

NIEUSTALONE POLE TEMPERATURY W WIRUJĄCYM WALCU KOŁOWYM,
WYWOŁANE UTRZYMYWANĄ NA JEGO POBOCZNICY ODCINKAMI STAŁĄ
TEMPERATURĄ

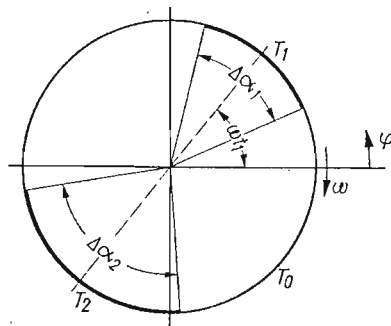
KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

1. Postawienie zagadnienia

W pracy rozważa się rozkład temperatury w długim walcu kołowym w przypadku, gdy jego powierzchnia boczna poddana jest działaniu temperatury będącej funkcją kąta opasania, a sam walec obraca się wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω . Zakłada się, że w chwili początkowej temperatura walca, jak i jego otoczenia była stała i wynosiła T_0 .

Zagadnienie to rozpatrywane jest w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z , sztywno związanym z walcem. Rozważania prowadzone są dla punktów walca dostatecznie odległych od obu jego końców, w związku z czym przyjmuje się, że rozkład temperatury wewnątrz walca jest funkcją czasu t i zmiennych przestrzennych r i φ .

Rozkład temperatury na brzegu walca w chwili $t_1 > 0$ pokazany jest na rys. 1.



Rys. 1. Rozkład temperatury na brzegu walca
w chwili $t_1 > 0$

Aby określić rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca w dowolnej chwili czasu, należy rozwiązać równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1) \quad \nabla^2 \theta - \frac{1}{z} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

gdzie $\theta = T - T_0$, $\theta = \theta(r, \varphi, t)$,
z warunkiem początkowym

$$(2) \quad \theta(r, \varphi, 0) = 0$$

i warunkiem brzegowym

$$(3) \quad \theta(a, \varphi, t) = \theta_1 \left[\eta \left(x + \frac{\Delta\alpha_1}{2} \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta\alpha_1}{2} \right) \right] + \\ + \theta_2 \left[\eta \left(x - \pi + \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right) - \eta \left(x - \pi - \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right) \right].$$

Tutaj:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

κ — współczynnik przewodzenia temperatury,

$\eta(x)$ — funkcja Heaviside'a,

$\theta_1 = T_1 - T_0$, $T_1 = \text{const}$,

$\theta_2 = T_2 - T_0$, $T_2 = \text{const}$,

$x = (\varphi - \omega t) \bmod 2\pi$.

Warunek (3) opisuje rozkład temperatury na poboczniczy walca, przy czym zamiast podanych na rys. 1 wielkości T_1 i T_2 w związku (3) wpisano temperatury względne θ_1 i θ_2 . Warunek ten można przedstawić w wygodniejszej do obliczeń postaci, rozkładając funkcję Heaviside'a w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ w szereg trygonometryczny

$$(4) \quad \theta(a, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 \Delta\alpha_1 + \theta_2 \Delta\alpha_2) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi n} \left[\theta_1 \sin \frac{n\Delta\alpha_1}{2} + (-1)^n \theta_2 \sin \frac{n\Delta\alpha_2}{2} \right] \cos n(\varphi - \omega t) \right\}.$$

2. Rozwiązanie równania przewodnictwa ciepłego

Rozwiązania równania (1) poszukuje się w postaci

$$(5) \quad \theta(r, \varphi, t) = t_0(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ t_{1n}(r, t) \cos n(\varphi - \omega t) + t_{2n}(r, t) \sin n(\varphi - \omega t) \}.$$

Podstawiając (5) do (1) otrzymuje się układ równań różniczkowych:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 t_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_0}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial t_0}{\partial t} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 t_{1n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{1n}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} t_{1n} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial t_{1n}}{\partial t} + \frac{n\omega}{\kappa} t_{2n} = 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial^2 t_{2n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{2n}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} t_{2n} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial t_{2n}}{\partial t} - \frac{n\omega}{\kappa} t_{1n} = 0,$$

których rozwiązania muszą spełniać warunki:

$$(9) \quad t_0(r, 0) = 0; \quad t_{1n}(r, 0) = 0; \quad t_{2n}(r, 0) = 0;$$

$$(10) \quad t_{0a} \equiv t_0(a, t) = \frac{1}{2\pi} (\theta_1 \Delta \alpha_1 + \theta_2 \Delta \alpha_2),$$

