

O SFORMUŁOWANIU I POPRAWNOŚCI PEWNEJ KLASY ZADAŃ Z NIELINIOWEJ DYNAMIKI LIN ROZCIĄGLIWYCH

ANDRZEJ B L I N O W S K I (WARSZAWA)

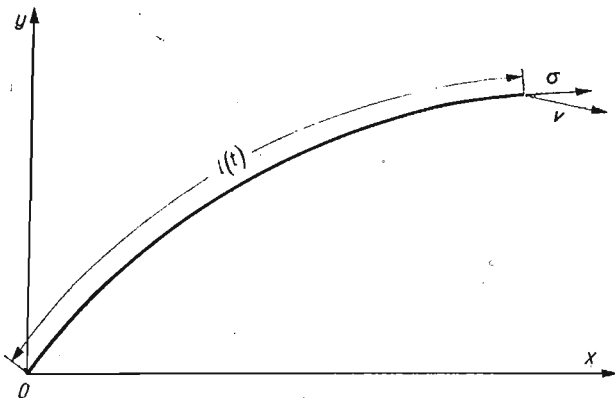
1. Wstęp

W pracy [1] autor niniejszej pracy wspólnie z S. GAJDĄ rozpatrywał sprzężone zagadnienie, którego istotną częścią było nieliniowe, dwuwymiarowe zadanie o swobodnym locie rozciągliwej liny.

Przy okazji tego zadania powstał problem poprawności sformułowania zagadnień brzegowych na brzegu ruchomym, np. przy wyciąganiu liny z zasobnika lub też odwijaniu z bębna. W niniejszej pracy sformułujemy pełne zadanie trójwymiarowe, zbadamy typ równań i rozpatrzmy jeden z warunków poprawności sformułowania pewnej klasy zagadnień brzegowych.

2. Równania ruchu

W rozdziale tym, dla wygody czytelnika, podamy wyprowadzenie równań ruchu dla rozciągliwej liny.¹⁾ Linę traktować będziemy jako sprężyste kontinuum jednowymiarowe zanurzone w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Nie będziemy tu uwzględniać skończonej grubości liny, tj. zaniedbamy jej sztywność przy zginaniu oraz moment bezwładności przekroju poprzecznego, nie uwzględniamy również skręcenia liny.



Rys. 1

¹⁾ Równania te można znaleźć np. w [3], jednakże «przetłumaczenie» ich na stosowaną w niniejszej pracy symbolikę byłoby co najmniej tak samo pracochłonne, jak wyprowadzenie ich od nowa.

Przy tych założeniach, kinematyka liny opisana jest całkowicie przez podanie wektora położenia $\mathbf{R}(S, \tau)$ jako funkcji czasu τ i współrzędnej materialnej S , o której założymy, że pokrywa się ona liczbowo z miarą długości liny w stanie nieodkształconym. Przez s oznaczać będziemy długość liny w stanie odkształconym. Wprowadzimy oznaczenia:

$$F = \frac{\partial s(S, \tau)}{\partial S} \quad \text{— gradient deformacji,}$$

$$\varepsilon = F - 1 \quad \text{— wydłużenie,}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial S}}{\left| \frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial S} \right|} \quad \text{— jednostkowy wektor styczny,}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{— prędkość,}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(S, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{— przyspieszenie.}$$

Mnożenie wektorów oznaczać będziemy w zwykły sposób, natomiast czasową pochodną materialną (przy ustalonym S) oznaczać będziemy kropką np.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}}.$$

Korzystać będziemy z następujących znanych zależności z geometrii różniczkowej

$$(2.1) \quad \frac{\partial s(S, \tau)}{\partial S} = \left| \frac{\partial \mathbf{R}(S, \tau)}{\partial S} \right|,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \mathbf{t}(s, \tau)}{\partial s} = \mathbf{n}\kappa,$$

gdzie \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym, a κ krzywizną liny. Jeżeli ρ jest gęstością masy na jednostkę długości, to oczywiście dla k a ż d y c h dwu punktów materialnych $S_1, S_2, S_2 > S_1$, zachodzi

$$(2.3) \quad \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \rho ds = \int_{S_1}^{S_2} \rho_0 dS,$$

gdzie ρ_0 oznacza gęstość w stanie nieodkształconym. Otrzymamy stąd natychmiast lokalne prawo zachowania masy

$$(2.4) \quad \rho F = \rho_0.$$

Natychmiastowym wnioskiem z (2.4) jest następujący odpowiednik znanego wzoru trójwymiarowego (dla dowolnego odcinka materialnego):

$$(2.5) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} f(s, \tau) \rho ds = \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \dot{f}(s, \tau) \rho ds,$$

gdzie $f(s, \tau)$ jest dowolną funkcją (gęstością).

