MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 15 (1977)

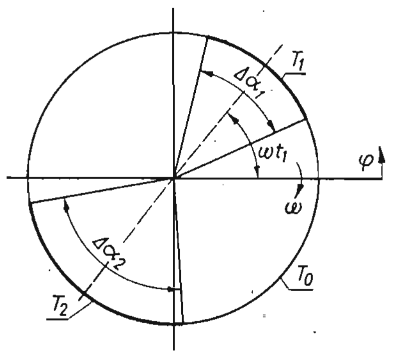
NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W WIRUJĄCYM WALCU KOŁOWYM OGRZEWANYM NIEOSIOWOSYMETRYCZNIE NA POBOCZNICY*)

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

W pracy rozważa się pole naprężeń w obracającym się ze stałą prędkością kątową ω, nieskończenie długim walcu kołowym, którego pobocznica poddana jest działaniu odcinkami stałej temperatury, będącej funkcją kąta opasania (rys. 1). Zagadnienie rozpatrywane jest w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z, sztywno związanym z walcem. Wewnątrz walca panuje płaski stan odkształcenia; temperatura, przemieszczenia i naprężenia są zatem funkcjami zmiennych przestrzennych r, φ oraz czasu t.

Ponieważ zagadnienie rozpatrywane jest w układzie współrzędnych sztywno związanym z walcem, w równaniach ruchu dodaje się człon uwzględniający siłę odśrodkową. Pomija się natomiast siłę ciężkości. Zagadnienie to rozważane jest na gruncie teorii naprężeń cieplnych. Zakłada się, że w chwili początkowej temperatura walca była równa T_0.



Rys. 1. Rozkład temperatury na brzegu walca w chwili $t_1 > 0$

Ponadto przyjmuje się, że pobocznica walca jest wolna od obciążeń. Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym walca, wywołany przytoczonym zespołem warunków, wyznaczony został w pracy [1]. W tej pracy wyznaczono dla rozważanego walca pole naprężeń cieplnych, jakie powstaje podczas tzw. regularnego reżimu cieplnego [por. 1, 11, 12].

---

*) Praca nagrodzona III nagrodą na konkursie naukowym na prace teoretyczne z mechaniki, organizowanym przez Oddział PTMTS w Poznaniu w 1976 r.

2. Podstawowe związki i metoda rozwiązania zagadnienia

Punktem wyjścia są równania ruchu [2]:

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}+X_r=\varrho_0\ddot{u}_r, \\ \dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{2\sigma_{r\varphi}}{r}+X_\varphi=\varrho_0\ddot{u}_\varphi, \end{cases}
$$

z warunkami brzegowymi dla $r = a$

$$
(2)\qquad \begin{cases} \sigma_{rr}(a,\varphi,t)=0, \\ \sigma_{r\varphi}(a,\varphi,t)=0. \end{cases}
$$

Tutaj u_r, u_φ oznaczają współrzędne wektora przemieszczenia, $\sigma_{\alpha\beta}$ — współrzędne tensora naprężenia (α, β mogą przyjmować wartości r, φ, z), X_r, X_φ — siły masowe, ϱ_0 — gęstość, a — promień walca, $(\dot{\ })\equiv\dfrac{\partial(\ )}{\partial t}$.

Powyższe zagadnienie brzegowe można — wykorzystując związki Duhamela-Neumanna dla płaskiego stanu odkształcenia [2]:

$$
(3)\qquad \begin{cases} \sigma_{rr}=(\lambda+2\mu)\,\varepsilon_{rr}+\lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}-\gamma\theta, \qquad \sigma_{r\varphi}=2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}=(\lambda+2\mu)\,\varepsilon_{\varphi\varphi}+\lambda\varepsilon_{rr}-\gamma\theta, \\ \sigma_{zz}=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi})-\dfrac{\mu\gamma}{\lambda+\mu}\theta \end{cases}
$$

oraz związki pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami [2]:

$$
(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{rr}=\dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{r\varphi}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\dfrac{u_\varphi}{r}\right) \end{cases}
$$

— sformułować w języku przemieszczeń. Przyjmując ponadto, że $X_r=\varrho_0 r\omega^2$, $X_\varphi=0$, otrzymuje się następującą postać zagadnienia (1) - (2):

$$
(1')\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right]+\mu\left[\nabla^2 u_r-\dfrac{1}{r^2}\left(u_r+2\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]+ \\ \qquad\qquad +\varrho_0 r\omega^2=\varrho_0\ddot{u}_r+\gamma\dfrac{\partial\theta}{\partial r}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right]+\mu\left[\nabla^2 u_\varphi-\dfrac{1}{r^2}\left(u_\varphi-2\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right)\right]=\varrho_0\ddot{u}_\varphi+\dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \end{cases}
$$

$$
(2')\qquad \begin{cases} \left.(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{u_r}{r}\right)\right|_{r=a}=\gamma\theta(a,\varphi,t), \\ \left.\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\dfrac{u_\varphi}{r}\right|_{r=a}=0, \end{cases}
$$

gdzie λ, μ oznaczają stałe Lamégo, $\gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha_t$, α_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej, θ — temperaturę;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Dodanie do związków (1'), (2'), warunków początkowych dla naprężeń lub przemieszczeń zakończyłoby formułowanie zagadnienia dynamicznego. Jednakże przy rozwiązywaniu tego zagadnienia otrzymuje się niesłychanie skomplikowane transformaty Laplace'a potencjałów termosprężystego przemieszczenia [11], których odwrócenie jest bardzo trudne nawet przy zastosowaniu metod przybliżonych.

W celu ominięcia tych trudności w dalszych rozważaniach dokonuje się uproszczeń, wykorzystując pewne własności funkcji $\theta(r, \varphi, t)$, określającej w rozważanym przypadku pole temperatury.