$$(11) \quad t_{na} \equiv t_{1n}(a, t) = \frac{2}{\pi n} \left[\theta_1 \sin \frac{n \Delta \alpha_1}{2} + \theta_2 (-1)^n \sin \frac{n \Delta \alpha_2}{2} \right],$$

$$(12) \quad t_2(a, t) = 0.$$

Rozwiązanie równania (6) z warunkami (9)₁ i (10) jest znane w literaturze i wyraża się wzorem [1, 2]

$$(13) \quad t_0(r, t) = t_{0a} \left[1 - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_{0i})}{s_{0i} J_1(as_{0i})} e^{-s_{0i}^2 \kappa t} \right],$$

gdzie przez s_{0i} oznaczono pierwiastki równania $J_0(as) = 0$, a — promień walca, $J_0(x)$ — funkcję Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu.

W celu rozwiązania układu równań (7), (8) z warunkami (9)₂, (9)₃, (11) i (12) posłużymy się skończoną transformacją Hankela [4]. W związku z tym o funkcjach $t_{1n}(r, t)$ i $t_{2n}(r, t)$ należy założyć, że przy ustalonym t spełniają warunki Dirichleta, tzn. mają skończoną ilość ekstremów w przedziale $(0, a)$ oraz że mają skończoną ilość skończonych nieciągłości w tym przedziale i nie mają nieciągłości nieskończonej.

Przy tych założeniach transformata Hankela funkcji ma postać [4]

$$(14) \quad \bar{f}(s_{ni}) = \int_0^a r f(r) J_n(rs_{ni}) dr,$$

natomiast funkcja przez swoją transformatę wyraża się wzorem

$$(15) \quad f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(rs_{ni})}{[J'_n(as_{ni})]^2} \bar{f}(s_{ni}),$$

gdzie s_{ni} oznacza pierwiastki równania $J_n(as) = 0$, $J_n(x)$ — funkcję Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu.

Po przetransformowaniu wymienionych wyżej równań i warunków otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(16) \quad -s_{ni}^2 \bar{t}_{1n} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{t}_{1n}}{dt} + \frac{n\omega}{\kappa} \bar{t}_{2n} = t_{na} a s_{ni} J'_n(as_{ni}),$$

$$(17) \quad -s_{ni}^2 \bar{t}_{2n} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{t}_{2n}}{dt} - \frac{n\omega}{\kappa} \bar{t}_{1n} = 0,$$

których rozwiązania muszą zniknąć dla $t = 0$.

Rozwiązaniem układu równań (16), (17) są funkcje $\bar{t}_{jn}(s_{ni}, t)$ ($j = 1, 2$) wyrażające się następującymi związkami:

$$(18) \quad \bar{t}_{1n}(s_{ni}, t) = \kappa t_{na} \frac{as_{ni} J'_n(as_{ni})}{s_{ni}^4 \kappa^2 + n^2 \omega^2} e^{-s_{ni}^2 \kappa t} \{ \kappa s_{ni}^2 \cos n\omega t - n\omega \sin n\omega t - \kappa s_{ni}^2 e^{\kappa s_{ni}^2 t} \},$$

$$(19) \quad \bar{t}_{2n}(s_{ni}, t) = -\kappa t_{na} \frac{as_{ni} J'_n(as_{ni})}{s_{ni}^4 \kappa^2 + n^2 \omega^2} e^{-s_{ni}^2 \kappa t} \{ n\omega \cos n\omega t + \kappa s_{ni}^2 \sin n\omega t - n\omega e^{\kappa s_{ni}^2 t} \}.$$

Po zastosowaniu do (18) i (19) wzoru (15) otrzymuje się rozwiązania układu równań (7), (8):

$$(20) \quad t_{1n}(r, t) = \frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni} J'_n(as_{ni})} \{ \exp(-s_{ni}^2 \kappa t) \cos [n\omega t + \delta_{ni}] - \cos \delta_{ni} \},$$

$$(21) \quad t_{2n}(r, t) = -\frac{2}{a} t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni} J'_n(as_{ni})} \{ \exp(-s_{ni}^2 \kappa t) \sin [n\omega t + \delta_{ni}] - \sin \delta_{ni} \},$$

gdzie oznaczono

$$\sin \delta_{ni} = \frac{n\omega}{\sqrt{\kappa^2 s_{ni}^4 + n^2 \omega^2}}, \quad \cos \delta_{ni} = \frac{\kappa s_{ni}^2}{\sqrt{\kappa^2 s_{ni}^4 + n^2 \omega^2}}.$$