Przy omówionych na początku tego rozdziału założeniach, naturalne jest postulowanie, dla dowolnego odcinka materialnego i dla dowolnego pola prędkości, następującego bilansu energetycznego:

$$(2.6) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \rho w ds = \sigma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \Big|_{S_2} - \sigma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \Big|_{S_1} + \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} ds - \frac{d}{d\tau} \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \rho \frac{v^2}{2} ds,$$

lub, korzystając z (2.5), w postaci

$$(2.7) \quad \int_{s(S_1)}^{s(S_2)} \left[\rho \dot{w} - \frac{d}{ds} (\sigma \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \right] ds = 0,$$

gdzie σ jest siłą naciągu liny, $w = w(F)$ — gęstością masową energii sprężystej, a \mathbf{r} — gęstością sił zewnętrznych na jednostkę długości (opór ośrodka, siły masowe). Wykonując różniczkowanie i korzystając z tego, że (2.7) obowiązywać ma dla każdego odcinka materialnego, możemy (2.7) przepisać w postaci

$$(2.8) \quad \left(\rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial F} F - \sigma \right) \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \mathbf{t} + \sigma \kappa \mathbf{n} + \mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Skorzystaliśmy tu z zależności

$$(2.9) \quad \dot{F} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial S} \cdot \mathbf{t} = F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \cdot \mathbf{t},$$

którą łatwo sprawdzić przez bezpośrednie różniczkowanie.

Z niezmienniczości względem transformacji Galileusza wynika natychmiast, że oba te człony muszą oddzielnie być równe zero i że wyrażenie w nawiasie w drugim członie musi być tożsamościowo równe zero, natomiast z zasady obiektywności materialnej wynika, że z kolei współczynnik przy $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}$ (pierwszy nawias) jest tożsamościowo równy zero. Mamy zatem równanie ruchu

$$(2.10) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s} \mathbf{t} + \sigma \kappa \mathbf{n} + \mathbf{r} = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

oraz równanie konstytutywne

$$(2.11) \quad \sigma = \rho \frac{dw(F)}{dF} F = \rho_0 \frac{dw(F)}{dF} \quad ^2)$$

Przechodząc od różniczkowania po s do różniczkowania po S i oznaczając

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial R^1}{\partial S} &\equiv u^1; & \frac{\partial R^2}{\partial S} &\equiv u^2; & \frac{\partial R^3}{\partial S} &\equiv u^3; \\ \dot{R}^1 &\equiv u^4; & \dot{R}^2 &\equiv u^5; & \dot{R}^3 &\equiv u^6, \end{aligned}$$

²⁾ Wzory (2.10) i (2.11) można traktować jako szczególny przypadek ogólnej teorii Greena i Lawsa (por. [3], wzory (4.1) s. 150 i (6.3) s. 153).

gdzie R^i — składowe wektora \mathbf{R} w pewnej bazie kartezjańskiej, a także oznaczając

$$(2.13) \quad \sqrt{\frac{d\sigma}{dF} \frac{1}{\rho F}} \equiv \lambda_1; \quad \sqrt{\frac{\delta}{\rho F^2}} \equiv \lambda_2,$$

$$(2.14) \quad \frac{u^1}{F} \equiv \sin\theta \cos\varphi; \quad \frac{u^2}{F} \equiv \sin\theta \sin\varphi; \quad \frac{u^3}{F} \equiv \cos\theta,$$

