MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 15 (1977)

ANALIZA KRZYŻOWOPRĄDOWEGO KONWEKCYJNEGO REKUPERATORA FIELDA ORAZ PĘTLICOWEGO ZE STRATAMI CIEPŁA DO OTOCZENIA

JAN SKŁADZIEŃ (GLIWICE)

Oznaczenia

A_n, B_n, C_n wyrazy szeregu funkcyjnego zależne od zmiennej y, podane dla rekuperatora Fielda w [2], dla rekuperatora pętlicowego w [3],

k_{i-j} zredukowany współczynnik przenikania ciepła od strumienia i-tego do j-tego ($k_{i-j} = k_{j-i}$),

(K_{i-j}) liczba kryterialna określona zależnością:

$$(K_{i-j}) = \frac{k_{i-j}x_0 y_0}{W_i},$$

$\dot{Q}_0$ strumień ciepła odpływający do otoczenia,

t temperatura,

W pojemność cieplna strumienia ($W_2 = W_3$),

X, Y współrzędne bezwzględne,

x, y współrzędne bezwymiarowe: $x = \frac{X}{x_0}$; $y = \frac{Y}{y_0}$,

x_0, y_0 wymiary odniesieniowej powierzchni przepływu ciepła,

α stosunek pojemności cieplnych strumieni:

$$\alpha = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_3}{W_1},$$

β pomocnicza wielkość określona zależnością:

$$\beta = \alpha \cdot \theta_{1w_{max}},$$

$\varkappa, \varkappa_0$ stosunki zredukowanych współczynników przenikania ciepła; $\varkappa$ — por. tabl. 1,

$$\varkappa_0 = \frac{k_{1-0}}{k_{1-2}},$$

θ bezwymiarowa temperatura: $\theta = \frac{t - t_{min}}{t_{1d} - t_{min}}$,

$\Delta\theta_0$ bezwymiarowa wielkość określająca straty ciepła do otoczenia (bezwymiarowy przyrost temperatury jaki wystąpiłby w przypadku doprowądzenia ciepła traconego na rzecz otoczenia $\dot{Q}_0$ do czynnika o takiej samej pojemności cieplnej, jaką ma w rekuperatorze medium ogrzewane):

$$\Delta\theta_0 = \frac{\dot{Q}_0}{W_2(t_{1d} - t_{min})},$$

d przy dopływie,

i i-ty strumień; $i = 1$ dla czynnika grzejącego,

max maksymalny,

min minimalny,

o otoczenie,
śr średni,
w przy wypływie.

1. Założenia

— Czynnik ogrzewany płynie adiabatycznymi strugami, pomiędzy którymi nie ma wymiany ani ciepła ani masy. Czynnik grzejący albo płynie też adiabatycznymi strugami, albo ulega całkowitemu wymieszaniu w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu. W tym drugim przypadku temperatura medium cieplejszego jest funkcją tylko jednej zmiennej.

— W rekuperatorze panuje stan ustalony.

— Nie występuje przepływ ciepła wzdłuż przegród.

— Współczynniki przenikania ciepła k_{i-j} oraz pojemności cieplne W_i posiadają stałe wartości. Tym samym stałe są liczby kryterialne (K_{i-j}) oraz obowiązuje równość $W_2 = W_3$.