Jak wspomniano we wprowadzeniu, funkcja ta została wyznaczona w pracy [1] i jest określona następująco:

$$\theta(r, \varphi, t) = t_0(r, t)+\sum_{n=1}^{\infty}[t_n^c(r, t)\cos n(\varphi-\omega t)+t_n^s(r, t)\sin n(\varphi-\omega t)], \tag{5}$$

gdzie (por. [1])

$$\left\{\begin{aligned} t_0(r, t) &= t_{0a}\left[1-\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(rs_{0i})}{s_{0i}J_1(as_{0i})}e^{-s_{0i}^2\varkappa t}\right],\\ t_n^c(r, t) &= \frac{2}{a}t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\delta_{ni}\frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni}J_n'(as_{ni})}\{e^{-s_{ni}^2\varkappa t}\cos[n\omega t+\delta_{ni}]-\cos\delta_{ni}\},\\ t_n^s(r, t) &= -\frac{2}{a}t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\delta_{ni}\frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni}J_n'(as_{ni})}\{e^{-s_{ni}^2\varkappa t}\sin[n\omega t+\delta_{ni}]-\sin\delta_{ni}\}.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

W związkach (5) i (6) oznaczono:

$t_{0a} = \frac{1}{2\pi}(\theta_1\Delta\alpha_1+\theta_2\Delta\alpha_2)$, $t_{na} = \frac{2}{\pi n}\left[\theta_1\sin\frac{n\Delta\alpha_1}{2}+\theta_2(-1)^n\sin\frac{n\Delta\alpha_2}{2}\right]$, $\theta_1 = T_1-T_0$, $\theta_2 = T_2-T_0$, $\theta = T-T_0$; (por. rys. 1), $J_n(z)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju n-tego rzędu [3, 4], s_{ni} — pierwiastki równania $J_n(as) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots)$ $\varkappa$ — współczynnik przewodzenia temperatury, $\cos\delta_{ni} = \frac{\varkappa s_{ni}^2}{\sqrt{\varkappa^2 s_{ni}^4+n^2\omega^2}}$; $\sin\delta_{ni} = \frac{n\omega}{\sqrt{\varkappa^2 s_{ni}^4+n^2\omega^2}}$; $J_n'(x) \equiv \frac{dJ_n(x)}{dx}$; kąty $\Delta\alpha_1$ i $\Delta\alpha_2$ zaznaczono na rys. 1.

Funkcja $\theta(r, \varphi, t)$ jest rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego $\nabla^2\theta-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ z warunkiem początkowym $\theta(r, \varphi, 0) = 0$ oraz warunkiem brzegowym $\theta(a, \varphi, t) = t_{0a}+\sum_{n=1}^{\infty}t_{na}\cos n(\varphi-\omega t)$ [1].

Ze wzorów (5) i (6) wynika, że po pewnym czasie t, określonym nierównością $t > 0,5a^2/\varkappa$ (podczas tzw. regularnego reżimu cieplnego [por. 1, 11, 12]), pole temperatury opisane będzie funkcją, w której wpływ członów eksponencjalnych jest pomijalnie mały. Funkcja ta zależy w tym przypadku od dwóch zmiennych: r oraz $\varphi-\omega t$. Przechodząc do nowych zmiennych, określonych transformacją

$$\left\{\begin{aligned} r^* &= r,\\ \varphi^* &= \varphi-\omega t,\\ t^* &= t,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

łatwo można zauważyć, że człon inercyjny w obu równaniach (1′) przyjmuje postać

$$\varrho_0\left(\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}-2\omega\frac{\partial^2}{\partial t^*\partial\varphi^*}+\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{*2}}\right)u_\alpha \qquad (\alpha = r, \varphi),$$

w której — wobec powyższych uwag — można dla $t^* > 0,5a^2/\varkappa$ pominąć pochodne po zmiennej t^*. Zatem dla $t^* > 0,5a^2/\varkappa$

$$\varrho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \cong \varrho_0\omega^2\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\varphi^{*2}},$$

równania (1′) zaś przyjmują postać

$$\left\{\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi^*}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right]+\mu\left[\nabla^2u_r-\frac{1}{r^2}\left(u_r+2\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi^*}\right)\right]+\varrho_0 r\omega^2 =\\ &\qquad = \varrho_0\omega^2\frac{\partial^2u_r}{\partial\varphi^{*2}}+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial r},\\ &(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi^*}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi^*}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right]+\mu\left[\nabla^2u_\varphi-\frac{1}{r^2}\left(\mu_\varphi-2\frac{\partial u_r}{\partial\varphi^*}\right)\right] =\\ &\qquad = \varrho_0\omega^2\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi^{*2}}+\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi^*}.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

W związkach (2′) w miejsce zmiennej φ należy położyć φ^*. W równaniach (8), a także w następnych zależnościach, pominięto gwiazdkę przy r oraz przy operatorze ∇, gdyż nie prowadzi to do nieporozumień.

Funkcję $\theta(r, \varphi^*, t^*)$ dla $t^* > 0,5a^2/\varkappa$ zapisać można w postaci

$$\theta(r, \varphi^*, t^*)|_{t^*>0,5a^2/\varkappa} \cong t_{0a}+\theta^*(r, \varphi^*), \tag{9}$$

gdzie

$$\theta^*(r, \varphi^*) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\vartheta_n^c(r)\cos n\varphi^*+\vartheta_n^s(r)\sin n\varphi^*\}. \tag{10}$$

Tutaj

$$\begin{aligned} \vartheta_n^c(r) &= -\frac{2}{a}t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\cos^2\delta_{ni}\frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni}J_n'(as_{ni})} \cong t_n^c(r, t^*)_n^c|_{t^*>0,5a^2/\varkappa},\\ \vartheta_n^s(r) &= \frac{1}{a}t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\sin 2\delta_{ni}\frac{J_n(rs_{ni})}{s_{ni}J_n'(as_{ni})} \cong t_n^s(r, t^*)|_{t^*>0,5a^2/\varkappa}.\end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązań równań (8) poszukiwać będziemy w postaci sumy

$$u_\alpha = u_\alpha^\omega + u_\alpha^0 + u_\alpha^* \qquad (\alpha = r, \varphi), \tag{12}$$

gdzie poszczególne składniki opisują przemieszczenie wywołane, odpowiednio, przez siłę odśrodkową $\varrho_0 r\omega^2$, temperaturę t_{0a} oraz temperaturę $\theta^*(r, \varphi^*)$.