(takie podstawienie wolno nam zastosować, ponieważ $\frac{\partial R}{\partial S} \frac{1}{F} = \mathbf{t}$ jest wektorem jednostkowym, θ i φ są kątami Eulera), możemy zapisać (2.10) w postaci układu 6 równań pierwszego rzędu (dochodzą 3 równania $\dot{u}^1 = \frac{\partial u^4}{\partial S}$; $\dot{u}^2 = \frac{\partial u^5}{\partial S}$; $\dot{u}^3 = \frac{\partial u^6}{\partial S}$).

$$(2.15) \quad \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} A_{ij} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial S} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial u^6}{\partial S} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{u}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}^6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.16) \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{ij} & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2.17) \quad [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \lambda_2^2 (\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta) & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi & \lambda_1^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \lambda_2^2 (\sin^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta) & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \cos\varphi & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \times \sin\theta \cos\theta \sin\varphi & \lambda_1^2 \cos^2\theta + \lambda_2^2 \sin^2\theta \end{bmatrix},$$

a $[\delta_{ij}]$ jest macierzą jednostkową 3×3 . Wzór (2.15) należy rozumieć w sensie wektorowym w pewnej 6-cio wymiarowej przestrzeni u .

3. Badanie równań ruchu

Zbadamy wartości własne macierzy $[A_{ij}]$. Równanie charakterystyczne przybiera postać

$$(3.1) \quad \det \begin{bmatrix} -\xi \delta_{ij} & \delta_{ij} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{ij} & -\xi \delta_{ij} \end{bmatrix} = 0.$$

Dla większości zagadnień fizycznych możemy przyjąć, że $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ (np. dla liniowego pręta i małych odkształceń $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \varepsilon$). Mnożąc odpowiednio przez ξ i dodając do siebie wiersze macierzy $[A_{ij}]$ oraz wprowadzając oznaczenia

$$\eta \equiv \frac{\xi^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

i korzystając z (2.14), możemy (3.1) sprowadzić do postaci

$$(3.2) \quad \det \begin{bmatrix} t_1^2 - \eta, & t_1 t_2, & t_1 t_3 \\ t_1 t_2, & t_2^2 - \eta, & t_2 t_3 \\ t_1 t_3, & t_2 t_3, & t_3^2 - \eta \end{bmatrix} = 0.$$

Macierz w równaniu (3.2) ma postać reprezentacji tensora $\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} - \eta \mathbf{1}$, czyli η są wartościami własnymi pewnej diady $\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$, przy czym, jak pamiętamy, \mathbf{t} jest wektorem jednostkowym, zatem $\eta = 0$ jest dwukrotnym pierwiastkiem równania (3.2), a $\eta = 1$ jednokrotnym i, co za tym idzie, wartości $\pm \lambda_2$ są dwukrotnymi pierwiastkami równania (3.1), natomiast wartości $\pm \lambda_1$, są jego pierwiastkami pojedynczymi. Rozwiązaliśmy zatem równanie 6 stopnia (3.1) i stwierdziliśmy, że wszystkie jego pierwiastki są rzeczywiste, jeżeli tylko naciąg liny jest nieujemny. Jeżeli dodatkowo istnieją lewe jednostkowe wektory własne macierzy $[A_{ij}]$ tworzące bazę przestrzeni u , to układ (2.15), a zatem i (2.10), jest hiperboliczny [2].

Sprawdzimy więc istnienie wektorów własnych $l_i^{(k)}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), tj. wektorów spełniających równości:

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^6 l_i^{(p)} A_{ik} = \xi^{(p)} l_k^{(p)}; \quad \sum_{i=1}^6 l_i^{(p)2} = 1^3$$

tworzących bazę w u . Jeżeli $l_i^{(p)}$ są składowymi wektora własnego przynależnego p -tej wartości własnej $\xi^{(p)}$, to

$$(3.4) \quad [l_1^{(p)} \dots l_6^{(p)}] \begin{bmatrix} -\xi^{(p)} \delta_{ij} & \delta_{ij} \\ \alpha_{ij} & -\xi^{(p)} \delta_{ij} \end{bmatrix} = [0, 0, 0, 0, 0, 0].$$