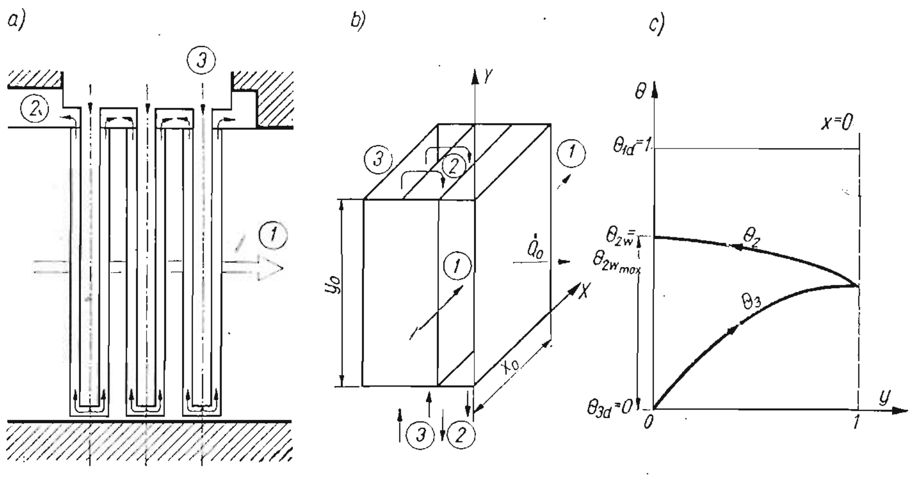
— Nie występuje przepływ ciepła przez promieniowanie.

— Z otoczeniem ma przez przegrodę kontakt czynnik grzejący.

— Temperatura otoczenia jest stała.

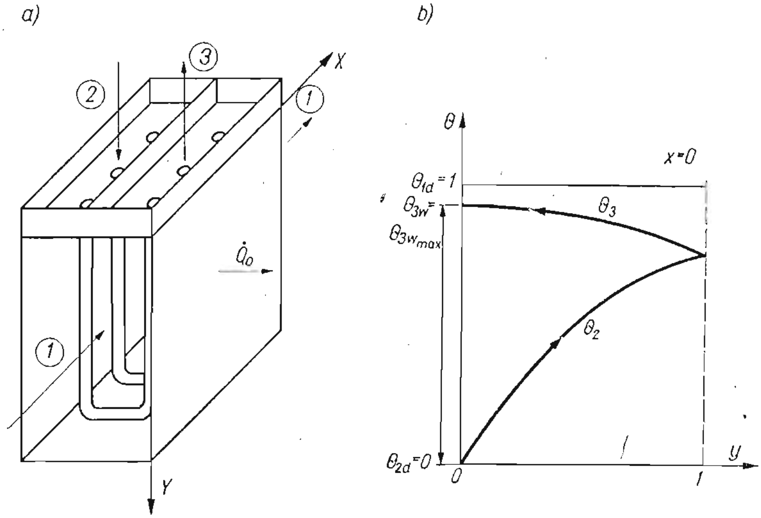
2. Wstęp

Rekuperator Fielda i rekuperator pętlicowy są trójstrumieniowymi wymiennikami ciepła, w których występuje jeden strumień czynnika grzejącego, płynący na zewnątrz elementów grzejnych oraz dwa strumienie czynnika ogrzewanego. W związku z tym trzeba brać pod uwagę dwie powierzchnie grzejne wewnątrz wymiennika, poprzez które ma miejsce przepływ ciepła pomiędzy strumieniami mediów. W przypadku uwzględnienia strat ciepła do otoczenia występuje trzecia powierzchnia grzejna oddzielająca czynnik cieplejszy od otoczenia. Powierzchnie wymiany ciepła zostały zastąpione prostokątami



Rys. 1. Rekuperator Fielda z krzyżowym przepływem czynników: a) schemat wymiennika, b) model teoretyczny, c) rozkład temperatur

o wymiarach x_0, y_0. W rezultacie rozpatrywane współczynniki k_{i-j} są współczynnikami zredukowanymi, równymi iloczynom rzeczywistych współczynników przenikania ciepła i rzeczywistych powierzchni podzielonym przez odniesieniową powierzchnię $x_0 \cdot y_0$.



Rys. 2. Rekuperator pętlicowy z krzyżowym przepływem czynników: a) schemat wymiennika, b) rozkład temperatur

W rekuperatorze Fielda pokazanym na rys. 1 występuje przepływ ciepła poprzez przegrody oddzielające strumień *1* czynnika grzejącego od otoczenia i od strumienia *2* oraz przez przegrodę oddzielającą strumienie *2* i *3* czynnika ogrzewanego. W rekuperatorze pętlicowym (rys. 2) strumień *1* medium grzejącego oddaje ciepło poprzez trzy przegrody oddzielające go od otoczenia oraz od strumieni *2* i *3* medium ogrzewanego.