Korzystając ze związków (5), (13), (20), (21) i wprowadzając bezwymiarową współrzędną $\varrho = r/a$ otrzymujemy rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca

$$(22) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = t_{0a} \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho \mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} \right] + \\ + 2 \sum_{i=1}^{\infty} t_{na} \left\{ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} \cos \delta_{ni} \cos [n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu_{ni}^2 Fo} \frac{J_n(\varrho \mu_{ni})}{\mu_{ni} J'_n(\mu_{ni})} \cos \delta_{ni} \cos [n\varphi + \delta_{ni}] \right\}.$$

Tutaj

$\mu_{ni} = as_{ni}$ — miejsca zerowe funkcji $J(\mu)$,

$Fo = \frac{\kappa t}{a^2}$ — liczba kryterialna Fouriera (bezwymiarowy czas),

$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle$.

3. Analiza otrzymanego rozwiązania

Ze względu na charakter zmian pola temperatury w czasie niektórzy autorzy (por. [5, 6]) wprowadzając podział stanu nieustalonego na:

- czysto niestacjonarny reżim ciepły ($Fo < 0,5$),
- regularny reżim ciepły ($Fo > 0,5$).

W czysto niestacjonarnym reżimie pole temperatury w sposób złożony zależy od fizycznych własności ciała, jego geometrii, rozmiarów oraz od warunków początkowych i brzegowych. Reżim regularny przedstawia sobą stadium procesu uporządkowanego, kiedy czasowo-przestrzenne zmiany temperatury zależą od geometrii ciała, jego fizycznych własności, rozmiarów i warunków brzegowych, natomiast nie zależą od warunków początkowych.

W celu przeanalizowania związku (22) przedstawmy go w postaci

$$(23) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = \theta^N(\varrho, \varphi, Fo) + \theta^B(\varrho, \varphi, t) + \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t),$$

gdzie oznaczono

$$(24) \quad \theta^N(\varrho, \varphi, Fo) = -2t_{0a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} e^{-\mu_{0i}^2 Fo} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n\varphi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} e^{-\mu_{ni}^2 Fo} \right\},$$

$$(25) \quad \theta^B(\varrho, \varphi, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \times \right. \\ \left. \times (\sin[n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] - e^{-\mu_{ni}^2 Fo} \sin[n\varphi + \delta_{ni}]) \right\},$$

$$(26) \quad \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t) = t_{0a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n(\varphi - \omega t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\}.$$

Korzystając ze znanego związku [2]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} = \begin{cases} \frac{\varrho^n}{2} & \text{dla } \varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{dla } \varrho = 1, \end{cases}$$

można wyrażenie (26) sprowadzić do postaci

$$(27) \quad \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t) = t_{0a} + \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n(\varphi - \omega t).$$

Poszczególne wyróżnione wyrażenia mają sens następujący:

– $\theta^N(\varrho, \varphi, Fo)$ opisuje zmianę temperatury poszczególnych punktów walca wskutek nagrzewania, na którą nie ma wpływu ruch obrotowy walca;

– $\theta^B(\varrho, \varphi, t)$ opisuje *bezwładność termiczną*, będącą wynikiem ruchu obrotowego walca wokół swojej osi. Wyrażenie to będzie nieco szerzej omówione w dalszej części pracy, a wpływ jego na rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca jest zilustrowany rysunkiem 3;

– $\theta^S(\varrho, \varphi - \omega t)$ jest właściwie funkcją dwóch zmiennych: bezwymiarowego promienia ϱ oraz różnicy $\varphi - \omega t$. Zmiana czasu t o Δt powoduje podobną zmianę wartości funkcji

θ^S , jak zmiana kąta φ o $\Delta\varphi = -\omega\Delta t$. Zatem θ^S opisuje ustalony rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca, dla którego istnieje oś symetrii. Nietrudno bowiem zauważyć, że θ^S jest parzystą funkcją argumentu $\varphi - \omega t$.

