

ANALIZA BARDZO DUŻYCH UGIĘĆ SPRĘŻYSTYCH ŚCISKANYCH OSIOWO POWŁOK WALCOWYCH I STOŻKOWYCH

WALERIAN SZYSZKOWSKI (WARSZAWA)

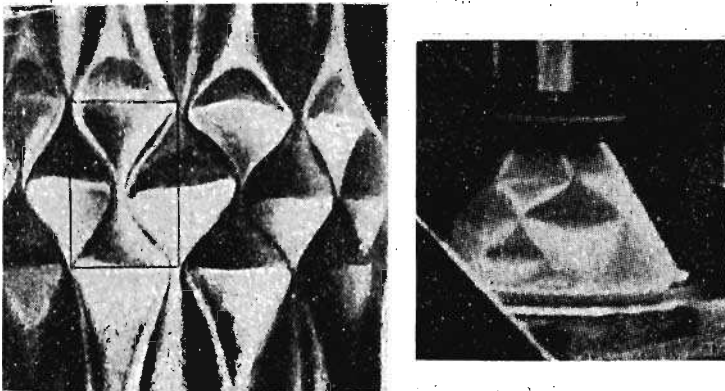
1. Wstęp

Analizę dużych ugięć prowadzi się zwykle na podstawie nieliniowej tzw. technicznej teorii powłok, wykorzystując przy tym metody wariacyjne. Postać ugiętej sprężystości powłoki jest aproksymowana układem funkcji z pewną liczbą wolnych parametrów.

Rozwiązania uzyskane tą drogą są bardzo pracochłonne rachunkowo, a w wielu przypadkach dają dosyć zasadnicze rozbieżności w porównaniu z wynikami prac doświadczalnych. Te rozbieżności przypisuje się przybliżonemu charakterowi stosowanych równań. Obecnie brak jest teorii tak dokładnej, a z drugiej strony nie nazbyt skomplikowanej rachunkowo, która przy obecnym poziomie wiedzy matematycznej, pozwalałaby uzyskać efektywne wyniki. Dlatego szeroko prowadzone są próby innego podejścia do tego typu zagadnień.

Taki nieklasyczny sposób rozwiązania zagadnienia zachowania się powłok walcowych i stożkowych poddanych działaniu osiowych sił ściskających przedstawiony jest w prezentowanej pracy.

Utracie stateczności analizowanych konstrukcji towarzyszy pojawienie się bardzo dużych ugięć, a ich cechą charakterystyczną jest kształt podobny do pokazanego na rys. 1.



Rys. 1

W obydwu przypadkach, po utracie stateczności powierzchnia deformuje się w prawie płaskie trójkątne obszary, połączone wzdłuż powierzchni silnie zakrzywionych. Wiadomo, że dla typowych materiałów konstrukcyjnych dopuszczalne odkształ-

cenie sprężyste jest niewielkie. Przykładowo, dla stali, przy przyjęciu $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm² $R_e = 4 \cdot 10^3$ KG/cm² otrzymujemy $\varepsilon_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}$. Oznacza to, że dopuszczalna sprężysta deformacja powłok charakteryzuje się zmianą metryki powierzchni środkowej mniejszą niż 0,2%. Jeżeli taka deformacja związana jest ze znaczną, tak jak na rys. 1, zmianą postaci powierzchni, to rzeczywista powierzchnia odkształcona musi być bardzo zbliżona do powierzchni przekształconej izometrycznie tzn. otrzymanej tylko przez zginanie i charakteryzującej się niezmiennością pierwszej formy kwadratowej powierzchni. W pracy pokazano, w jaki sposób można analizować zachowanie się powłok, przybliżając rzeczywistą powierzchnię odkształconą, nie układem funkcji, ale pewną klasą powierzchni, tzw. quasi-izometrycznych do powierzchni początkowej.

Ponieważ w ogólnym przypadku nie można zbudować powierzchni odkształconej izometrycznie, która jednocześnie byłaby regularna, jako przybliżenie rzeczywistej powierzchni odkształconej F będziemy przyjmować powierzchnię \bar{F} , która jest izometrycznym przekształceniem powierzchni początkowej, za wyjątkiem pewnego obszaru S , niewielkiego w stosunku do całej powierzchni F .

Obszar jest tak dobrany, że cała powierzchnia \bar{F} zawarta jest w klasie powierzchni regularnych, a więc jest ciągła i ma ciągłą pochodną. Z izometryczności powierzchni $\bar{F}-S$ wynika, że jej krzywizna Gaussa jest równa zero, tak jak krzywizna powierzchni początkowej.

Klasę powierzchni quasi-izometrycznych \bar{F} opisujemy skończoną liczbą parametrów q_1, \dots, q_k . Ich wartości wyznaczono wykorzystując zasadę wariacyjną Lagrange'a, która mówi, że pod działaniem danego konserwatywnego obciążenia zewnętrznego, spośród wszystkich możliwych konfiguracji \bar{F} spełniających warunki brzegowe, powłoka przyjmie taką, dla której funkcjonal $W(\bar{F})$ będzie stacjonarny,

$$W(\bar{F}) = U(\bar{F}) - A_p(\bar{F}),$$

gdzie:

$U(\bar{F})$ — energia deformacji zgromadzona w konstrukcji na wskutek zmiany powierzchni od konfiguracji początkowej F_0 do konfiguracji \bar{F} .

$A_p(\bar{F})$ — odpowiadająca tej zmianie praca sił zewnętrznych p .