3. Klasyczny przepływ krzyżowy

W klasycznym krzyżowoprądowym rekuperatorze czynniki płyną adiabatycznymi strugami i dlatego temperatura każdego strumienia jest funkcją dwóch zmiennych przestrzennych. Przy sporządzaniu równań bilansu energii bierze się pod uwagę elementarne powierzchnie grzejne o wymiarach $dX \cdot dY$.

3.1. Rekuperator Fielda. Równania bilansu energii dla konwekcyjnego krzyżowoprądowego rekuperatora Fielda, w którym występują straty ciepła do otoczenia, mają postać (wraz z warunkami brzegowymi):

$$(1)\qquad \begin{aligned} k_{1-2}(t_1-t_2)+k_{1-0}(t_1-t_0) &= -\frac{W_1}{y_0}\frac{\partial t_1}{\partial X},\\ k_{1-2}(t_1-t_2)-k_{2-3}(t_2-t_3) &= -\frac{W_2}{x_0}\frac{\partial t_2}{\partial Y},\\ k_{2-3}(t_2-t_3) &= \frac{W_3}{x_0}\frac{\partial t_3}{\partial Y},\\ t_1|_{x=0} = t_{1d}, \quad t_3|_{y=0} = t_{3d}, &\quad t_2|_{y=1}(x) = t_3|_{y=1}(x), \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych otrzymuje się:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&(\varkappa_0+1)\theta_1+\frac{1}{(K_{1-2})}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}=\varkappa_0\theta_0+\theta_2,\\
&(\varkappa+1)\theta_2-\frac{1}{(K_{2-3})}\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=\varkappa\theta_1+\theta_3,\\
&\theta_3+\frac{1}{(K_{2-3})}\frac{\partial\theta_3}{\partial y}=\theta_2,\\
&\theta_1|_{x=0}=1,\quad \theta_3|_{y=0}=0,\quad \theta_2|_{y=1}=\theta_3|_{y=1}.
\end{aligned}
$$

Dla $\theta_0 \neq 0$ układ równań (2) nie daje się w prosty sposób rozwiązać. Jeżeli jednak temperatura otoczenia jest równa temperaturze czynnika ogrzewanego przy dopływie do wymiennika ($\theta_0 = 0$), to wówczas można skorzystać z metody podanej w [2] i dostaje się wtedy rozwiązanie w postaci:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\theta_1=e^{-(\varkappa_0+1)(K_{1-2})x}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+1}(y)x^n\Big],\\
&\theta_2=e^{-(\varkappa_0+1)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty}B_n(y)x^{n-1},\\
&\theta_3=e^{-(\varkappa_0+1)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty}C_n(y)x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Średnia temperatura czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika jest określona zależnością:

$$
(4)\qquad \theta_{2w_{śr}}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n|_{y=0}\int_0^1 x^{n-1}e^{-(\varkappa_0+1)(K_{1-2})x}\,dx.
$$

W pracy [2] podane są zależności określające A_n, B_n i C_n dla rekuperatora Fielda.