Równanie (3.4) sprowadza się do następujących warunków:

$$(3.5) \quad l_1^{(p)} = \xi^{(p)} l_4^{(p)}; \quad l_2^{(p)} = \xi^{(p)} l_5^{(p)}, \quad l_3^{(p)} = \xi^{(p)} l_6^{(p)}$$

$$(3.6) \quad [l_4^{(p)}, l_5^{(p)}, l_6^{(p)}] \left(\begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{ij} (\xi^{(p)})^2 \end{bmatrix} \right) = [0, 0, 0]$$

macierz $[\alpha_{ij}]$ jest macierzą symetryczną i $(\xi^{(p)})^2$ są jej wartościami własnymi, zatem istnieje macierz ortogonalna $[\beta_{pk}]$ określone wzorem:

$$[\beta_{pk}] = [l_k^{(p)}] \quad p = 1, 2, 3, \quad k = 4, 5, 6.$$

Korzystając z (3.5) utworzymy pełną macierz $[l_k^{(p)}]$ ($p, k = 1, \dots, 6$)

³⁾ druga z tych równości zależy od wyboru jednostek, jednakże, jeżeli da się ją spełnić przy pewnym wyborze jednostek, to również spełnić się da przy każdym innym.

$$(3.7) \quad [I_k^{(p)}] = \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_4^{(1)}, & -\lambda_1 I_5^{(1)}, & -\lambda_1 I_6^{(1)}, & I_4^{(1)}, & I_5^{(1)}, & I_6^{(1)} \\ \lambda_1 I_4^{(1)}, & \lambda_1 I_5^{(1)}, & \lambda_1 I_6^{(1)}, & I_4^{(1)}, & I_5^{(1)}, & I_6^{(1)} \\ -\lambda_2 I_4^{(2)}, & -\lambda_2 I_5^{(2)}, & -\lambda_2 I_6^{(2)}, & I_4^{(2)}, & I_5^{(2)}, & I_6^{(2)} \\ \lambda_2 I_4^{(2)}, & \lambda_2 I_5^{(2)}, & \lambda_2 I_6^{(2)}, & I_4^{(2)}, & I_5^{(2)}, & I_6^{(2)} \\ -\lambda_2 I_4^{(3)}, & -\lambda_2 I_5^{(3)}, & -\lambda_2 I_6^{(3)}, & I_4^{(3)}, & I_5^{(3)}, & I_6^{(3)} \\ \lambda_2 I_4^{(3)}, & \lambda_2 I_5^{(3)}, & \lambda_2 I_6^{(3)}, & I_4^{(3)}, & I_5^{(3)}, & I_6^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wyznacznik tej macierzy jest różny od zera to, przy ustalonym wyborze jednostek, jesteśmy w stanie znaleźć liniowo niezależny układ jednostkowych wektorów własnych (choć na ogół nie jest to układ ortonormalny).

Odejmuując od siebie odpowiednie wiersze i kolumny macierzy łatwo dochodzimy do zależności

$$(3.8) \quad \det[I_k^{(p)}] = -\varrho \lambda_1 \lambda_2^2 \det \left[\begin{array}{c|c} \beta_{ij} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{ij} \end{array} \right].$$

Ponieważ $\det[\beta_{ij}] \neq 0$ i $\lambda_1 \neq 0$, to wyznacznik różny jest od zera, gdy $\lambda_2 \neq 0$. Zatem warunkiem hiperboliczności układu jest $\lambda_2 > 0$. Widzimy zatem, że dla liny rozciągliwej równania pozostają hiperboliczne tak długo, jak długo naciąg jej jest różny od zera. Powstaje pytanie: czy układ zachowuje hiperboliczność dla liny nierozciągliwej? Można by się spodziewać, że układ pozostanie hiperboliczny, ponieważ skrajnym przypadkiem liny nierozciągliwej jest struna, a równanie struny jest równaniem hiperbolicznym.

Wykażemy tu na przykładzie zadania płaskiego (bierzemy zadanie płaskie w celu zmniejszenia pracochłonności obliczeń), że przypuszczenie to nie jest słuszne, a hiperboliczność równania struny jest wynikiem linearyzacji.