Rozkład temperatury dany wzorem (27) można interpretować jako pole temperatury nieruchomego walca po upływie bardzo długiego czasu, opisane w biegunowym układzie współrzędnych ϱ , $\varphi - \omega t = \psi$. Cechą charakterystyczną tego wyrażenia jest brak zależności od własności fizycznych ciała, jego wymiarów i warunków początkowych.

W reżimie czysto niestacjonarnym nie można pominąć żadnego z wyrażień występujących w związkach (24), (25), (27).

W reżimie regularnym ($Fo > 0,5$) funkcja $\theta(\varrho, \varphi, t)$ opisująca pole temperatury przyjmuje znacznie prostszą postać. Można bowiem pominąć wszystkie wyrażenia zawierające $\exp(-\mu_{ni}^2 Fo)$ oprócz największego, tzn. $\exp(-\mu_{01}^2 Fo)$. Wyróżnione w związku (23) wyrażenia przyjmą postaci

$$(24)_{RR} \quad \theta^N(\varrho, \varphi, Fo) = -2t_{0a} \frac{J_0(\varrho\mu_{01})}{\mu_{01} J_1(\mu_{01})} e^{-\mu_{01}^2 Fo} = \theta^N(\varrho, Fo),$$

$$(25)_{RR} \quad \theta^B(\varrho, \varphi, t) = \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) = \\ = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \sin [n(\varphi - \omega t) + \delta_{ni}] \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\}.$$

Wyrażenie (27) nie zmieni swojej postaci.

Związek (23) można zatem dla $Fo > 0,5$ przedstawić następująco

$$(23)_{RR} \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = \theta^N(\varrho, Fo) + \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) + \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t).$$

Pierwszy z wyróżnionych członów szybko dąży do zera z upływem czasu. Oba pozostałe są właściwie funkcjami dwóch zmiennych; opisują one stan quasi-ustalony. Widoczne jest, że na *bezwładność termiczną* ma istotny wpływ prędkość kątowna ω ; wartość bowiem funkcji $\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t)$ zależy od $\sin \delta_{ni}$.

Przy prędkościach kątowych ω , spełniających warunek

$$(28) \quad \omega \ll \frac{\kappa}{a^2},$$

mamy $\sin \delta_{ni} \ll 1$ i $\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) \approx 0$. Pole temperatury będzie wówczas dane związkiem

$$(29) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) \approx \theta^N(\varrho, Fo) + \theta^S(\varrho, \varphi - \omega t),$$

z którego widać, że ruch obrotowy praktycznie nie ma wpływu na sposób przenikania ciepła do wnętrza walca.

Wreszcie zauważmy, że dla $Fo > 1,5$ człon $\theta^N(\varrho, Fo)$ wnosi we wzorze (23)_{RR} poprawkę rzędu $10^{-4}t_{0a}$, którą można pominąć.

Wprowadzając pojęcie czasu charakterystycznego $\tau_0 = a^2/\kappa\mu_{01}^2$ (jest to czas charakteryzujący szybkość nagrzewania się walca w reżimie regularnym) zauważyć można, że warunek $Fo > 0,5$, określający czas, dla którego reżim cieplny nazywany jest regularnym, oznacza $t > 3\tau_0$, natomiast $Fo > 1,5$, dla którego we wzorze (23)_{RR} można pominąć pierwszy składnik, oznacza $t > 9\tau_0$.

Przy braku ruchu obrotowego ($\omega = 0$) związek (23) przekształca się do postaci

$$(30) \quad \theta(\varrho, \varphi, t) = t_{0a} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n\varphi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} e^{-t_{ni}^2 Fo} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n\varphi.$$

Na osi walca temperatura zmienia się w sposób niezależny od ruchu obrotowego. Podstawiając we wzorze (22) $\varrho = 0$ otrzymujemy

$$(31) \quad \theta(0, \varphi, t) = t_{0a} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\mu_{0i}^2 Fo)}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})} \right\} = \theta(Fo).$$

Identyczną funkcję opisującą zmianę w czasie temperatury na osi walca otrzymuje się w przypadku rozważania rozkładu temperatury opisanego związkiem (13) lub (30). Jak zatem widać, w rozważanym zagadnieniu ruch obrotowy nie ma wpływu na temperaturę punktów leżących na osi walca. Głębsza analiza wzoru (31) podana jest m.in. w monografiach [1, 3].