Podobnie naprężeń poszukiwać będziemy jako sumy

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\omega + \sigma_{\alpha\beta}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^*, \qquad (\alpha, \beta = r, \varphi, z). \tag{13}$$

Przemieszczenia i naprężenia w wirującym walcu są znane i wynoszą [5, 6]:

$$u_r^\omega = \frac{\omega^2 r}{8c_1^2}\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2}{1-c^2}\right], \qquad u_\varphi^\omega = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^\omega &= \frac{\omega^2\varrho_0}{4}(a^2-r^2)(2-c^2), \qquad \sigma_{r\varphi}^\omega = 0, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^\omega &= \frac{1}{4}\omega^2\varrho_0(a^2-r^2)(2-c^2) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\varrho_0 c^2, \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\varrho_0}$, $c_2^2 = \dfrac{\mu}{\varrho_0}$, $c^2 = \dfrac{c_2^2}{c_1^2}$.

Przemieszczenia i naprężenia wywołane ogrzewaniem całej pobocznicy walca stałą temperaturą również są znane. W przypadku zagadnienia dynamicznego postać ich można znaleźć m.in. w pracach [7, 8, 9]; dla zagadnienia quasi-ustalonego są one odpowiednio równe [5, 10]:

$$u_r^0 = 2amt_{0a}\left\{\frac{\varrho}{4(1-c^2)} - \frac{c^2\varrho}{1-c^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0i}^2}e^{-\mu_{0i}^2\mathrm{Fo}} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(\varrho\mu_{0i})}{\mu_{0i}^2 J_0'(\mu_{0i})}e^{-\mu_{0i}^2\mathrm{Fo}}\right\}; \qquad u_\varphi^0 = 0; \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= -4\gamma c^2 t_{0a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0i}^2}e^{-\mu_{0i}^2\mathrm{Fo}}\left(1 + \frac{J_1(\varrho\mu_{0i})}{\varrho J_0'(\mu_{0i})}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^0 &= -4\gamma c^2 t_{0a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0i}^2}e^{-\mu_{0i}^2\mathrm{Fo}}\left(1 - \frac{J_1(\varrho\mu_{0i})}{\varrho J_0'(\mu_{0i})} + \frac{\mu_{0i}J_0(\varrho\mu_{0i})}{J_0'(\mu_{0i})}\right), \\ \sigma_{r\varphi}^0 &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie $m = \dfrac{\gamma}{\varrho_0 c_1^2}$, $\varrho = \dfrac{r}{a}$, $\mu_{0i} = as_{0i}$, $\mathrm{Fo} = \dfrac{\varkappa t}{a^2}$ jest liczbą Fouriera (bezwymiarowy czas). Z ograniczenia narzuconego na czas t wynika, że naprężenia podane w związkach (17) są pomijalnie małe (Fo > 0,5), wobec czego w związku (13) można pominąć składnik $\sigma_{\alpha\beta}^0$. Ponadto z porównania związków (12), (14) i (16) oraz (13), (15) i (17) wynika, że $u_\varphi^* = u_\varphi$ oraz $\sigma_{r\varphi}^* = \sigma_{r\varphi}$.

Do wyznaczenia pozostały następujące wielkości: u_α^* i $\sigma_{\alpha\beta}^*$ $(\alpha, \beta = r, \varphi)$. Aby je znaleźć, należy rozwiązać układ równań

$$(18)\quad \begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r^*)\right]+\mu\left[\nabla^2 u_r^*-\frac{1}{r^2}\left(u_r^*+2\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*}\right)\right]= \\ &\qquad = \varrho_0\omega^2\frac{\partial^2 u_r^*}{\partial \varphi^{*2}}+\gamma\frac{\partial \theta^*}{\partial r}, \\ &(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi^*}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r^*)\right]+\mu\left[\nabla^2 u_\varphi^*-\frac{1}{r^2}\left(u_\varphi^*-2\frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi^*}\right)\right]= \\ &\qquad = \varrho_0\omega^2\frac{\partial^2 u_\varphi^*}{\partial \varphi^{*2}}+\frac{\gamma}{r}\frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi^*}, \end{aligned}$$

z warunkami

$$(19)\quad \begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r^*}{\partial r}+\lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi^*}+\frac{u_r^*}{r}\right)\bigg|_{r=a} = \gamma\theta^*(a, \varphi^*), \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi^*}+\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial r}-\frac{u_\varphi^*}{r}\bigg|_{r=a} = 0. \end{aligned}$$

Przemieszczeń u_r^* i u_φ^* poszukuje się przy pomocy przedstawienia Lamégo [2]:

$$(20)\quad \begin{Bmatrix} u_r^* \\ \\ u_\varphi^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*} \\ -\dfrac{\partial \Psi}{\partial r} \end{Bmatrix},$$