W przypadku liny nierozciągliwej lewa strona równania (2.6) będzie równa zero i w wyniku analogicznego rozumowania otrzymujemy równanie ruchu (2.10) w niezmięnionej postaci, natomiast zamiast prawa konstytutywnego (2.11) otrzymujemy warunek

$$(3.9) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

(oczywiście $s = S$ i $F = 1$). Warunek ten jest spełniony tożsamościowo, wynika on bowiem

$$\text{natychmiast z warunku nierozciągliwości } F = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S} \right| = 1.$$

Warunek ten dla przypadku płaskiego możemy zapisać również w postaci

$$(3.10) \quad \frac{\partial R_1}{\partial S} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial R_2}{\partial S} = \sin \varphi,$$

gdzie φ jest kątem nachylenia stycznej do liny względem osi x_1 . Przy tych oznaczeniach

uwzględniając, że w tym przypadku $\kappa = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, mamy:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \cos \varphi - \sigma \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_1 &= \varrho \dot{v}_1, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s} \sin \varphi + \sigma \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_2 &= \varrho \dot{v}_2. \end{aligned}$$

Widzimy, że w układzie nie występuje pochodna czasowa niewiadomej σ , zatem nie możemy przedstawić układu w postaci analogicznej do (2.15), jednakże z matematycznego punktu widzenia jest obojętne, którą zmienną wyróżnimy (typ równania od tego nie będzie zależał). Oznaczając

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \alpha &\equiv \cos \varphi; & \beta &\equiv \sigma \sin \varphi, \\ \gamma &\equiv \sin \varphi; & \delta &\equiv \sigma \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$(3.13) \quad \sigma \equiv q_1, \quad \varphi \equiv q_2, \quad v_1 \equiv q_3, \quad v_2 \equiv q_4$$

oraz uwzględniając związki

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \frac{\dot{\partial R}_1}{\partial s} &= \dot{\cos \varphi} = \frac{\partial v_1}{\partial s}, \\ \frac{\dot{\partial R}_2}{\partial S} &= \dot{\sin \varphi} = \frac{\partial v_2}{\partial S}, \end{aligned}$$

otrzymujemy następujący układ równań:

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} 0, & -0, & \frac{\delta \varrho}{\sigma}, & \frac{\beta \varrho}{\sigma} \\ 0, & 0, & -\frac{\gamma \varrho}{\sigma}, & \frac{\alpha \varrho}{\sigma} \\ 0 & -\gamma, & 0 & 0 \\ 0 & \alpha, & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial s} \\ \frac{\partial q_2}{\partial s} \\ \frac{\partial q_3}{\partial s} \\ \frac{\partial q_4}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix},$$

gdzie wielkości f_i są funkcjami φ, σ lecz nie ich pochodnych.

Wartości własne macierzy współczynników są rozwiązaniami równania

$$(3.16) \quad \xi^2 \left(\xi^2 - \frac{\varrho}{\sigma} \right) = 0.$$

Równanie to posiada cztery pierwiastki rzeczywiste: $\sqrt{\frac{\varrho}{\sigma}}$, $-\sqrt{\frac{\varrho}{\sigma}}$ oraz podwójny pierwiastek $\xi = 0$.

Nietrudno zauważyć, że lewe wektory własne przynależne do niezerowych wartości własnych muszą spełniać zależność $I_1^{(p)} = 0$.

Dla zerowych wartości własnych pierwsze równanie:

$$I_1^{(p)} \cdot 0 + I_2^{(p)} \cdot 0 + I_3^{(p)} \cdot 0 + I_4^{(p)} \cdot 0 = 0 \cdot I_1^{(p)}$$

jest spełnione automatycznie i pozostają trzy równania:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} -\gamma I_3^{(p)} + \alpha I_4^{(p)} &= 0, \\ \frac{\delta \varrho}{\sigma} I_1^{(p)} - \frac{\gamma \varrho}{\sigma} I_2^{(p)} &= 0, \\ \frac{\beta \varrho}{\sigma} I_1^{(p)} + \frac{\alpha \varrho}{\sigma} I_2^{(p)} &= 0. \end{aligned}$$

Drugie i trzecie z tych równań zawiera jedynie $I_1^{(p)}$ i $I_2^{(p)}$, przy czym wyznacznik układu tych dwu równań jest różny od zera:

$$(3.18) \quad \det \begin{bmatrix} \delta, & -\delta \\ \beta, & \alpha \end{bmatrix} = \sigma \neq 0,$$

wynika stąd, że $I_1^p = I_2^p = 0$.