Pisząc warunek stacjonarności w postaci

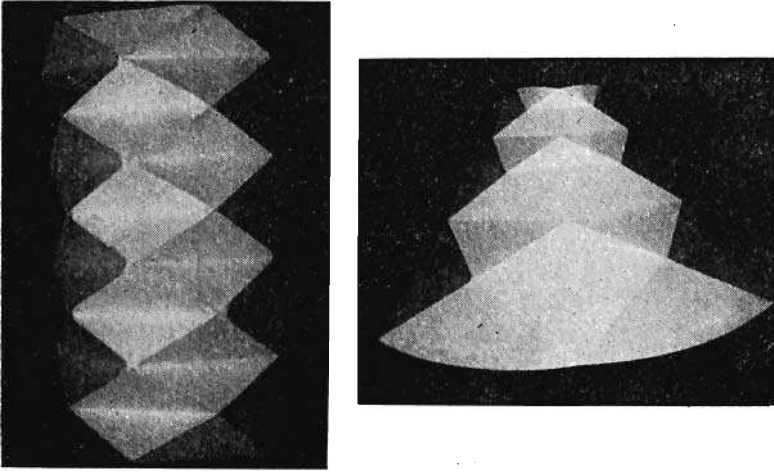
$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_k} = 0,$$

otrzymamy zależności, których odpowiednia analiza pozwala określić zależności między parametrami q_1, \dots, q_k a obciążeniem p .

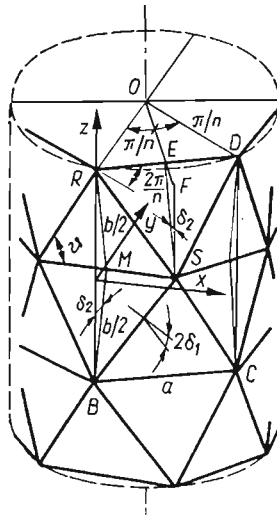
2. Geometria powierzchni zdeformowanej

Model powierzchni izometrycznych, przydatny do symulacji rzeczywistych powłok odkształconych, pokazany jest na rys. 2.

Potrzebne do dalszych rozważań wielkości geometryczne dla powłoki walcowej przedstawiono na rys. 3.



Rys. 2



Rys. 3

Przyjmujemy oznaczenia:

n — liczba elementów romboidalnych na obwodzie, w ujęciu klasycznym odpowiada to liczbie fal w kierunku obwodowym, wtedy $a = \frac{2\pi R}{n}$;

$\lambda = \frac{a}{b}$ — stosunek szerokości elementu romboidalnego do jego wysokości;

$2\delta_1$ — kąt płaski między płaszczyznami trójkątów, mierzony wzdłuż krawędzi ukośnych;

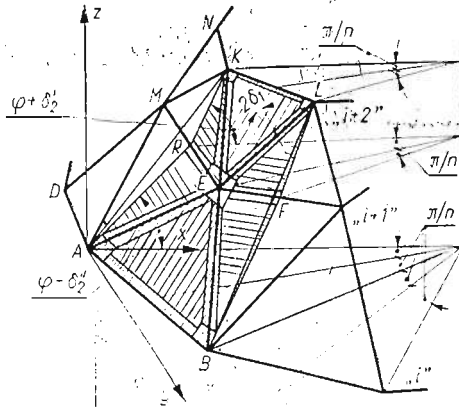
$2\delta_2$ — kąt płaski między płaszczyznami trójkątów, mierzony wzdłuż krawędzi poziomych.

Po elementarnych wyprowadzeniach otrzymamy:

$$(2) \quad \sin \delta_2 = \lambda \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n},$$

$$\cos 2\delta_1 = \frac{1 - (1 + 2\lambda^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}.$$

Dla powłoki stożkowej model obliczeniowy pokazano na rys. 4.



Rys. 4

W tym przypadku zależności geometryczne mają bardziej złożoną postać i są następujące:

$$\cos(\varphi - \delta_2'') = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{n}} \frac{A - \cos \frac{\pi}{n}}{A - \cos \alpha},$$

$$(3) \quad \cos(\varphi + \delta_2') = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{n}} \frac{A \cos \frac{\pi}{n} - 1}{A \cos \alpha - 1},$$

$$\cos 2\delta_1 = \frac{1 - \frac{\lambda d}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cos(\varphi - \delta_2'')}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} [\sin^2(\varphi - \delta_2'') + \left(\frac{\lambda d}{2}\right)^2 - \lambda_d \cos(\varphi - \delta_2'') \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}]}}.$$

gdzie oznaczono:

φ — kąt między tworzącą a podstawą stożka niezdeformowanego,

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \cos \varphi,$$

$$A = \frac{\sin \alpha}{\lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda}\right)^2},$$

$$\lambda_d = \frac{2 \sin \alpha}{A - \cos \alpha}.$$

Warto zauważyć, że poszczególne wartości kątów nie zależą od położenia elementu obliczeniowego względem tworzącej. Wynika to z przyjęcia pewnych geometrycznych założeń, wyjaśnionych dokładnie w [6].

Między innymi, wysokości poszczególnych segmentów romboidalnych, mierzone wzdłuż ścianki są następujące

$$b_i = \frac{R}{\cos \varphi} e^{-i \frac{b \cos \alpha}{2R}} \left(1 - e^{-i \frac{b \cos \alpha}{R}}\right),$$

gdzie: R — promień dolnej podstawy stożka,

b — wysokość elementu romboidalnego dla modelu powłoki walcowej,

i — kolejny poziom licząc od podstawy.

Łatwo przekonać się, że wzory (3) przyjmują postać (2), jeżeli $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (powłoka walcowa), natomiast model z rys. 4 przechodzi w model pokazany na rys. 3.

W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko modelem powłoki stożkowej. Wszystkie zależności dotyczące modelu powłoki walcowej otrzymuje się przy $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Warto zauważyć, że dla wartości

$$\lambda_{gr} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

model «składa się» tak, że jego wysokość staje się równa zero. Narzuca to ograniczenie na wartość λ w postaci

$$\lambda < \lambda_{gr}.$$

Ostatecznie, z przedstawionych rozważań wynika, że taka czysto izometrycznie odkształcona powłoka opisywana jest za pomocą dwóch parametrów λ i n .