Na koniec rozważmy przypadek dużych prędkości kątowych ω . Funkcję $\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t)$, daną dla $Fo > 0,5$ związkiem (25)_{RR}, przekształćmy w tym celu do postaci

$$(32) \quad \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \sin n(\varphi - \omega t) \sum_{i=1}^{\infty} \sin \delta_{ni} \cos \delta_{ni} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\} - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ t_{na} \cos n(\varphi - \omega t) \sum_{i=1}^{\infty} \sin^2 \delta_{ni} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} \right\}.$$

Oznaczając $A = \frac{\omega a^2}{\kappa}$ i korzystając z faktu, że

$$\sin \delta_{ni} = \frac{n\omega a^2}{\sqrt{\kappa^2 \mu_{ni}^4 + n^2 \omega^2 a^4}}, \quad \cos \delta_{ni} = \frac{\kappa \mu_{ni}^2}{\sqrt{\kappa^2 \mu_{ni}^4 + n^2 \omega^2 a^4}},$$

można związek (32) zapisać następująco:

$$\theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} [S_n^+(\varrho) \sin n(\varphi - \omega t) + S_n^-(\varrho) \cos n(\varphi - \omega t)],$$

gdzie

$$(33) \quad S_n^+(\varrho) = An \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + A^2 n^2) J_{n+1}(\mu_{ni})}, \\ S_n^-(\varrho) = An \sum_{i=1}^{\infty} \frac{An J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4 + A^2 n^2) \mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})}.$$

Opierając się na wynikach pracy [9], mamy

$$(34) \quad \begin{aligned} S_n^+(\varrho) &= \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{2M_n(\sqrt{An})} \sin[\theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \\ S_n^-(\varrho) &= \frac{\varrho^n}{2} - \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{2M_n(\sqrt{An})} \cos[\theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M_n(z) &= \sqrt{\text{ber}_n^2 z + \text{bei}_n^2 z}, \\ \theta_n(z) &= \text{arctg} \left(\frac{\text{bei}_n z}{\text{ber}_n z} \right), \end{aligned}$$

$\text{ber}_n z$, $\text{bei}_n z$ — funkcje Thomsona (Kelvina) [7, 8].

Wykorzystanie wzorów (34) pozwala związek (32) przedstawić w postaci pojedyncze sumy nieskończonej

$$(35) \quad \begin{aligned} \theta^B(\varrho, \varphi - \omega t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \varrho^n \cos n(\varphi - \omega t) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})} \cos[n(\varphi - \omega t) + \theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \end{aligned}$$

której zbieżność dla $\varrho \in \langle 0, 1 \rangle$ wykazano w pracy [10].

Podstawiając (35) do (23)_{RR} otrzymujemy następującą postać funkcji, opisującej rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca w czasie reżimu regularnego:

$$(36) \quad \begin{aligned} \theta(\varrho, \varphi, t) &= \theta^N(\varrho, Fo) + t_{0a} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} t_{na} \frac{M_n(\varrho\sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})} \cos[n(\varphi - \omega t) + \theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})], \end{aligned}$$

gdzie $\theta^N(\varrho, Fo)$ określone jest związkiem (24)_{RR}. Składnik ten nie zależy od prędkości kątowej ω .

Z postaci (36) funkcji $\theta(\varrho, \varphi, t)$ wynika, że zasadniczy wpływ na zmienność temperatury w czasie w punktach przekroju poprzecznego walca ma suma, zawierająca funkcje $M_n(z)$ i $\theta_n(z)$, przy czym ułamek $\frac{t_{na} M_n(\varrho\sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})}$ decyduje o amplitudzie tych zmian, zaś funkcja $\cos[n(\varphi - \omega t) + \theta_n(\sqrt{An}) - \theta_n(\varrho\sqrt{An})]$ — o szybkości oscylowania temperatury wokół wartości t_{0a} (składnik $\theta^N(\varrho, Fo)$ dla $Fo > 1,5$ wnosi do tej wartości pomijalnie małą poprawkę).

Jeśli prędkość kątowa ω będzie odpowiednio duża, to — biorąc pod uwagę tylko skończoną liczbę wyrazów rozważanego szeregu — można funkcje $M_n(\sqrt{An})$ zastąpić ich rozwinięciem asymptotycznym [7, 8]:

$$(37) \quad M_n(\sqrt{An}) \sim \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{An}{2}}\right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{An}} \sqrt{\lambda_n^2(\sqrt{An}) + \chi_n^2(\sqrt{An})},$$

gdzie

$$\lambda_n(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (-1)^r \cos \frac{r\pi}{4} \left(\prod_{s=1}^r \frac{4n^2 - (2s-1)^2}{8sz} \right) \right\},$$

$$\chi_n(z) = - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (-1)^r \sin \frac{r\pi}{4} \left(\prod_{s=1}^r \frac{4n^2 - (2s-1)^2}{8sz} \right) \right\};$$

o ile tylko $\sqrt{An} \gg n^2$ dla wszystkich $n \leq N_0$ (N_0 — ilość rozważanych składników szeregu).