3.2. Rekuperator pętlicowy. Równania bilansu energii dla niezaizolowanego cieplnie konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z przepływem krzyżowym mają wraz z warunkami brzegowymi postać:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&k_{1-2}(t_1-t_2)+k_{1-3}(t_1-t_3)+k_{1-0}(t_1-t_0)=\frac{-W_1}{y_0}\frac{\partial t_1}{\partial X},\\
&k_{1-2}(t_1-t_2)=\frac{W_2}{x_0}\frac{\partial t_2}{\partial Y},\\
&k_{1-3}(t_1-t_3)=-\frac{W_3}{x_0}\frac{\partial t_3}{\partial Y},\\
&t_1|_{x=0}=t_{1d},\quad t_2|_{y=0}=t_{2d},\quad t_2|_{y=1}(x)=t_3|_{y=1}(x).
\end{aligned}
$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych otrzymuje się:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &(\varkappa+1+\varkappa_0)\theta_1+\frac{1}{(K_{1-2})}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}=\varkappa_0\theta_0+\theta_2+\varkappa\theta_3,\\ &\theta_2+\frac{1}{(K_{2-1})}\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=\theta_1,\\ &\theta_3-\frac{1}{(K_{3-1})}\frac{\partial\theta_3}{\partial y}=\theta_1,\\ &\theta_1|_{x=0}=1;\quad \theta_2|_{y=0}=0;\quad \theta_2|_{y=1}=\theta_3|_{y=1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (6) dla $\theta_0 = 0$ po skorzystaniu z metody podanej w [3] ma postać:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\theta_1=e^{-(\varkappa+1+\varkappa_0)(K_{1-2})x}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+1}(y)x^n\Big],\\ &\theta_2=e^{-(\varkappa+1+\varkappa_0)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty}B_n(y)x^{n-1},\\ &\theta_3=e^{-(\varkappa+1+\varkappa_0)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty}C_n(y)x^{n-1}. \end{aligned}$$

Średnią temperaturę czynnika ogrzewanego przy wypływie określa wzór:

$$(8)\qquad \theta_{3w_{śr}}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n|_{y=0}\int_0^1 x^{n-1}e^{-(\varkappa+1+\varkappa_0)(K_{1-2})x}dx.$$

W pracy [3] podane są zależności określające A_n, B_n i C_n dla rekuperatora pętlicowego.

4. Całkowite wymieszanie czynnika grzejącego

Gdy występuje pełne wymieszanie strumienia czynnika grzejącego w przekrojach prostopadłych do kierunku przepływu, wtedy temperatura θ_1 jest funkcją tylko zmiennej x: $\theta_1 = \theta_1(x)$. Równania bilansu energii strumieni *2* i *3* nie ulegają zmianie, nieco inną postać przybiera równanie bilansu dla czynnika grzejącego. Aby otrzymać to równanie należy wziąć pod uwagę wycinek powierzchni grzejnej o wymiarach $y_0 \cdot dX$. Taki sam efekt daje scałkowanie w granicach $0\div 1$ względem zmiennej y obu stron pierwszego równania układu (1) i (2) lub (5) i (6).

Równanie bilansu energii dla strumienia *1* ma tu w przypadku rekuperatora Fielda postać

$$(2a)\qquad (\varkappa_0+1)\theta_1+\frac{1}{(K_{1-2})}\frac{d\theta_1}{dx}=\varkappa_0\theta_0+\int_0^1\theta_2\,dy.$$

Dla rekuperatora pętlicowego otrzymuje się

$$(6a)\qquad (\varkappa+1+\varkappa_0)\theta_1+\frac{1}{(K_{1-2})}\frac{d\theta_1}{dx}=\varkappa_0\theta_0+\int_0^1(\theta_2+\varkappa\theta_3)\,dy.$$

Pozostałe równania układu (2) i (6) pozostają bez zmian. Równania bilansu energii dla strumieni *2* oraz *3* czynnika ogrzewanego rozwiązuje się tak samo jak dla rekuperatorów bez strat [4] i po wykorzystaniu warunków brzegowych dotyczących tych strumieni otrzymuje się wzory określające temperatury θ_2 i θ_3. Po wstawieniu otrzymanych zależności do (2a) względnie (6a) dostaje się równanie różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{d\theta_1}{dx}+[\beta+(K_{1-0})]\theta_1 = (K_{1-0})\theta_0, \tag{9}$$

gdzie $\beta = \alpha \cdot \theta_{iw_{max}}$ zależy od rodzaju rekuperatora (tablica 1). Rozwiązanie (9) po wykorzystaniu warunku $\theta_1(0) = 1$ ma postać

$$\theta_1 = \left[1-\frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta+(K_{1-0})}\right]e^{-[\beta+(K_{1-0})]x}+\frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta+(K_{1-0})}. \tag{10}$$