Postać naprężeń, przy wyznaczonych potencjałach Φ i Ψ, uzyskuje się ze związków:

$$(21)\quad \begin{cases} \sigma_{rr}^* = \varrho_0 c_1^2\left\{(1-2c^2)\nabla^2\Phi+2c^2\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*}\right]-m\theta^*\right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* = \varrho_0 c_1^2\left\{\nabla^2\Phi-2c^2\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*}\right]-m\theta^*\right\}, \\ \sigma_{r\varphi}^* = \varrho_0 c_2^2\left\{\nabla^2\Psi+\dfrac{2}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*}-2\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\right\}. \end{cases}$$

3. Wyznaczenia potencjałów Φ i Ψ

Potencjały Φ i Ψ muszą spełniać równania

$$(22)\quad \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{1}{r^2}-\omega^2\begin{Bmatrix} c_1^{-2} \\ c_2^{-2}\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial^2}{\partial \varphi^{*2}}\right]\begin{Bmatrix}\Phi \\ \Psi\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\theta^* \\ 0 \end{Bmatrix}$$

oraz warunki

$$(23)\quad \begin{cases} (1-2c^2)\nabla^2\Phi+2c^2\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi^*}\right]\bigg|_{r=a} = m\theta^*(a, \varphi^*), \\ \nabla^2\Psi+2\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*}-\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}\right]\bigg|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Funkcji Φ i Ψ — wobec (10) — poszukiwać będziemy w postaci

$$\begin{Bmatrix}\Phi(r,\varphi^*)\\ \Psi(r,\varphi^*)\end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}\Phi_n^c(r)\\ \Psi_n^c(r)\end{Bmatrix}\cos n\varphi^* + \begin{Bmatrix}\Phi_n^s(r)\\ \Psi_n^s(r)\end{Bmatrix}\sin n\varphi^*. \tag{24}$$

Współczynniki Φ_n^c, Φ_n^s, Ψ_n^c i Ψ_n^s spełniają następujące równania:

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left[\left(\frac{n\omega}{c_1}\right)^2-\frac{n^2}{r^2}\right]\right\}\begin{Bmatrix}\Phi_n^c\\ \Phi_n^s\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\vartheta_n^c\\ \vartheta_n^s\end{Bmatrix},\\ &\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left[\left(\frac{n\omega}{c_2}\right)^2-\frac{n^2}{r^2}\right]\right\}\begin{Bmatrix}\Psi_n^c\\ \Psi_n^s\end{Bmatrix} = 0, \qquad n=1,2,\ldots.\end{aligned} \tag{25}$$

Rozwiązania tych równań mają postać

$$\begin{Bmatrix}\Phi_n^c(r)\\ \Phi_n^s(r)\end{Bmatrix} = \frac{2mc_1^2}{a}t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}-\cos^2\delta_{ni}\\ \sin\delta_{ni}\cos\delta_{ni}\end{Bmatrix}\frac{J_n(rs_{ni})}{(n^2\omega^2-c_1^2s_{ni}^2)\,s_{ni}J_n'(as_{ni})}+\begin{Bmatrix}B_n^c\\ B_n^s\end{Bmatrix}J_n\left(\frac{n\omega}{c_1}r\right); \tag{26}$$

$$\begin{Bmatrix}\Psi_n^c(r)\\ \Psi_n^s(r)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}C_n^c\\ C_n^s\end{Bmatrix}J_n\left(\frac{n\omega}{c_2}r\right), \tag{27}$$

gdzie B_n^c, B_n^s, C_n^c, C_n^s oznaczają stałe.

Dla $r=a$, funkcje Φ_n^c, Φ_n^s, Ψ_n^c i Ψ_n^s muszą spełniać zależności:

$$\begin{aligned}&(1-2c^2)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\Phi_n^c+2c^2\frac{d^2}{dr^2}\Phi_n^c+2c^2\frac{n}{r}\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)\Psi_n^s\Big|_{r=a} = mt_{na},\\ &(1-2c^2)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\Phi_n^s+2c^2\frac{d^2}{dr^2}\Phi_n^s-2c^2\frac{n}{r}\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)\Psi_n^c\Big|_{r=a} = 0,\\ &2\frac{n}{r}\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)\Phi_n^s+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\Psi_n^c-2\frac{d^2}{dr^2}\Psi_n^c\Big|_{r=a} = 0,\\ &-2\frac{n}{r}\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)\Phi_n^c+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\Psi_n^s-2\frac{d^2}{dr^2}\Psi_n^s\Big|_{r=a} = 0.\end{aligned} \tag{28}$$

Podstawienie związków (26) i (27) do zależności (28) pozwala zapisać układ równań na stałe B_n^c, B_n^s, C_n^c i C_n^s:

$$\left\{\begin{aligned}&P(1,\lambda_n)B_n^c+2c^2nR_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)C_n^s = 4ma^2c^2t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\cos^2\delta_{ni}\,(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)^{-1},\\ &2c^2nR_n(\lambda_n)B_n^c+P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)C_n^s = -4ma^2c^2nt_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\cos^2\delta_{ni}\,(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)^{-1},\\ &P_n(1,\lambda_n)B_n^s-2c^2nR_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)C_n^c = -4ma^2c^2t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\delta_{ni}\sin\delta_{ni}}{\mu_{ni}^2-\lambda_n^2},\\ &2c^2nR_n(\lambda_n)B_n^s-P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)C_n^c = 4ma^2c^2nt_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\delta_{ni}\sin\delta_{ni}}{\mu_{ni}^2-\lambda_n^2},\end{aligned}\right. \tag{29}$$

gdzie oznaczono:

$$P_n(y,x) = [2c^2n(n-1)-(y\lambda_n)^2]J_n(xy)+2c^2xyJ_{n+1}(xy),$$
$$R_n(x) = (n-1)J_n(x)-xJ_{n+1}(x),$$
$$\lambda_n = \frac{an\omega}{c_1}, \qquad \mu_{ni} = as_{ni}.$$