Następnym etapem jest zastąpienie krawędzi, wzdłuż których łączą się płaszczyzny trójkątne, powierzchniami silnie zakrzywionymi o bardzo małej, ale skończonej szerokości. W tym przypadku przyjęto je w postaci wycinków powierzchni stożkowych. Obszary te będziemy nazywać żebrami. Ich kształt dla i -tego elementu pokazuje rys. 5.

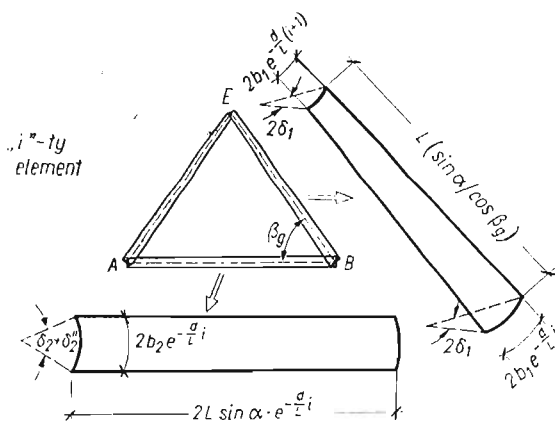
Wprowadzono oznaczenia:

b_1 — szerokość żebra ukośnego, mierzona przy podstawie dla poziomu $i = 0$ (przy dolnej podstawie stożka),

b_2 — szerokość żebra poziomego dla poziomu $i = 0$,

$$e^{\frac{d}{L}} = A,$$

$$L = \frac{R}{\cos \varphi}.$$



Rys. 5

Dla modelu odpowiadającego powłoce walcowej żebro ukośne będzie miało stałą szerokość (patrz np. [4]).

Przyjmijmy bezwymiarowe wielkości charakterystyczne, będące stosunkiem największej szerokości żebrow do ich długości, to znaczy:

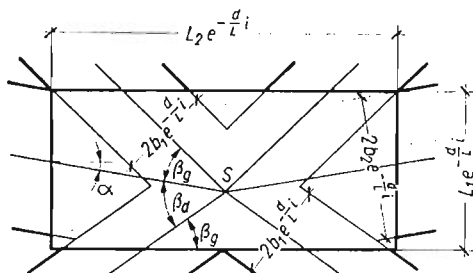
$$\mu_1 = \frac{2b_1}{L \sin \alpha \cos \beta_g}; \quad \mu_2 = \frac{2b_2}{L \sin \alpha}.$$

Okazuje się, że te wielkości są bardzo sobie bliskie (patrz [6]) tak, że nie popełniając dużego błędu można przyjąć

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{2b_1 \cos \varphi}{R \sin \alpha} \cos \beta.$$

W ten sposób otrzymujemy trzeci parametr charakteryzujący zdeformowaną powierzchnię.

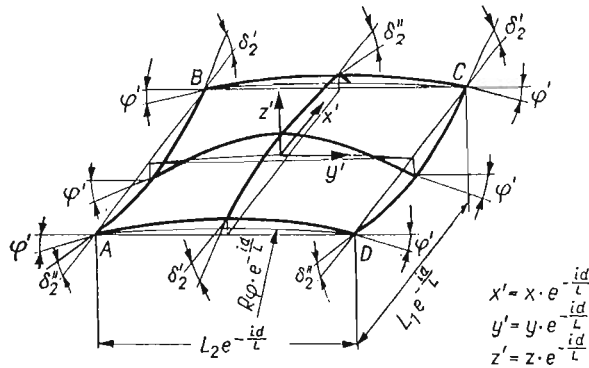
Otoczenie punktu powstałego z przecięcia się teoretycznych linii żebrow (rys. 6) będziemy nazywali wierzchołkiem.



Rys. 6

W obszarze wierzchołka, fragmenty płaskich trójkątów i stożkowych żebrow, a więc elementy o powierzchni rozwijalnej, muszą się tak do siebie dopasować, aby cała powierzchnia była powierzchnią regularną. Oczywiście, w obszarze wierzchołka powierzchnia musi mieć krzywiznę Gaussa różną od zera, a więc nie jest ona izometrycznym przekształ-

ceniem powierzchni początkowej i nie można jej otrzymać przez czyste zginanie. Przyjęto, że obszarem tym jest prostokąt o wymiarach podanych na rys. 6. Wielkości L_1 i L_2 można obliczyć, po elementarnych przekształceniach, jako funkcje parametrów λ , n i μ . Charakter ugięcia pokazany jest na rys. 7.



Rys. 7

Wzdłuż boków AB i DC wierzchołek łączy się z żebrami poziomymi, a wzdłuż AD i BC z parami żeber ukośnych. Stąd wynikają wartości kątów podane na rysunku.

Analityczną postać ugięcia przyjęto w postaci

$$(4) \quad w = A \sin \frac{2\pi x}{L_1} + B \cos \frac{\pi x}{L_1} \cos \frac{2\pi y}{L_2} + C \cos \frac{\pi y}{L_2},$$

gdzie:

$$A = \frac{L_1}{2\pi} (\operatorname{tg} \delta_2'' - \operatorname{tg} \delta_2') e^{\frac{-id}{L}},$$

$$B = \frac{L_2}{2\pi} (\operatorname{tg} \delta_2'' + \operatorname{tg} \delta_2') e^{\frac{-id}{L}},$$

$$C = \frac{L_2}{\pi} \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\sin \varphi - \sin \frac{\pi}{n} \right) - \frac{2\mu \sin \alpha}{\sin 2\beta_g} \operatorname{tg} \varphi \right] e^{\frac{-id}{L}}.$$

Funkcja ta spełnia geometryczne warunki brzegowe, narzucone na wielkości kątów obrotów krawędzi w narożach płyty i w środkach boków.