Zatem wszystkie cztery wektory własne mają pierwszą składową równą zero, czyli nie mogą być one liniowo niezależne i układ (3.15) nie jest hiperboliczny. Zauważymy natomiast że równania (3.11) możemy zapisać w postaci

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r_1 \cos \varphi - r_1 \sin \varphi &= \varrho(\dot{v}_1 \cos \varphi - \dot{v}_2 \sin \varphi), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s} + r_2 \cos \varphi + r_2 \sin \varphi &= \varrho(\dot{v}_1 \cos \varphi + \dot{v}_2 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Dla zamocowanej na końcach struny, pozostającej w spoczynku przy pewnym stałym naciągu początkowym wzdłuż pewnej prostej (np. osi x_1 kartezjańskiego układu współrzędnych) i przy braku sił masowych, jak łatwo wykazać, wektor małego przemieszczenia od położenia równowagi oraz jego pochodne czasowe są prostopadłe do \mathbf{t} z dokładnością do małych wyższego rzędu.

W związku z tym z (3.19) mamy

$$\frac{d\sigma}{dx_1} = 0, \quad \text{tj.} \quad \sigma = \text{const},$$

natomiast pierwsze równanie przybiera postać liniowego równania hiperbolicznego o stałych współczynnikach względem przemieszczenia u_2 , ($u_1 = 0$), mamy bowiem

$$\varphi \approx \text{tg } \varphi = \frac{\partial u_2}{\partial s}$$

i stąd

$$(3.20) \quad \sigma \frac{d^2 u_2}{ds^2} - \varrho \ddot{u}_2 = 0,$$

zatem w wyniku linearyzacji odzyskujemy własność hiperboliczności.

4. Poprawność warunków brzegowych na brzegu ruchomym

W wielu zagadnieniach, w których rozpatrywany jest lot liny, mamy do czynienia z wyciąganiem liny z zasobnika, rozwijaniem z bębna itp., przy czym w skali całego zadania, wymiary zasobnika (lub bębna) są niewielkie i możemy je zaniedbać przyjmując np. dla zasobnika $x = 0$, tak jakby lina przechodziła w tym miejscu przez blok lub oczko (kip). Przy formułowaniu warunków brzegowych należy w tym przypadku zachować określoną ostrożność i zdanie się wyłącznie na inżynierską intuicję może się okazać zawodne, tym bardziej że mamy do czynienia nie tylko z ruchomym lecz wręcz nieznanym brzegiem (na ogół nie znamy wartości współrzędnej S w punkcie przestrzennym $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Ponieważ mamy do czynienia z układem hiperbolicznym, możemy się spodziewać, że rozwiązanie zagadnienia metodą «krok po kroku» doprowadzić nas może, przy odpo-

wiednim algorytmie, do celu. W tym przypadkū nieznany brzeg możemy budować w trakcie rozwiązania i na każdym następnym kroku odcinek brzegu traktować możemy jako dany z kroku poprzedniego.

Powstaje pytanie — ile musimy założyć warunków brzegowych, aby dla każdego kolejnego kroku zagadnienie początkowo-brzegowe było poprawnie sformułowane.

Za ROZDIESTWIENSKIM i JANIENKĄ [2] wprowadzimy pojęcie charakterystyk wychodzących i przychodzących. Niech będzie dane równanie różniczkowe charakterystyki przechodzącej przez pewien punkt brzegu

$$(4.1) \quad \frac{dS}{d\tau} = \xi^{(k)}(S, \tau).$$

Rozwiązanie tego równania możemy przedstawić w postaci parametrycznej

$$(4.2) \quad S = S(\theta), \quad \tau = \tau(\theta)$$

przy czym, niech parametr θ ustalony będzie tak aby na brzegu $\theta = 0$ oraz aby $\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta} > 0$.