Układ równań algebraicznych (29) otrzymano wykorzystując wzory na sumy szeregów Fouriera–Bessela, wyprowadzone w pracy [13]. Rozwiązania tego układu są następujące:

$$\left.\begin{matrix} B_n^c \\ B_n^c \end{matrix}\right\} = -4ma^2c^2t_{na}S_n^{-1}\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)+2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}-\cos^2\delta_{ni} \\ \cos\delta_{ni}\sin\delta_{ni}\end{matrix}\right\}(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)^{-1},$$

(30)

$$\left.\begin{matrix} C_n^c \\ C_n^s \end{matrix}\right\} = -4mna^2c^2t_{na}S_n^{-1}[P_n(1,\lambda_n)+2c^2R_n(\lambda_n)]\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\cos\delta_{ni}\sin\delta_{ni} \\ \cos^2\delta_{ni}\end{matrix}\right\}(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)^{-1},$$

gdzie $S_n = P_n(1,\lambda_n)P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)-4c^4n^2R_n(\lambda_n)R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)$.

Wykorzystując związki (30), (27), (26) i (23) otrzymuje się następującą postać potencjałów Φ i Ψ:

$$\Phi(\varrho,\varphi^*) = 2ma^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{t_{na}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_n(\varrho\mu_{ni})\cos\delta_{ni}\cos(n\varphi^*+\delta_{ni})}{(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)J_n'(\mu_{ni})}\right]+\right.$$
$$\left.+2c^2t_{na}J_n(\varrho\lambda_n)S_n^{-1}\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)+2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\delta_{ni}\cos(n\varphi^*+\delta_{ni})}{\mu_{ni}^2-\lambda_n^2}\right\},$$

(31)

$$\Psi(\varrho,\varphi^*) = -4ma^2c^2\sum_{i=1}^{\infty}\left\{t_{na}nS_n^{-1}[P(1,\lambda_n)+2c^2R_n(\lambda_n)]\times\right.$$
$$\left.\times J_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos\delta_{ni}\sin(n\varphi^*+\delta_{ni})}{\mu_{ni}^2-\lambda_n^2}\right\},$$

gdzie

$$\cos\delta_{ni} = \frac{\mu_{ni}^2}{\sqrt{\mu_{ni}^4+L^2\lambda_n^2}}, \qquad \sin\delta_{ni} = \frac{L\lambda_n}{\sqrt{\mu_{ni}^4+L^2\lambda_n^2}},$$

$$L = \frac{ac_1}{\varkappa}, \qquad \varrho = \frac{r}{a}; \qquad \varrho\in\langle 0,1\rangle.$$

4. Przemieszczenia i naprężenia

Przemieszczenia u_r^*, u_φ^* oraz naprężenia σ_{rr}^*, $\sigma_{\varphi\varphi}^*$, $\sigma_{r\varphi}^*$ uzyskuje się, wstawiając do wzorów (20) i (21) wyznaczone postaci potencjałów Φ i Ψ. Podwójne szeregi Fouriera–Bessela, poprzez które wyrażać się będą poszukiwane wielkości, można sprowadzić do pojedynczych szeregów Fouriera, wykorzystując wzory [13]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)\mu_{ni}J_n'(\mu_{ni})} = \frac{\varrho^n}{2\lambda_n^2} - \frac{J_n(\varrho\lambda_n)}{2\lambda_n^2 J_n(\lambda_n)},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^2-\lambda_n^2)J_n'(\mu_{ni})} = -\frac{J_{n+1}(\varrho\lambda_n)}{2\lambda_n J_n(\lambda_n)},$$

$$(32)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4+L^2\lambda_n^2)\mu_{ni}J_n'(\mu_{ni})} = -\frac{\varrho^n}{2L^2\lambda_n^2} + \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2L^2\lambda_n^2 M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos[\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_n(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4+L^2\lambda_n^2)J_n'(\mu_{ni})} = \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2L\lambda_n M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin[\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4+L^2\lambda_n^2)J_n'(\mu_{ni})} = \frac{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2L\lambda_n\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos\left[\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^2 J_{n+1}(\varrho\mu_{ni})}{(\mu_{ni}^4+L^2\lambda_n^2)J_n'(\mu)} = -\frac{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{2\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\left[\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right].$$

Tutaj

$$M_n(z) = \sqrt{\mathrm{ber}_n^2 z+\mathrm{bei}_n^2 z}, \qquad \theta_n(z) = \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{bei}_n z}{\mathrm{ber}_n z},$$

gdzie $\mathrm{ber}_n z$, $\mathrm{bei}_n z$ oznaczają funkcje Kelvina [3, 4].

Po żmudnych rachunkach i wykorzystaniu wzorów (32) otrzymuje się następujące postacie przemieszczeń i naprężeń:

$$(33)\qquad u_r^*(\varrho,\varphi^*) = \frac{ma}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(t_{na}\cos\alpha_n\left[\frac{J_n(\varrho\lambda_n)+R_n(\varrho\lambda_n)}{L\lambda_n J_n(\lambda_n)}\sin(n\varphi^*-\alpha_n) - \frac{nM_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{L\lambda_n M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})] + \frac{\varrho M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\left[n\varphi^*-\alpha_n+\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right] - 2c^2\left\{\frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)}\sin(n\varphi^*-\alpha_n)+\frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\left[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})+\frac{\pi}{4}\right]\right\}S_n^{-1}\left\{\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)+2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times[J_n(\varrho\lambda_n)+R_n(\varrho\lambda_n)]-n^2J_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)[P_n(1,\lambda_n)+2c^2R_n(\lambda_n)]\right\}\Bigg]\Bigg);$$