Do spełnienia pozostają jeszcze warunki zgodności w płaszczyźnie prostokąta, takie aby pasował on do pozostałych elementów. Wobec skomplikowanego kształtu krawędzi wierzchołka warunki tak sformułowane są zbyt kłopotliwe, możliwe jest natomiast inne podejście. Powierzchnia otaczająca obszar wierzchołka jest powierzchnią izometrycznie przekształconą bez odkształceń powierzchni środkowej, a więc też bez dodatkowych naprężeń błonowych. Te naprężenia, będące wynikiem zmiany pierwszej formy kwadratowej powierzchni pojawią się tylko w obszarze wierzchołka. Ich wartości wyznaczymy z jednego z równań teorii powłok, traktując wierzchołek, jako powłokę małą wyniosłą.

$$(5) \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k w,$$

gdzie Φ — klasyczna funkcja naprężeń.

Warunkami brzegowymi dla funkcji Φ będzie znikanie naprężeń na brzegu. Prawa strona równania (5), po podstawieniu zależności (4), jest znaną funkcją współrzędnych lokalnych wierzchołka i parametrów λ , n , i μ .

Równanie (5) rozwiązano numerycznie za pomocą metody różnic skończonych, otrzymując, dla danych parametrów geometrycznych, wartości Φ w danych punktach wierzchołka. Szczegóły obliczeń podano w [6].

3. Energia wewnętrzna

Mając określoną powierzchnię aproksymującą, przystępujemy do obliczenia związanej z nią energii sprężystej. Obliczymy energię przypadającą na jeden «segment» oznaczony na rys. 4 literami *ABLK*. Wzdłuż obwodu powłoki jest n takich elementów. Bardzo ważną własnością modelu z rys. 4 jest to, że energia zgromadzona w elemencie nie zależy od jego położenia wzdłuż tworzącej. Dowód tego znajduje się w pracy [6]. Wobec tego, do obliczenia energii zgromadzonej w całym modelu wystarczy znaleźć energię związaną z jednym elementem i pomnożyć ją przez liczbę elementów. W obszarach, w których krzywizna Gaussa jest równa zero, energia ta będzie wynikiem tylko zginania. Obliczymy ją ze wzoru

$$(6) \quad \Delta U = \frac{D}{2} \int \int_S [(\Delta \kappa_i)^2 + (\Delta \kappa_j)^2 + 2\nu (\Delta \kappa_i) (\Delta \kappa_j) + 2(1-\nu) (\Delta \kappa_{ij})^2] dS,$$

gdzie S — pole powierzchni izometrycznych, $\Delta \kappa_i$, $\Delta \kappa_j$, $\Delta \kappa_{ij}$ — zmiany krzywizny w układzie ortogonalnym (i, j) ; przy czym zmiany krzywizny liczymy w sposób ścisły jako różnicę krzywizny powierzchni początkowej i krzywizny powierzchni zdeformowanej. Jako przykład podamy obliczenie energii dla elementu trójkątnego powłoki walcowej. Jeżeli przyjąć kierunek x wzdłuż tworzącej, to

$$\Delta \kappa_x = 0 - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R}, \quad \Delta \kappa_y = \Delta \kappa_{xy} = 0,$$

wtedy

$$\Delta U_p = \frac{D}{2} \frac{ab-F}{R^2},$$

gdzie F — pole powierzchni żeber i wierzchołków w jednym segmencie obliczeniowym.

Wprowadzając współczynniki bezwymiarowe, otrzymamy

$$\Delta U_p = D \cdot \frac{2\pi^2}{\lambda n^2} \left\{ 1 - \mu \frac{1+3\lambda^2}{2\lambda} + 2\mu^2(1+\lambda^2) \right\}.$$

Dla powłoki stożkowej otrzymuje się wyrażenie nieco dłuższe

$$\Delta U_p = D \frac{2\pi}{n} \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \ln \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} \right)^2} \right) \cdot (1-B),$$

gdzie

$$B = \frac{-\mu}{\cos \alpha} \left[\sin \alpha + \frac{A \cos \alpha - 1}{A \sin 2\beta_g} \right] \frac{A^2 + 1}{A^2 + A} - \mu^2 (\lambda^2 + \sin^2 \alpha + 1) \frac{A+1}{A}.$$

Dla obszaru wierzchołka wykorzystać można uproszczone klasyczne wzory na zmianę krzywizny w postaci

$$\Delta \kappa_j = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}; \quad \Delta \kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j},$$

gdzie w miejsce w podstawić należy funkcję (4).

Energję błonową zgromadzoną w wierzchołku obliczamy ze wzoru

$$(7) \quad \Delta U_b = \frac{h}{2E} \iint_F [(\nabla^2 \Phi)^2 - (1+\nu) L(\Phi, \Phi)] dF,$$

gdzie funkcję Φ wyznaczono z równania (5). Wzór ostatni można przekształcić do postaci

$$\Delta U_b = 6D(1-\nu^2) \left(\frac{R}{h}\right)^2 \cdot \frac{L_1 L_2}{R^2} I_s(\lambda, n, \mu, \varphi).$$

Funkcję I_s wyznaczono w sposób przybliżony aproksymując wyniki obliczeń numerycznych. Ma ona postać

$$I_s = \left(\frac{\pi}{n} \sin \varphi\right)^4 \left(\frac{1}{\lambda^2} + 275\lambda^2 - 790\lambda + 691 + \frac{\lambda^8}{8}\right) \left(1 + \frac{16,6 \sqrt{\lambda}}{n^2}\right) \times \\ \times \left[\frac{1-6\mu(0.775-\mu)}{(\lambda-1)^2+1}\right] \left[1 + 0.12 \left(\frac{\pi}{n\lambda} \cos \varphi\right)^2\right].$$

Błąd aproksymacji, w szerokim zakresie zmienności parametrów n , λ , μ i φ , nie przekraczał 5%. Szczegóły obliczeń można znaleźć w [6].