Ułamek $\frac{t_{na} M_n(\varrho \sqrt{An})}{M_n(\sqrt{An})}$ może osiągać wartości z przedziału $(0, t_{na})$. Jednakże postać (37) rozwinięcia asymptotycznego funkcji $M_n(\sqrt{An})$ wskazuje, że dla dużych wartości A rozważany ułamek może osiągać bardzo małe wartości nawet dla wartości ϱ zbliżonych do jedności. Zatem wewnątrz walca temperatura będzie w rozważanym przypadku oscylować wokół t_{0a} . Jednakże przy brzegu walca pozostanie widoczny efekt *bezwładności termicznej*.

Zbliżony do osiowosymetrycznego rozkład temperatury wewnątrz walca przy dużych prędkościach kątowych jest efektem «rozmycia» zmiennych warunków termicznych na brzegu.

Odległość ϱ_w od brzegu walca taką, że dla $\varrho < 1 - \varrho_w$ temperatura punktów walca będzie się różnić od t_{0a} o mniej niż $0,1t_{0a}$, nazwiemy głębokością wnikania temperatury. Z przytoczonej analizy funkcji $\theta(\varrho, \varphi, t)$ wynika, że przy ustalonych κ i a głębokość wnikania ϱ_w będzie malała ze wzrostem prędkości kątowej ω .

4. Przykład liczbowy

Rozważmy pole temperatury w walcu ze stali węglowej. Warunki brzegowe dla tego walca przyjmujemy następujące:

$$T_1 = 300^\circ\text{C}, \quad T_2 = T_0 = 20^\circ\text{C}, \quad \Delta\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\alpha_2 = 0.$$

Stąd

$$\theta_1 = 280^\circ, \quad \theta_2 = 0^\circ.$$

Dane charakteryzujące walec są następujące:

$$\kappa = 0,119 \text{ cm}^2/\text{s}, \quad a = 5 \text{ cm}.$$

Stąd

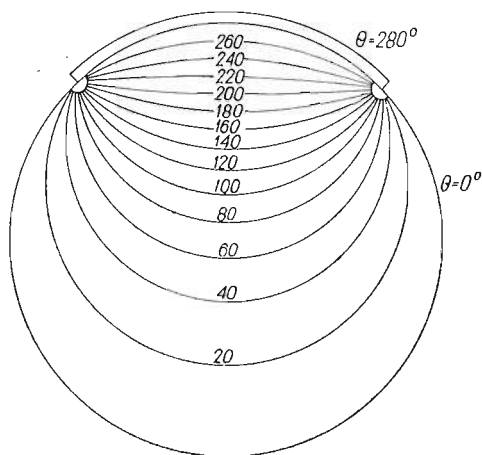
$$Fo = 0,00476t \text{ [s]},$$

$$t_{0a} = 70 \text{ [deg]},$$

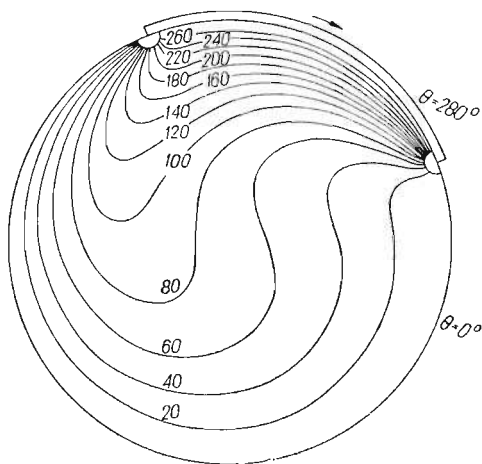
$$t_{na} = \frac{560}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{4} \text{ [deg]}.$$

Czas charakterystyczny $\tau_0 = 37,4$ s. Regularny reżim cieplny rozpocznie się zatem po czasie $3\tau_0 = 112,2$ s.