Tablica 1. Wielkości określone w odmienny sposób w rozpatrywanych typach rekuperatorów

Wielkość	Rekuperator Fielda	Rekuperator pętlicowy
t_{min}	t_{3d}	t_{2d}
$\varkappa$	$\dfrac{k_{1-2}}{k_{2-3}}$	$\dfrac{k_{1-3}}{k_{1-2}}$
θ_{iw}	θ_{2w}	θ_{3w}
$\theta_{iw_{max}}$ [4]	$\dfrac{2}{1+\sqrt{1+4/\varkappa}\,\mathrm{ctgh}[(K_{2-1})\sqrt{1/4+1/\varkappa}]}$	$1-e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}$

Dla $\theta_0 = 0$ otrzymuje się

$$\theta_1 = e^{-[\beta+(K_{1-0})]x}. \tag{10a}$$

Bezwymiarowa temperatura czynnika ogrzewanego przy wypływie z rekuperatora w obu przypadkach [4] jest określona wzorem:

$$\theta_{iw} = \theta_1 \cdot \theta_{iw_{max}}. \tag{11}$$

Uwzględnienie (10) daje po scałkowaniu w granicach $0 \div 1$ względem zmiennej x średnią temperaturę czynnika ogrzewanego przy wypływie w postaci

$$\theta_{iw_{sr}} = \frac{\beta/\alpha}{\beta+(K_{1-0})}\left\{(K_{1-0})\theta_0+[1-e^{-\beta-(K_{1-0})}]\left[1-\frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta+(K_{1-0})}\right]\right\}. \tag{12}$$

Dla $\theta_0 = 0$ mamy

$$\theta_{iw_{śr}} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\beta}{\beta+(K_{1-0})}\,[1-e^{-\beta-(K_{1-0})}]. \tag{12a}$$

Ilość ciepła oddawaną do otoczenia $\dot{Q}_0$ można obliczyć z bilansu jako różnicę pomiędzy ciepłem oddanym przez czynnik grzejący i ciepłem pochłoniętym przez medium ogrzewane, tj.

$$\dot{Q}_0 = [W_1(1-\theta_1|_{x=1})-W_2\cdot\theta_{iw_{śr}}](t_{1d}-t_{min}). \tag{13}$$

Wielkość $\dot{Q}_0$ można również określić biorąc pod uwagę ilość ciepła przechodzącą przez przegrodę oddzielającą strumień czynnika grzejącego od otoczenia, mianowicie

$$\dot{Q}_0 = \int_0^1 k_{1-0}(t_{1d} - t_{min})(\theta_1 - \theta_0) x_0 y_0 dx. \tag{14}$$

Po wykorzystaniu (13) lub (14) otrzymuje się wyrażenie określające bezwymiarowe straty ciepła do otoczenia:

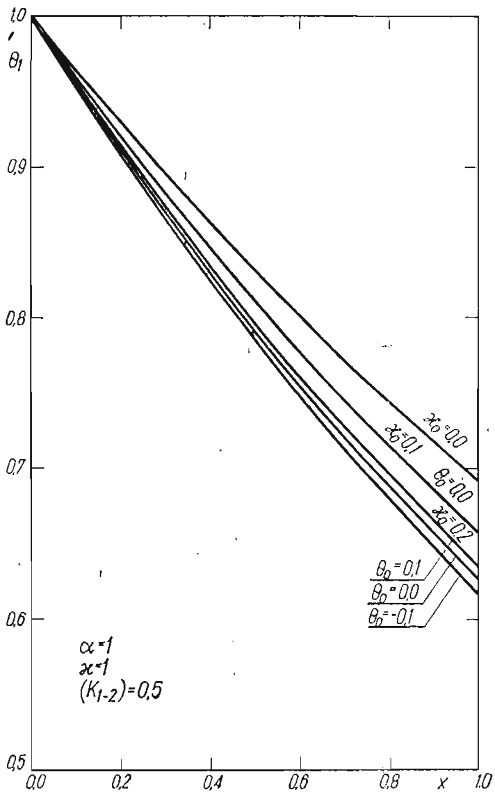
$$\Delta\theta_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{(K_{1-0})}{\beta + (K_{1-0})} \left\{ \left[1 - \frac{(K_{1-0})\theta_0}{\beta + (K_{1-0})} \right] [1 - e^{-\beta - (K_{1-0})}] - \beta\theta_0 \right\}. \tag{15}$$