Pracę sił zewnętrznych wyznaczono jako iloczyn siły osiowej przez zmianę wysokości całej powłoki, łatwą do wyliczenia przy znanej geometrii deformacji. Przedstawia się ona następująco:

$$(8) \quad A_p = 2\pi R^2 h \sigma_0 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \frac{1+A}{A} \left\{ \frac{A-1}{A} \sin \varphi - \left(\cos \alpha - \frac{1}{A}\right) \sin(\varphi + \delta'_2) - \right. \\ \left. - \mu \sin \alpha \sin \varphi \cdot \frac{A+1}{A} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta'_2 + \delta''_2}{2}}{\frac{\delta'_2 + \delta''_2}{2}} - 1\right) \right\} \frac{A^2 - A^{2(1-m)}}{A^2 - 1},$$

gdzie: m — liczba segmentów wzdłuż tworzącej, σ_0 — średnie naprężenia ściskające w kierunku tworzącej.

4. Analiza numeryczna

Otrzymaliśmy w ten sposób obydwie człony funkcjonau energii W jako funkcje parametrów λ , n i μ .

Warunki (1) zapiszą się teraz w postaci

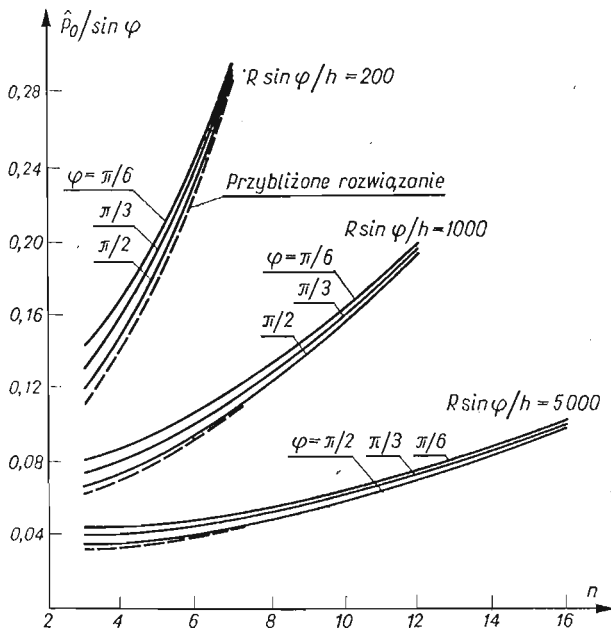
$$(9) \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0;$$

Te trzy równania, po wykonaniu różniczkowania, przedstawiają układ trzech nieliniowych równań algebraicznych, wiążących pięć wielkości bezwymiarowych n , λ , μ , $\frac{\sigma_0 R}{Eh}$, $\frac{R}{h} \sin \varphi$. W obliczeniach układ (9) praktyczniej jest doprowadzić do postaci

$$(10) \quad \begin{aligned} F_1\left(n, \mu, \lambda, \frac{R}{h}\right) &= 0, \\ F_2\left(n, \mu, \lambda, \frac{R}{h}\right) &= 0, \\ \hat{p}_0 &= \frac{\sigma_0 R}{Eh} = f\left(\mu, n, \lambda, \frac{R}{h}\right), \end{aligned}$$

która pozwala, przy zadanej wartości $\frac{R}{h}$ i φ , wyznaczyć \hat{p}_0 jako funkcję jednego z parametrów geometrycznych n , μ , λ .

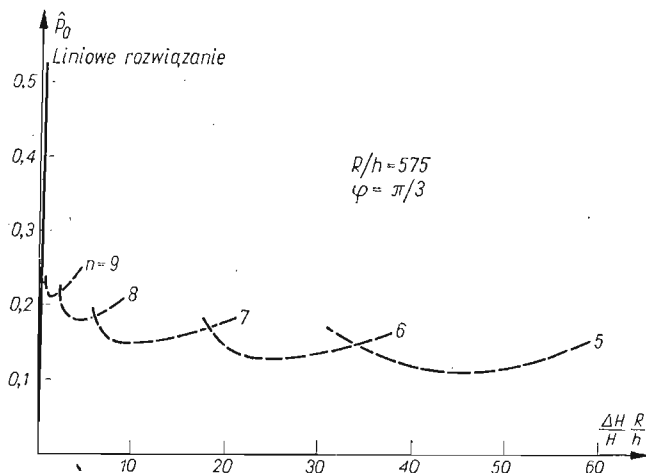
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla kolejnych wartości $n \geq 3$. Przykład uzyskanych zależności pokazuje rys. 8.



Rys. 8

Okazało się, że przy danej wartości $\frac{R}{h} \sin \varphi$ istnieje pewna maksymalna wartość $n = n_{\max}$, dla której układ (10) ma jeszcze rozwiązanie. Oznacza to, że niemożliwa jest stateczna konfiguracja powierzchni dla $n > n_{\max}$. Siłę odpowiadającą wartości $n = n_{\max}$ oznaczono \hat{p}_N . W dalszej części pokażemy, że ma ona istotne znaczenie w teorii stateczności sprężystej powłok.

Inny wariant obliczeń wykonano odrzucając trzeci z warunków (9). Rys. 9 pokazuje obliczone zależności dla jednej zadanej wartości $\frac{R}{h} \sin \varphi = 500$; $\frac{\Delta H}{H}$ jest względną zmianą wysokości powłoki.