$$u_\varphi^*(\varrho,\varphi^*)=\frac{ma}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(nt_{na}\cos\alpha_n\Bigg[\frac{J_n(\varrho\lambda_n)}{L\lambda_nJ_n(\lambda_n)}\cos(n\varphi^*-\alpha_n)-$$
$$-\frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{L\lambda_nM_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]+$$
$$+2c^2\Bigg\{\frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)}\cos(n\varphi^*-\alpha_n)-\frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos\Bigg[n\varphi^*-\alpha_n-$$
$$-\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})+\frac{\pi}{4}\Bigg]\Bigg\}S_n^{-1}\Bigg\{[P_n(1,\lambda_n)+2c^2R_n(\lambda_n)]\times$$
$$\times\left[J_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)+R_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]-J_n(\varrho\lambda_n)\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)+2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\Bigg\}\Bigg]\Bigg); \tag{34}$$

$$\sigma_{rr}^*(\varrho,\varphi^*)=\frac{\gamma}{\varrho^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(t_{na}\cos\alpha_n\Bigg[\frac{P_n(\varrho,\lambda_n)}{L\lambda_nJ_n(\lambda_n)}\sin(n\varphi^*-\alpha_n)-$$
$$-[2c^2n(n-1)-(\varrho\lambda_n)^2]\frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{L\lambda_nM_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+$$
$$+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]+2c^2\varrho\frac{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\Bigg[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+$$
$$+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})+\frac{\pi}{4}\Bigg]-2c^2S_n^{-1}\Bigg\{S_n^*(\varrho)+2c^2n^2\Bigg[P_n(\varrho,\lambda_n)R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)-$$
$$-P_n(1,\lambda_n)R_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)\Bigg]\Bigg\}-\Bigg\{\frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)}\sin(n\varphi^*-\alpha_n)-$$
$$-\frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\Bigg[n\varphi^*-\alpha_n+\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\Bigg]\Bigg\}\Bigg]\Bigg); \tag{35}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^*(\varrho,\varphi^*)=-\frac{\gamma}{\varrho^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(t_{na}\cos\alpha_n\Bigg[\Bigg\{\frac{P_n(\varrho,\lambda_n)}{L\lambda_nJ_n(\lambda_n)}+ \tag{36}$$
$$+2(1-c^2)\varrho^2\frac{\lambda_nJ_n(\varrho\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)}\Bigg\}\sin(n\varphi^*-\alpha_n)-\frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{L\lambda_nM_n(\sqrt{L\lambda_n})}\{[2c^2n(n-1)+$$
$$+(\varrho\lambda_n)^2]\sin[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]-2\varrho^2c^2L\lambda_n\cos[n\varphi^*-$$
$$-\alpha_n-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]\}+\frac{2c^2\varrho M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\Bigg[n\varphi^*-$$
$$-\alpha_n-\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})+\frac{\pi}{4}\Bigg]-2c^2S_n^{-1}\Bigg\{S_n^*(\varrho)+$$
$$+2c^2n^2\left[P_n(\varrho,\lambda_n)R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)-P_n(1,\lambda_n)R_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]+2(1-c^2)(\varrho\lambda_n)^2\times$$

$$\times J_n(\varrho\lambda_n)\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)+2c^2n^2R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\Bigg\}\times\left\{\frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)}\sin(n\varphi^*-\alpha_n)-\right.$$

$$\left.-\frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}\,M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\left[n\varphi^*-\alpha_n+\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\Bigg]\Bigg);$$

$$\sigma^*_{r\varphi}(\varrho,\varphi^*)=\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(nt_{na}\cos\alpha_n\left[\frac{R_n(\varrho\lambda_n)}{L\lambda_nJ_n(\lambda_n)}\cos(n\varphi^*-\alpha_n)-\right. \tag{37}$$

$$-\frac{(n-1)M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{L\lambda_nM_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]-$$

$$\left.-\frac{\varrho M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}\,M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos\left[n\varphi^*-\alpha_n-\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})+\frac{\pi}{4}\right]\right]+$$

$$+S_n^{-1}\left\{S_n^{**}(\varrho)-2c^2\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)R_n(\varrho\lambda_n)-P_n\left(\varrho,\frac{\lambda_n}{c}\right)R_n(\lambda_n)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{J_{n+1}(\lambda_n)}{LJ_n(\lambda_n)}\cos(n\varphi^*-\alpha_n)-\frac{M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})}{\sqrt{L\lambda_n}\,M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos\left[n\varphi^*-\alpha_n+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\Bigg).$$

Związki (33) - (37) opisują przemieszczenia i naprężenia w walcu wirującym z prędkością kątową ω, wywołane przyłożoną na jego pobocznicy temperaturą $\theta^*(r,\varphi^*)$. Obowiązują one dla czasów $t^* > 0{,}5a^2\varkappa^{-1}$. W poszczególnych wzorach zastosowano dodatkowe oznaczenia:

$$\cos\alpha_n=\frac{L}{\sqrt{L^2+\lambda_n^2}},\qquad \sin\alpha_n=\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^2+\lambda_n^2}},$$

$$S_n^*(\varrho)=P_n(\varrho,\lambda_n)P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)-4c^4n^2R_n(\lambda_n)R_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right),$$

$$S_n^{**}(\varrho)=P_n(1,\lambda_n)P_n\left(\varrho,\frac{\lambda_n}{c}\right)-4c^4n^2R_n(\varrho\lambda_n)R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right).$$

Aby otrzymać rozkład naprężeń i przemieszczeń w rozważanym na wstępie walcu, należy związki (33) - (37) oraz (14) - (16) wstawić do wzorów (12) i (13). Otrzymane sumy będą określać odpowiednio pola przemieszczeń i naprężeń, jakie powstaną w walcu podczas regularnego reżimu cieplnego.