Dla $\theta_0 = 0$ mamy

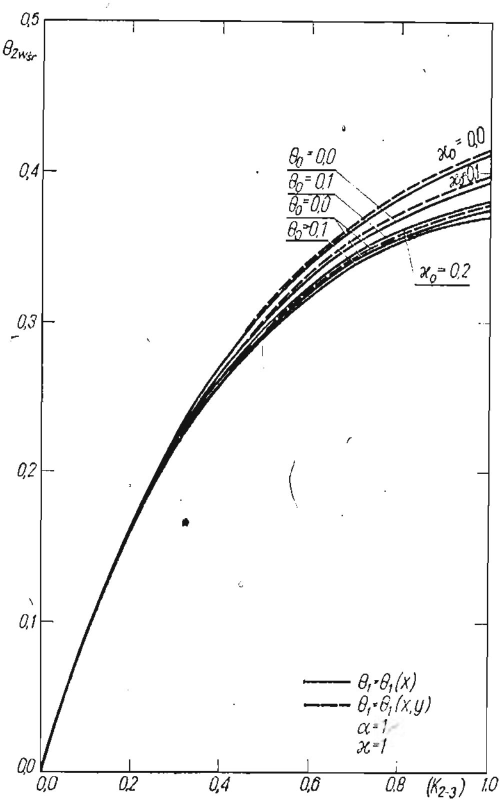
$$\Delta\theta_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{(K_{1-0})}{\beta + (K_{1-0})} [1 - e^{-\beta - (K_{1-0})}]. \tag{15a}$$

5. Wyniki przykładowych obliczeń, wnioski

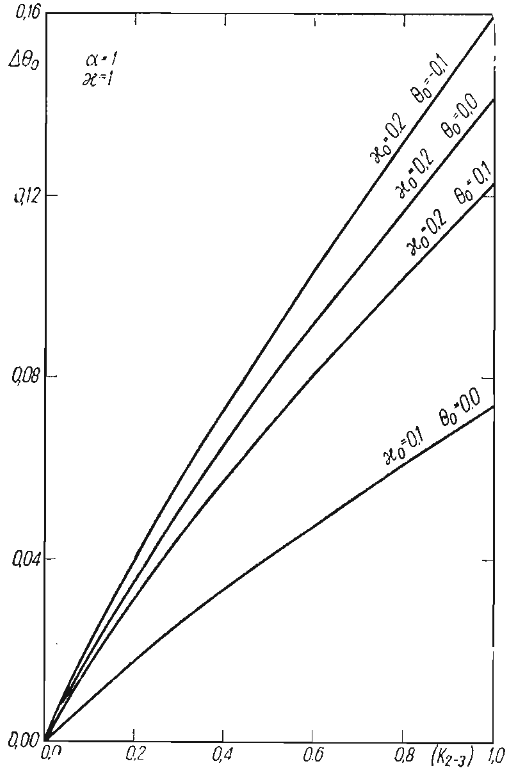
Na podstawie wyprowadzonych wzorów wykonano obliczenia, których wyniki są przedstawione na rys. 3, 4 i 5 dla rekuperatora Fielda oraz na rys. 6,7 i 8 dla rekuperatora pętlicowego. Rys. 3 i 6 przedstawiają spadek temperatury czynnika grzejącego wzdłuż