Pole temperatury w przekroju poprzecznym obliczono dla walca nieruchomego (rys. 2), dla walca obracającego się wokół swojej osi z prędkością kątową $\omega = 1$ obr./min. (rys. 3) oraz dla walca obracającego się z prędkością kątową $\omega = 120$ obr./min. (rys. 4). Na rysunkach 3 i 4 jest dobrze widoczny efekt *bezwładności termicznej*. Rysunek 4 pokazuje

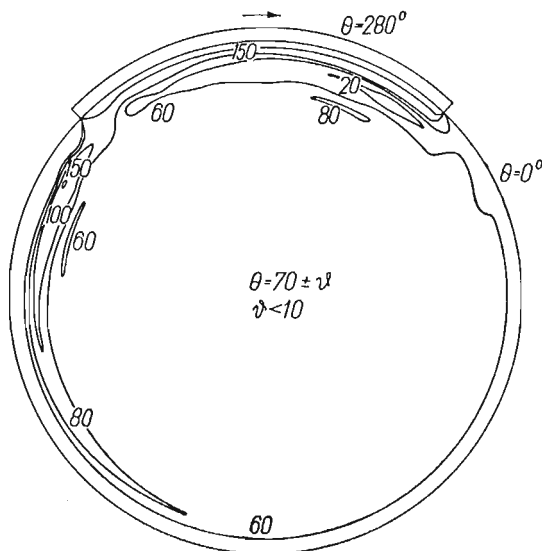


Rys. 2. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym nieruchomego walca dla $t > 9\tau_0$



Rys. 3. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca obracającego się z prędkością kątową $\omega = 1$ obr./min. dla $t > 9\tau_0$

niewielki zafałszowany obraz temperatury w przekroju walca (dane numeryczne dla 1201 punktów przekroju poprzecznego okazały się niewystarczające dla zrobienia dokładniejszego rysunku), ale widać na nim, że ze wzrostem prędkości kątowej maleje głębokość wnikania temperatury do walca.



Rys. 4. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca obracającego się z prędkością kątową $\omega = 120$ obr./min. dla $t > 9\tau_0$

Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej ODRA 1204. Dane dotyczące zer funkcji Bessela wzięto z tablic [11].

W zakończeniu pragnę serdecznie podziękować mgr mgr Marii KWIEK i Jackowi NEUMANNOWI za przeprowadzenie obliczeń numerycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. П. П. Юшков, *Функции Бесселя и их приложения к задаче об охлаждении цилиндра*, Изд. Академии Наук БССР, Минск 1962.
2. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wien, Springer-Verlag 1959; tłum. ros. Moskwa 1963.
3. А. В. ЛЫКОВ, *Теория теплопроводности*, Гостехиздат 1952.
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.
5. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Регулярный тепловой режим*, Гос. Изд. Тех.-Теорет. Лит., Москва 1954.
6. А. Г. ХАРЛАМОВ, *Измерение теплопроводности твердых тел*, АТОМИЗДАТ, Москва 1973.
7. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge at the University Press, 1962.
8. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
9. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos., 2, 15, (1977).
10. K. GRYSA, *Rozkład temperatury i naprężeń w długim walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznic*, Rozprawa doktorska, XI, 1975.
11. *Таблицы нулей функций Бесселя*, Библиотека Математических Таблиц, Вып. 44, Москва 1967.

Резюме

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ КОСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ЕГО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе рассматривается нестационарное температурное поле в неограниченном вращающемся круговом цилиндре при условиях нагрева его боковой поверхности имеющих вид $T(\varphi, t)$. Задача решена путем интегральных преобразований. Получено решение в виде суммы трех слагаемых, которые имеют определенный физический смысл. В конце работы приведен числовой пример, иллюстрирующий зависимость между распределением температуры в цилиндре и его угловой скоростью.

Summary

NON-STEADY STATE OF TEMPERATURE IN A ROTATING CIRCULAR CYLINDER DUE TO PIECE-WISE CONSTANT TEMPERATURE ON ITS SURFACE

In this paper non-steady distribution of temperature in a rotating circular cylinder is considered for the case, when its lateral surface undergoes a sudden change of temperature. The function $T(\varphi, t)$ describing the boundary condition satisfies Dirichlet's conditions for $\varphi \in (0, 2\pi)$. The problem is solved by using the finite Hankel transform. The solution is given as a sum of three parts, the physical sense of which is easy for interpretation. In the last section of the paper a numerical example illustrating the dependence of the field of temperature on the angular velocity of the cylinder is given.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1976 r.