Charakterystyką przychodzącą nazywamy taką charakterystykę, która leży wewnątrz obszaru dla $\theta < 0$, w przypadku przeciwnym charakterystykę nazywamy charakterystyką wychodzącą (por. rys. 2).

Jeżeli na rozpatrywanym brzegu dane jest k zależności

$$(4.3) \quad C_i(S, \tau, u) = 0,$$

to warunkiem koniecznym poprawności sformułowania problemu (por. [2]) jest, aby

$$(4.4) \quad k = n - p,$$

gdzie n jest liczbą równań, a p — liczbą p r z y c h o d z ą c y c h charakterystyk. Dla zagadnienia płaskiego macierz naszego układu ma postać:

$$(4.5) \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \\ -\alpha_1, & -\alpha_2, & 0, & 0 \\ -\alpha_2, & \alpha_3, & 0, & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $u_1 \equiv \frac{\partial x_1}{\partial S}, \quad u_2 \equiv \frac{\partial x_2}{\partial S}, \quad u_3 \equiv \dot{x}_1, \quad u_4 \equiv \dot{x}_2$

$$\alpha_1 \equiv \frac{1}{F^2}(\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2),$$

$$\alpha_2 \equiv \frac{1}{F^2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)u_1 u_2,$$

$$\alpha_3 \equiv \frac{1}{F^2}(\lambda_1^2 u_2^2 + \lambda_2^2 u_1^2).$$

Wartościami własnymi macierzy $[A_{ij}]$ są $\pm \lambda_1$ i $\pm \lambda_2$. Wyrażmy warunki brzegowe na ruchomym brzegu przez S, τ, u . Warunek «zaczepienia w oczku» ma postać

$$(4.6) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

czyli

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2}.$$

Jako drugi związek może służyć np. przyjęcie danej wartości σ lub też założenie, że energia nie może się magazynować w zasobniku (nieślusne np. dla bębna o skończonym momencie bezwładności samego bębna i zwoju liny), czyli, że praca wykonana przez linę równa jest dopływowi energii wraz z liną (kinetycznej i sprężystej) plus straty na tarcie:

$$(4.7) \quad \rho w v + \rho \frac{v^2}{2} - v - f v = \sigma v,$$

gdzie $v \equiv |v|$, f — moduł siły tarcia w punkcie wyjścia liny z zasobnika, czyli

$$(4.8) \quad \rho w(F) + \rho \frac{v^2}{2} - f = \sigma(F),$$

zatem, uwzględniając (4.6),

$$(4.9) \quad \begin{aligned} v_1 &= -\varphi(F, f) t_1, \\ v_2 &= -\varphi(F, f) t_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi(F, f) \equiv \frac{1}{F} \sqrt{2 \left(\frac{\sigma(F)}{\rho} + \frac{f}{\rho} - w(F) \right)}.$$

Ponieważ F wyraża się przez u_1 i u_2 , zatem mamy dwa warunki brzegowe typu

$$C_i(\mathbf{u}) = 0.$$

Zauważymy teraz, że równanie różniczkowe brzegu ma postać

$$(4.10) \quad \frac{dS}{d\tau} = \frac{v}{F} = \varphi(F, f)$$

$$\left(\text{pamiętamy, że wzdłuż charakterystyk } \frac{dS}{d\tau} = \xi^{(w)} \right).$$

Na rys. 2 naszkicowane są odcinki charakterystyk. Przypadek (a) odpowiada sytuacji, gdy

$$(4.11) \quad \lambda_2 > \varphi(F, f),$$

natomiast przypadek (b) — odwrotnej nierówności.

W przypadku (a) wystarczą nam dwa warunki brzegowe, natomiast w przypadku (b) wymagane są trzy warunki, czyli, oprócz (4.9), należałoby dać jeszcze np. kierunek stycznej na wyjściu z oczka. Przy warunku $\sigma = \text{const}$ mamy analogiczną sytuację, tj. możemy mieć przypadek (a) lub (b) i, co więcej, sytuacja może się zmieniać w trakcie jednego procesu.