Rys. 9

Wykres ten pokazuje przebieg procesu deformacji powłoki. Najbardziej na lewo, prawie pionowa linia odpowiada procesowi w zakresie małych odkształceń przed utratą stateczności. Po przekroczeniu obciążeń krytycznych, powierzchnia powłoki gwałtownie faluje się, przy jednoczesnym gwałtownym spadku obciążenia. Liczba fal w kierunku obwodowym spada do wartości odpowiadającej pierwszej statecznej postaci (n_{\max}), przy dalszym wzroście skrócenia następuje przeskok na następną stateczną postać z liczbą fal o jeden mniejszą, itd. W badaniach eksperymentalnych jako wartość tzw. dolnego obciążenia krytycznego podaje się zwykle wartość, do której zmniejsza się obciążenie w momencie utraty stateczności formy pierwotnej (np. [7], [8], [9]).

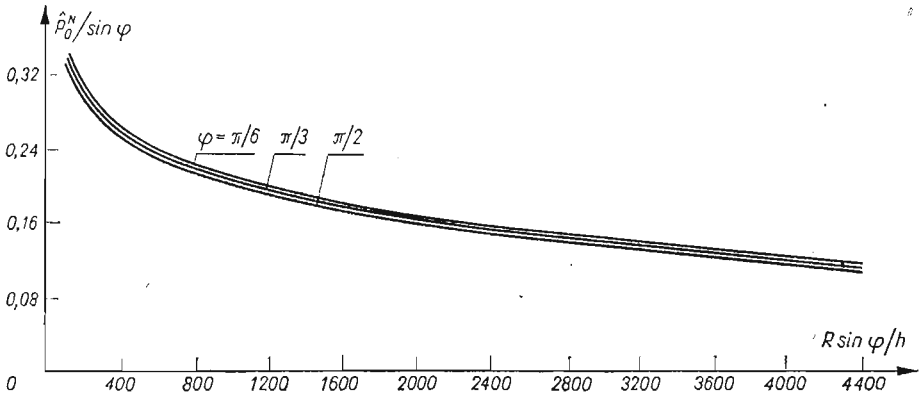
W przedstawionych rozważaniach jej odpowiednikiem jest więc wartość \hat{p}_0^N . Na rys. 10 pokazano jej zależność w funkcji $\frac{R}{h} \sin \varphi$.

Zwraca się uwagę na następujące fakty:

1. Krzywe dla różnych φ praktycznie pokrywają się. Wskazuje to na możliwość przeliczenia wyników badań uzyskanych dla powłok walcowych na dowolne powłoki stożkowe. Ten wniosek był wysuwany przez wielu autorów prac eksperymentalnych (np. [9]), nie został jednak dotąd właściwie teoretycznie udokumentowany.

2. W porównaniu z wynikami badań doświadczalnych, szczególnie licznych dla powłok walcowych ([7, 9, 12]), krzywa z wykresu 10 wykazuje zadowalającą zgodność.

3. Rozwiązania klasyczne (za pomocą równań technicznej teorii powłok) jako wartości współczynnika dolnego obciążenia krytycznego podają zawsze wartość stałą, niezależną od stosunku R/h , natomiast bardzo czułą na postać funkcji aproksymującej. Jest to jedną z istotniejszych wad tych rozwiązań.



Rys. 10

Kilka ciekawych wniosków można uzyskać zakładając, że liczba fal jest stosunkowo duża, tak że zależności (3) można uprościć do postaci

$$(11) \quad \delta'_2 \cong \delta''_2 \cong \frac{\lambda}{2} \frac{\pi}{n} \sin \varphi,$$

$$\delta_1 \cong \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2} \frac{\pi}{n} \sin \varphi.$$

Natomiast funkcjonal energii da się zapisać następująco

$$(12) \quad W = D \sqrt{\eta \frac{h}{R}} (\bar{A} + \eta^2 \bar{B} - \eta \hat{p}_0 \bar{C}) \sin^{3/2} \varphi,$$

gdzie $\eta = \frac{R \sin \varphi}{h} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 = \eta_s \sin \varphi,$

$$\hat{p}_s = \frac{\sigma_0}{E} \frac{R}{h \sin \varphi} = \hat{p}_0 \frac{1}{\sin \varphi},$$

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ — funkcje tylko λ i μ .

Warunek stacjonarności funkcjonału W wyraża się teraz zależnościami

$$(13) \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \mu} = 0,$$

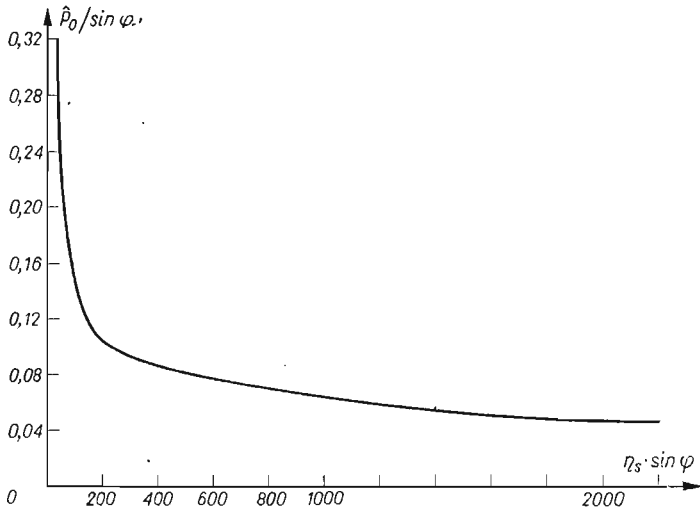
Ich numeryczna analiza daje zależność pokazaną na rys. 11.