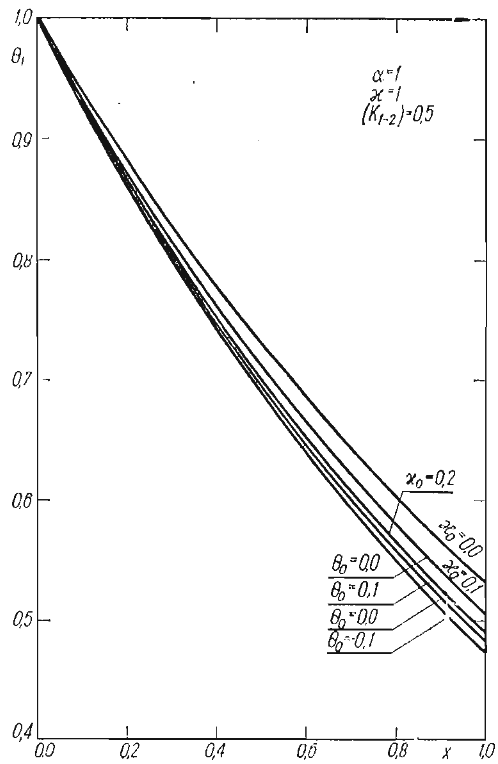
Rys. 3. Zmienność temperatury czynnika grzejącego $\theta_1 = \theta_1(x)$ w rekuperatorze Fielda



Rys. 4. Zależność średniej temperatury podgrzania od kryterium (K_{2-3}) w rekuperatorze Fielda

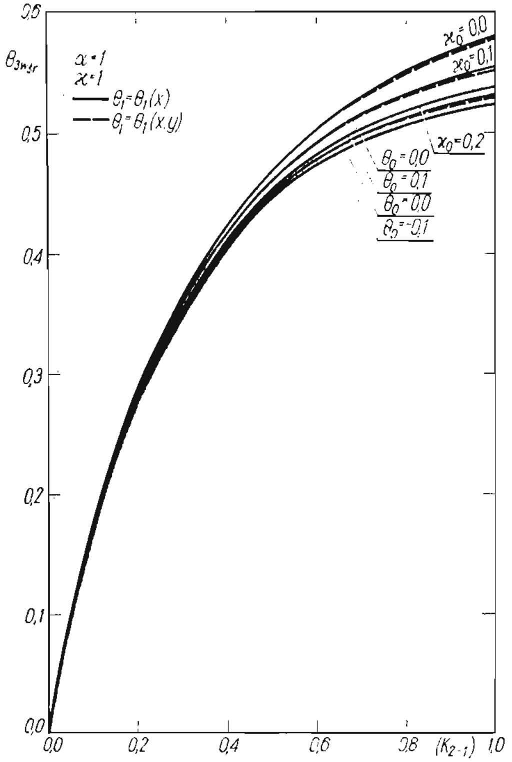


Rys. 5. Zależność bezwymiarowych strat ciepła od kryterium (K_{2-3}) w rekuperatorze Fielda dla przypadku całkowitego wymieszania strumienia czynnika grzejącego

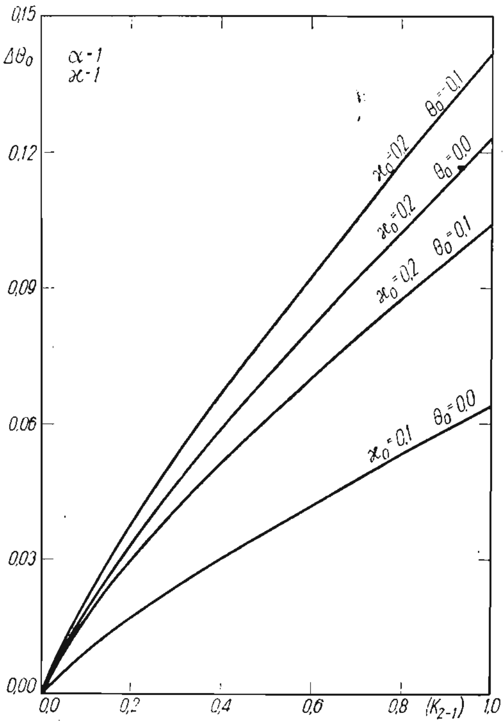


Rys. 6. Zmienność temperatury czynnika grzejącego $\theta_1 = \theta_1(x)$ w rekuperatorze pętlicowym