Wyznaczone w ten sposób przemieszczenia i naprężenia są funkcjami dwóch zmiennych: bezwymiarowego promienia $\varrho = r/a$ oraz kąta $\varphi^* = \varphi-\omega t$. Ponadto zawierają trzy stałe parametry bezwymiarowe: $c = \frac{c_2}{c_1}$, $L = \frac{ac_1}{\varkappa}$, $\Lambda = \frac{1}{n}\lambda_n = \frac{a\omega}{c_1}$. Istotną rolę odgrywa także wielkość $\mathrm{Fo} = \frac{\varkappa t}{a^2}$ (liczba Fouriera), gdyż przedstawione wyżej wyniki mają sens fizyczny dla czasu t określonego nierównością $\mathrm{Fo} > 0{,}5$ [1, 11, 12].

Wspomniane wielkości bezwymiarowe, a więc ϱ, φ^*, Fo, c, L oraz Λ utworzone są przez dziewięć parametrów: r, φ, t, λ, μ, $\varkappa$, ϱ_0, ω oraz a; stanowią one podstawę wielkości bezwymiarowych określających rozpatrywane zagadnienie [14]. Zatem warunki stałości tych sześciu bezwymiarowych parametrów stanowią dla rozpatrywanego problemu kryteria podobieństwa. Widoczne jest, że np. zwiększenie prędkości kątowej ω przy jednoczesnej stałości parametrów L i Λ powoduje skrócenie czasu trwania czysto niestacjonarnego reżimu cieplnego; stałość parametrów L i Λ można uzyskać dobierając walec o np. odpowiednio zmniejszonym promieniu a i współczynniku przewodzenia temperatury $\varkappa$.

Bezwymiarowe liczby L i Λ osiągają dla metali wartości, których rząd wielkości można stosunkowo dobrze określić. Z uwagi na to, że wtedy $c_1 \sim 10^5$ cm/s oraz $\varkappa \sim 10^{-1}$ cm^2/s mamy $L \sim 10^6 a$, $\Lambda \sim 10^{-5} a\omega$.

Rozważmy przypadek, gdy $\omega \sim 10^2$ rad/s. Przyjmijmy również, że $a \sim 10$ cm. Wówczas $L \sim 10^7$, $\Lambda \sim 10^{-2}$, $L\Lambda \sim 10^5$, $\sqrt{L\Lambda} \sim 3\times 10^2$. Ponadto, ograniczając się do pierwszych N (gdzie $N \sim 10^3$) wyrazów rozpatrywanych szeregów, można przyjąć $\alpha_n \approx 0$. Przy takich założeniach możliwe jest przedstawienie naprężeń $\sigma^*_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = r, \varphi)$ w postaci prostszej, dobrze przybliżającej ich wartość ścisłą dla $\varrho \in \langle 0{,}5; 1\rangle$. Pomijając mianowicie w szeregach, określających te naprężenia, składniki proporcjonalne do L^{-1} jako małe w porównaniu ze składnikami proporcjonalnymi do $L^{-0,5}$ oraz wykorzystując wzory przybliżone dla funkcji $M_n(z)$ i $\theta_n(z)$ dużego argumentu [3, 4]:

$$M_n(z) = \frac{\exp(z/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi z}}, \qquad \theta_n(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},$$

otrzymuje się dla $\varrho \in (0{,}5; 1\rangle$:

$$\text{(38)} \quad \sigma^*_{rr}(\varrho, \varphi^*) \approx \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{N} t_{na} \Bigg(- \sqrt{\frac{\varrho}{L\lambda_n}} \exp\left[-(1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}\right] \sin\left[n\varphi^* - (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\sin\left(n\varphi^* + \frac{\pi}{4}\right)}{S_n\sqrt{L\lambda_n}} \Big\{ S^*_n(\varrho) + 2c^2 n^2 \times \left[P_n(\varrho, \lambda_n) R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) - P_n(1, \lambda_n) R_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\Big\}\Bigg),$$

$$\text{(39)} \quad \sigma^*_{\varphi\varphi}(\varrho, \varphi^*) \approx -\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{N} t_{na} \Bigg(\sqrt{\varrho} \exp\left[-(1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}\right] \Big\{ \varrho \cos\left[n\varphi^* + (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}\right] - \frac{1}{\sqrt{L\lambda_n}} \sin\left[n\varphi^* - (1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}} + \frac{\pi}{4}\right]\Big\} + \frac{\sin\left(n\varphi^* + \frac{\pi}{4}\right)}{S_n\sqrt{L\lambda_n}} \Big\{ S^*_n(\varrho) + 2c^2 n^2 \left[P_n(\varrho, \lambda_n) R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right) - P_n(1, \lambda_n) R_n\left(\varrho\frac{\lambda_n}{c}\right)\right] + 2(1-c^2)(\varrho\lambda_n)^2 J_n(\varrho\lambda_n)\left[P_n\left(1, \frac{\lambda_n}{c}\right) + 2c^2 R_n\left(\frac{\lambda_n}{c}\right)\right]\Big\}\Bigg),$$

$$\sigma^*_{r\varphi}(\varrho,\varphi^*)\approx\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2}\sum_{n=1}^{N}nt_{na}\left(\sqrt{\frac{\varrho}{L\lambda_n}}\exp\left[-(1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}\right]\times\right.$$
$$\times\cos\left[n\varphi^*-(1-\varrho)\sqrt{\frac{L\lambda_n}{2}}+\frac{\pi}{4}\right]-\frac{\cos\left(n\varphi^*+\frac{\pi}{4}\right)}{S_n\sqrt{L\lambda_n}}\left\{S_n^{**}(\varrho)-\right.$$
$$\left.\left.-2c^2\left[P_n\left(1,\frac{\lambda_n}{c}\right)R_n(\varrho\lambda_n)-P_n\left(\varrho,\frac{\lambda_n}{c}\right)R_n(\lambda_n)\right]\right\}\right). \tag{40}$$

Związki (38) - (40) są dobrymi przybliżeniami wyrażeń (35) - (37) dla $\omega\in\in(\varepsilon\times10^2;\ \varepsilon\times10^4)$ rad/s, gdzie $\varepsilon\sim1$. Wynika z nich, że przy wzroście prędkości kątowej ω, obszar, w którym naprężenia główne przyjmują wartości różniące się istotnie od zera, lokalizuje się coraz bliżej powierzchni bocznej walca. Jednocześnie maleją naprężenia σ^*_{rr} i $\sigma^*_{r\varphi}$ (gdyż rośnie $L\Lambda$), a zwiększa się wartość $\sigma^*_{\varphi\varphi}$.

