$. Należy zaznaczyć, że $Y_j(t)$ są funkcjami stacjonarnymi w szerszym sensie, gdyż ich funkcje korelacyjne zależą od różnicy $t_2 - t_1$, a wartości oczekiwane przy założeniu

$$(3.17) \quad \langle \zeta(t) \rangle = 0$$

są równe zeru. Oznacza to, że w tym przypadku

$$(3.18) \quad \langle A^x \rangle = A_p, \quad \langle \psi^x \rangle = \Psi_p, \quad \langle \Omega^x \rangle = \Omega_p.$$

Dla stanów ustalonych i bliskich ustalonym wielkości A_p , Ψ_p i Ω_p są rozwiązaniami równań

$$(3.19) \quad 0 = \varepsilon X_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 X_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p), \\ 0 = \varepsilon Y_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 Y_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p), \\ 0 = \varepsilon Z_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 Z_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p).$$

W celu wyznaczenia dysypacji energii w układzie zawieszenia silnika można zgodnie z postacią funkcji P_7 [3] napisać

$$(3.20) \quad \varepsilon Z_{R1}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) + \varepsilon^2 Z_{R2}^x(A_p, \Psi_p, \Omega_p) = \frac{1}{I} [crT(\Omega_p) - B(\Omega_p) - h\Omega_p - (\Delta M)_0],$$

gdzie r oznacza długość ramienia korby, $T(\Omega_p)$ — średnią wartość siły gazowej działającej prostopadle do jednego wykorbienia na promieniu r , $B(\Omega_p)$ — średnią wartość momentu oporowego odbiornika mocy (na sprzęgle silnika), $(\Delta M)_0$ — stały składnik dodatkowego momentu oporowego na wale silnika (wywołanego drganiem masy m). Przy założeniu (3.17) wartość oczekiwana straty mocy silnika, odpowiadającej dysypacji energii w układzie zawieszenia silnika, wynosi

$$(3.21) \quad \langle (\Delta N)_0 \rangle = (\Delta M)_0 \Omega_p.$$

4. Uwagi końcowe

Wyznaczone rozwiązania dotyczą kinematycznych wymuszeń będących stacjonarnymi procesami stochastycznymi. W przypadku, gdy wymuszenia ruchu pojazdu są niestacjonarnymi funkcjami losowymi, które mogą być przedstawione w postaci iloczynu stacjonarnej funkcji losowej i współczynnika będącego funkcją czasu, zagadnienie może być rozwiązane podobnie [5]. Metoda zastosowana w niniejszej pracy może być przydatna do analizy drgań silników również przy innych wymuszeniach stochastycznych (np. rozpatrywanych w pracy [4]), losowych zaburzeniach charakterystyk układu itp., przy czym dla uzyskania należytej dokładności obliczeń winny być spełnione warunki

$$\delta A \ll A_p, \quad \delta \Psi \ll \Psi_p, \quad \delta \Omega \ll \Omega_p.$$

Metoda ta może okazać się zatem zbyt mało dokładna przy intensywnych losowych zaburzeniach ruchu pojazdu, co często ma miejsce np. w warunkach transportu morskiego. Do analizy wpływu dużych kotłusań statku na nieliniowe drgania silników celowe może być zastosowanie maszyny analogowej w oparciu o stochastyczny analogowy model falowania morza [6] i znajomość funkcji przenoszenia kadłuba statku [7].

Literatura cytowana w tekście

1. М. З. Коловский, *Вынужденные колебания амортизированного объекта при случайных воздействиях*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1 (1963).
2. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике*, Изд. Сов. Радио, Москва 1961.
3. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastyczne posadowionych silników tłokowych z cylindrami w układzie V*, Mech. Teor. i Stos., 4, 13 (1975).
4. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastyczne posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych*, Mech. Teor. i Stos. 3, 14 (1976).
5. А. А. СВИЗНИКОВ, *Подstawowe metody funkcji losowych*, PWN, Warszawa 1965.
6. М. КОСТЕЦКИ, *Stochastyczny analogowy model falowania morza*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Okrętowe XXI, 196 (1973).
7. А. М. БАСИН, *Качка судов*, Изд. Транспорт, Москва 1969.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГО ПОДВЕШЕННЫХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

В работе рассматриваются нелинейные одночастотные колебания амортизированных поршневых двигателей с шестью степенями свободы, установленных на средствах транспорта и возмущаемых случайными неровностями дороги. Угловая скорость двигателя считается переменной величиной. При помощи метода линеаризации определяются корреляционные функции и дисперсии приращений амплитуды колебаний, фазового угла и угловой скорости двигателя, вызванных случайными движениями транспортного средства.

Summary

NONLINEAR VIBRATIONS OF ELASTICALLY SUSPENDED PISTON ENGINES AT KINEMATIC STOCHASTIC EXCITATIONS

The paper deals with nonlinear one-frequency vibrations of piston engines with six degrees of freedom, elastically mounted on transport means and randomly excited in consequence of an uneven road surface. Rotation velocity of the engine is treated as a variable. The correlation functions and dispersions of increments of vibration amplitude, phase angle and angular velocity of the engine, resulting from random movements of a vehicle, are derived by means of the linearization method.

INSTYTUT OKRĘTOWY
POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1976 r.