Jeżeli przez P oznaczymy całkowitą siłę osiową ściskającą, to dla powłoki walcowej

$$\hat{p}_0^{(w)} = \frac{\sigma_0^{(w)} R_w}{E h_w} = \frac{P}{2\pi E h_w^2},$$

dla powłoki stożkowejj

$$\hat{p}_0^{(s)} = \frac{\sigma_0^{(s)} R_s}{E h_s} = \frac{P}{2\pi E h_s^2 \sin \varphi}.$$



Rys. 11

Ponieważ z wykresu 11 wynika

$$\hat{p}_0^{(w)} \left(\frac{R \sin \varphi}{h} \right) = \frac{\hat{p}_0^{(s)} \left(\frac{R \sin \varphi}{h} \right)}{\sin \varphi},$$

stąd

$$(14) \quad P = 2\pi E h^2 \sin^2 \varphi \hat{p}_0^{(w)} \left(\frac{R \sin \varphi}{h} \right).$$

Wzór (14) pokazuje w jaki sposób wykorzystać zależność opisującą powłokę walcową do obliczenia siły przenoszonej przez dowolną powłokę stożkową. Mianowicie w miejsce argumentu R_w/h_w należy przyjąć $R_s \sin \varphi/h_s$, gdzie R_w i h_w oznaczają promień i grubość ścianki walca, natomiast R_s i h_s są odpowiednio promieniem dolnej podstawy i grubością ścianki stożka.

Parametr η w przypadku powłoki walcowej można interpretować jako wielkość charakteryzującą ugięcie. Wynika to z analizy przekroju ugiętej powłoki (rys. 12). Otrzymujemy wtedy następujące zależności:

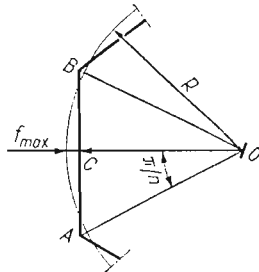
$$f_{max} \cong R \left(1 - \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right) \approx \frac{R}{3} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2.$$

Wprowadzając bezwymiarowy parametr ugięcia ξ mamy

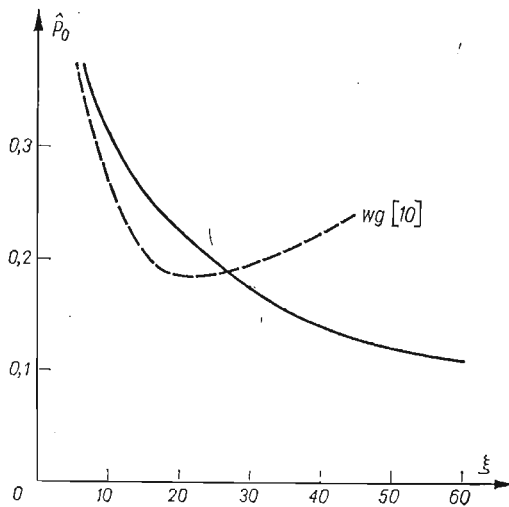
$$(15) \quad \xi = \frac{f_{max}}{h} = \frac{1}{3} \frac{R}{h} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 = \frac{\eta}{3}.$$

Wykorzystując wykres na rys. 11 i zależności (15) otrzymujemy zależność pokazaną na rys. 13.

Linia przerywaną narysowano zależność podaną w pracy [10], a uzyskaną drogą klasyczną. Weryfikacja doświadczalna (np. [7]) przemawia za linią wyzyskaną w prezentowanej pracy.



Rys. 12



Rys. 13

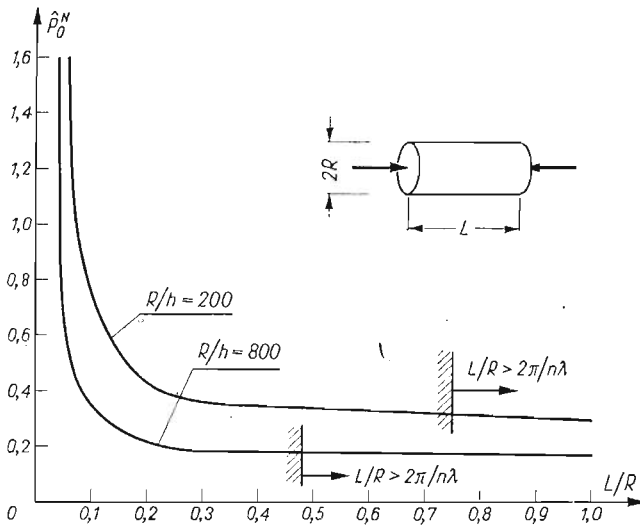
Z przedstawionego wykresu wynika, że stosowanie równań technicznej teorii powłok daje jednakowo poprawne wyniki tylko dla ugięć nie przekraczających około 20 -krotnie grubości powłoki.

5. Uwagi końcowe

Przedstawiona tu analiza dużych ugięć powłok, polegająca na aproksymowaniu zdeformowanej konstrukcji układem odpowiednich powierzchni quasiizometrycznych, pozwoliła na uzyskanie wielu rezultatów znanych z badań doświadczalnych, a których nie można było otrzymać z analizy nieliniowych równań teorii powłok.

Zasadniczą zaletą analizy jest możliwość rozważania zagadnień bez ograniczeń dotyczących wielkości przemieszczeń, co czyni ją bardzo użyteczną w tych przypadkach, gdzie ugięcia są na tyle duże, że znane równania teorii powłok nie są w stanie właściwie opisać problemu.