długości rekuperatora, przy całkowitym wymieszaniu $(\theta_1 = \theta_1(x))$. Szybkość, z jaką maleje temperatura θ_1 zwiększa się ze wzrostem stosunku $\varkappa_0$ oraz w mniejszym stopniu ze spadkiem bezwymiarowej temperatury otoczenia θ_0. Rysunki 4 i 7 przedstawiają zależność średniej bezwymiarowej temperatury podgrzania od bezwymiarowej powierzchni przepływu ciepła (K_{2-3}) względnie (K_{2-1}). Z wykresów zamieszczonych na tych rysunkach widać, że wyniki obliczeń wykonanych dla klasycznego przepływu krzyżowego (linie przerywane) i dla przypadku całkowitego wymieszania czynnika grzejącego są bardzo zbliżone. Różnice są rzędu ułamka procenta. Dla małych wartości kryterium (K_{2-3}') względnie (K_{2-1}) wpływ strat ciepła na temperaturę podgrzania czynnika chłodniejszego jest niewielki. Dla większych wartości liczb kryterialnych wpływ stosunku $\varkappa_0$ na $\theta_{iw_{śr}}$ jest widoczny, temperatura θ_0 ma natomiast mniejsze znaczenie. Rysunki 5 i 8 przedstawiają dla przypadku całkowitego wymieszania czynnika grzejącego zależność bezwymiarowo określonych strat ciepła od bezwymiarowej powierzchni (K_{2-3}) lub (K_{2-1}). Z analizy zmienności temperatury $\Delta\theta_0$ oraz $\theta_{iw_{śr}}$ wynika, że straty ciepła do otoczenia $\Delta\theta_0$ są znacznie wyższe niż spadek temperatury $\theta_{iw_{śr}}$ w porównaniu do wymiennika bez strat.



Rys. 7. Zależność średniej temperatury podgrzania od kryterium (K_{2-1}) w rekuperatorze pętlicowym



Rys. 8. Zależność bezwymiarowych strat ciepła od kryterium (K_{2-1}) w rekuperatorze pętlicowym dla przypadku całkowitego wymieszania strumienia czynnika grzejącego

Literatura cytowana w tekście

1. G. D. RABINOVICH, *On a particular case of stationary heat transfer with crossflow of heat agents*, Int. Jour. of Heat and Mass Transfer, **5** (1962) 409 - 412.
2. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza rekuperatora Fielda przy krzyżowym przepływie czynników bez wymieszania*, ZNPŚ, Energetyka, 45 (1973).
3. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z krzyżowym przepływem czynników*, Mech. Teoret. Stos. 1, **13** (1975).
4. J. SKŁADZIEŃ, *Rozkład temperatur w rekuperatorze Fieldu przy krzyżowym przepływie czynników*, ZNPŚ, Energetyka, 39 (1971).

Р е з ю м е

АНАЛИЗ КОНВЕКЦИОННОГО РЕКУПЕРАТОРА ФИЛЬДА И ПЕТЛЕВОГО С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ ПОТОКАМИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ И С ПОТЕРЯМИ ТЕПЛА

В статье приведен теплообмен в конвекционном рекуператоре Фильда и петлевом с перекрестными потоками теплоносителей и с потерями тепла. При анализе конвекционных рекуператоров используются общепринятые предположения.

Summary

ANALYSIS OF THE CONVECTIVE CROSSFLOW FIELD AND LOOP RECUPERATOR WITH HEAT LOSSES

The convective cross-flow Field and loop recuperators with heat losses have been considered in the paper. The usual assumptions of the analysis of convective recuperators have been accepted.

INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 października 1976 r.