Wracając do «energetycznego» warunku, widać jasno, że przy dostatecznie dużej sile tarcia będziemy mieli przypadek (a). Jeżeli zaniedbamy siłę tarcia, to (4.11) przyjmie postać

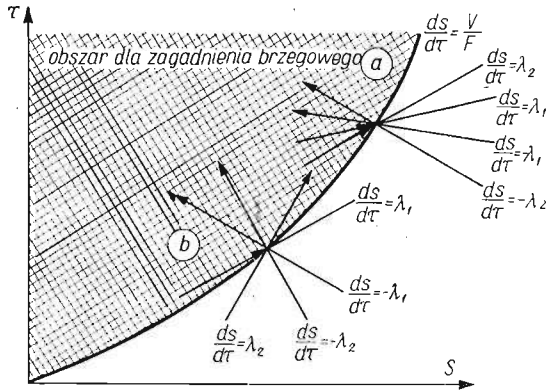
$$(4.12) \quad 2w - \frac{dw}{dF} F = \alpha(F),$$

gdzie $\alpha(F) > 0$.

Jeżeli rozwiążemy (4.12) z warunkiem $w(1) = 0$, to otrzymamy

$$(4.13) \quad w = F^2 \int_F^1 \frac{\alpha(F)}{F^3} dF.$$

Jednakże wyrażenie to dla dowolnego $F > 1$ ma wartość ujemną, zatem nie może opisywać gęstości energii.



Rys. 2

Nie istnieje zatem takie sprężyste prawo konstytutywne, przy którym mógłby być spełniony warunek (4.11) bez siły tarcia.

Fizyczna interpretacja faktu, że w sytuacji (b) potrzebny jest dodatkowy warunek, jest następująca: λ_2 jest prędkością propagacji wzdłuż linii małego sygnału «giętego» (względem długości w stanie nieodkształconym), zatem $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ jest realną prędkością propagacji tego sygnału. Jeżeli prędkość wypływu z «oczka» przekracza tę wartość, to «informacja» o kącie nachylenia stycznej nie dociera do oczka i kąt ten musi być w $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dodatkowo dany, co jest dość oczywiste, np. w skrajnym przypadku kiedy wypychamy linię z oczka zamiast ją wyciągać.

Pokazaliśmy tu, że liczba koniecznych warunków «na oczku» może być różna, a nawet może się zmieniać w trakcie jednego procesu. Oczywiście zagadnienie liczby warunków brzegowych nie wyczerpuje kwestii poprawności zagadnienia brzegowego. Nie będziemy tu jednak badać pozostałych warunków poprawności (por. [2] s. 95), ponieważ na ogół bywają one spełnione nieomal przy każdym rozsądnym sposobie postawienia warunków brzegowych.

Otwarta również pozostaje sprawa poprawności warunków brzegowych w przypadku linii nie rozciągłej.

Literatura cytowana w tekście

1. A. BLINOWSKI, S. GAJDA, *Zagadnienia lotu cienia rozciągłego*, Biul. PTU-WITU, 15/76.
2. В. Л. РОЖДЕНСТВЕНСКИЙ, Н. Н. ЯНЕНКО, *Системы квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике*, Наука, Москва 1968.
3. A. E. GREEN, N. LAWS, *A general theory of rods*, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A293 (1966), 145 - 155.

Резюме

О ФОРМУЛИРОВКЕ И КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЗАДАЧ
ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ТРОСОВ

Рассматривается нелинейная задача динамики растяжимого гибкого троса (напр. разматывающегося из контейнера). Приводится вывод дифференциальных уравнений динамики, анализируется тип уравнений, находятся характеристики и указывается их физический смысл. На основе общей теории гиперболических систем рассматривается корректность постановки краевых условий на переменном контуре (в точке выхода троса из контейнера).

Summary

ON THE FORMULATION AND THE CORRECTNESS OF SOME CLASS
OF PROBLEMS CONCERNING NONLINEAR DYNAMICS OF STRINGS

Nonlinear dynamic problem of a string with variable mass is considered. The derivation of the differential equations of string dynamics is given, and also the type and the characteristics of the system are determined. The physical meaning of the characteristics is pointed out. On the basis of the general theory of hyperbolic systems, the correctness of the boundary value problem with the variable boundary is discussed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 sierpnia 1976 r.