W prezentowanej pracy nie mówi się o warunkach brzegowych. Jak wykazują liczne badania (np. [13]), wpływają one zasadniczo na zachowanie się powłoki w zakresie małych odkształceń (zmieniają tzw. górną siłę krytyczną), natomiast przy dużych ugięciach (takich, jak rozpatrywane w pracy) wpływ ten jest znacznie mniejszy. Należy przy tym podkreślić, że jest on duży tylko dla przypadków praktycznie nie realizujących się w rozwiązaniach konstrukcyjnych. Natomiast w pozostałych, wpływ ten wraz ze wzrostem długości powłoki zanika bardzo szybko. Dla przykładu na rys. 14 pokazano zależności między dolną siłą krytyczną a długością powłoki walcowej L , uzyskane na drodze doświadczalnej [9].



Rys. 14

W pracy [6] wykazano, że wpływ długości tworzącej powłoki jest do pominięcia, jeżeli tylko «mieści się» tam jeden rząd pofalowań o parametrach, które można wyznaczyć na podstawie prezentowanej analizy. Ogranicza to klasę rozpatrywanych powłok do takich, które spełniają warunek

$$(16) \quad \frac{L_s}{R} \geq \frac{1 - \frac{1}{\left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}}\right)^2}}{\cos \varphi},$$

gdzie: L — długość tworzącej, α , λ — wielkości charakteryzujące deformację powłoki o danych parametrach.

Для повло́к вальцовых варунке́т те́т упрас́ча се́ до по́ста́и

$$\frac{L}{R} \geq \frac{2\pi}{n\lambda}$$

Варто́сти гра́ни́чные для $R/h = 200$ и $R/h = 800$ за́ста́ли на рис. 14 за́зна́ча́ные ли́ни́ями пи́оно́выми. Ви́да́т, же́ на пра́во от ты́х ли́ни́и ва́рто́сти о́бца́же́н са́ пра́кты́чно ста́ле не́за́ви́сно от ду́го́сти по́вло́ки.

И́не о́гра́ни́че́ние вы́ника́ет зе́ ско́нчи́ной спрэ́жы́сто́сти ма́тери́алу. Пе́вны́е вы́ники́ всте́пных ро́зва́жа́н пра́едста́ви́но в [5]. Спра́вжда́ю́т се́ о́не до вы́зна́че́ния до́пу́сца́льней ми́ни́мальной ли́чбы́ фа́л n_{\min} , пра́и ќто́ре́й ко́нчи́т се́ пра́о́с де́форма́ци́ чы́сто спрэ́жы́сте́й. Да́лше́ скра́ча́ние се́ по́вло́ки мо́жли́ве́ же́ст ты́лко пра́впре́з по́явля́ние се́ пра́егу́бо́в пла́сты́чных твора́ю́щих се́ вздлу́ж зе́бер ге́ома́тры́чных.

Литература цитована в текście

1. N. J. HOFF, W. A. MADSEN, J. MAYERS, *Post-buckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells*, AJAA Journ., **14** (1966) 126 - 133.
2. Y. YOSHIMURA, *On the mechanism of buckling of circular cylindrical shell under axial compression*, Repts. Inst. Sci. and Tech. Univ. Tokyo, **5** (1951).
3. A. P. COPPA, *Inextensional buckling configurations of conical shells*, AJAA Journ., **4** (1967) 913 - 920.
4. W. SZYSZKOWSKI, *Geometrical analysis of the post-buckling behaviour of thin cylindrical and conical shells under axial compression*, Arch. Bud. Masz., **1** (1975) 3 - 26.
5. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *Metody geometryczne w nieliniowej teorii powłok*, Mat. Symp. Konstr. Powł., Kraków 1974.
6. W. SZYSZKOWSKI, *Stateczność powłok obrotowych w ujęciu geometrycznym*, Praca doktorska, Polit. Warszawska, 1973.
7. R. L. DE NEUFVILLE, *Influence of geometry on the number of buckles in cylinder*, AJAA Journ., **2** (1965) 364 - 365.
8. R. L. DE NEUFVILLE, I. I. CONNOR, *Post-buckling behaviour of thin cylinders*, J. Eng. Mech. Div., 1968, EM 2, 585 - 603.
9. V. I. WEINGARTEN, E. I. MORGAN, P. SEIDE, *Elastic stability of thin walled cylindrical and conical shells under axial compression*, AJAA Journ., **5** (1965) 913 - 920.
10. P. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
11. А. В. Погорелов, *Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек*, Москва 1967.
12. Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов, *Устойчивость круговых цилиндрических оболочек*, Итоги Науки, Москва 1967.
13. В. О. АЛМРОТН, *Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells*, AJAA Journ., **1** (1965), 134 - 140.

Резюме

РАСЧЕТ СЖИМАЕМЫХ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

В ра́бо́те пра́едста́влен а́нали́з изотро́пных ци́линдри́ческих и ко́ни́ческих обо́ло́чек, подве́ргнутых осе́вому́ сжа́тию. В о́снову́ ме́то́да́ взят ва́риа́цио́нный пра́инци́п Ла́гранжа́, в ко́тором и́спо́льзова́но ки́нема́ти́чески до́пу́сти́мое по́ле пе́реме́ще́ний. Для о́преде́ления́ это́го по́ля и́спо́льзова́ны сво́йства́ ква́зи-изо́метри́чной тра́нсформа́ци́ по́верхности́. Это́ позво́ли́ло́ ре́ши́ть за́дачу́ бе́з о́гра́ни́че́ний о́тно́сительно́ ве́личи́ны пе́реме́ще́ний.

Summary

ANALYSIS OF LARGE ELASTIC DEFLECTIONS OF AXIALLY
COMPRESSED CYLINDRICAL AND CONICAL SHELLS

The paper presents an analysis of the post-buckling behaviour of isotropic cylindrical and conical shells subject to axial compression.

The starting point of the paper is the Lagrange variational principle, the application of which consists in assuming a kinematically admissible strain and displacement fields. The fields are determined by considering the geometry of quasi-isometric deformations of the shell after buckling. That enables us to solve the problem with no limitation on the magnitude of the displacements.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1976 r.