Dla prędkości kątowych ω rzędu wyższego niż $10^4\div10^5$ rad/s wzory (38) - (40) przestają obowiązywać.

Na zakończenie rozważmy przypadek, gdy $\omega\ll1$ rad/s. Przyjmując podobnie jak w poprzednim przypadku $a\sim10$ cm mamy $L\sim10^7$, $\Lambda<10^{-5}$, $L\Lambda<10^2$, $\sqrt{L\Lambda}<10$. Ponadto, ograniczając się do pierwszych $\bar N$ (gdzie $\bar N\sim10^3$) wyrazów rozpatrywanych szeregów, można przyjąć $\alpha_n\approx0$. Zastępując funkcje Bessela $J_n(\lambda_n)=J_n(n\Lambda)$ pierwszymi wyrazami ich rozwinięć w szeregi potęgowe, otrzymuje się

$$\sigma^*_{rr}(\varrho,\varphi^*)|_{\omega\ll1}\approx\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2}\sum_{n=1}^{\bar N}t_{na}\left(\frac{n(n-1)}{L\lambda_n}\left\{\varrho^n\sin n\varphi^*-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin[n\varphi^*-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]\right\}-\frac{\varrho}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\times$$
$$\times\left\{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})\sin\left[n\varphi^*+\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right]-\right.$$
$$\left.\left.-\varrho^{n+1}M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})\sin\left[n\varphi^*+\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\right); \tag{41}$$

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(\varrho,\varphi^*)|_{\omega\ll1}\approx-\frac{2\gamma c^2}{\varrho^2}\sum_{n=1}^{\bar N}t_{na}\left(\frac{n(n-1)}{L\lambda_n}\left\{\varrho^n\sin n\varphi^*-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\sin\left[n\varphi^*-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})\right]\right\}+$$
$$+\frac{\varrho^2M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\cos[n\varphi^*-\theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})+\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})]-$$
$$-\frac{\varrho}{\sqrt{L\lambda_n}M_n(\sqrt{L\lambda_n})}\left\{M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})\sin\left[n\varphi^*+\theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\varrho^{n+1}(2n+1)M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})\sin\left[n\varphi^*+\theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n})-\theta_n(\sqrt{L\lambda_n})-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\right), \tag{42}$$

$$\sigma^*_{r\varphi}(\varrho, \varphi^*)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{2\gamma c^2}{\varrho^2} \sum_{n=1}^{\bar{N}} n t_{na} \left(\frac{n-1}{L\lambda_n} \left\{ \varrho^n \cos n\varphi^* - \right. \right. \tag{43}$$

$$- \frac{M_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n})}{M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \cos\left[n\varphi^* - \theta_n(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) + \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) \right] \Big\} +$$

$$+ \frac{\varrho}{\sqrt{L\lambda_n} M_n(\sqrt{L\lambda_n})} \Big\{ M_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) \cos[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\varrho\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) -$$

$$\left. \left. - \frac{\pi}{4} \right] - \varrho^{n+1} M_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) \cos\left[n\varphi^* + \theta_{n+1}(\sqrt{L\lambda_n}) - \theta_n(\sqrt{L\lambda_n}) - \frac{\pi}{4} \right] \Big\} \right).$$

Gdy $\omega = 0$, otrzymujemy $\sigma^*_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = r, \varphi)$.

5. Podsumowanie wyników

Wyznaczone w pracy naprężenia i przemieszczenia składają się z dwóch zasadniczych składników: pierwszego — pochodzącego od ruchu obrotowego walca, oraz drugiego — będącego skutkiem ogrzewania jego powierzchni bocznej. Pierwszy składnik był znany w literaturze; drugi został wyznaczony dla chwil czasu odległych od chwili początkowej. Sprowadzenie zagadnienia dynamicznego przy pomocy transformacji układu współrzędnych do quasi-statycznego pozwoliło określić wielkości u^*_α, $\sigma^*_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = r, \varphi)$ na stosunkowo prostej, choć rachunkowo żmudnej drodze. Otrzymane wyniki wskazują, że naprężenia w wirującym walcu, grzanym na pobocznicy, są periodycznymi funkcjami czasu (gdyż $\varphi^* = \varphi - \omega t$). W zależności zatem od różnicy temperatur działających na pobocznicę (por. rys. 1) naprężenia będą oscylować w czasie z mniejszą lub większą amplitudą. W przypadku, gdy temperatura pobocznicy jest stała, naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ są równe zeru (gdyż $t_{na} = 0$).

Interesujące są wnioski wynikające z rozważań dotyczących dużych oraz małych prędkości kątowych ω. W przypadku dużych prędkości kątowych mamy do czynienia ze spiętrzeniem naprężeń obwodowych przy pobocznicy walca, naprężenia zaś promieniowe i ścinające są bardzo bliskie zera. Na brzegu walca wartość $\sigma^*_{\varphi\varphi}$ jest w przybliżeniu równa $-2\gamma c^2(\theta(a, \varphi, t) - t_{0a})$.

Dla ω bliskiego zeru również największe wartości osiąga $\sigma^*_{\varphi\varphi}$; gdy $\omega = 0$, mamy w całym przekroju poprzecznym walca $\sigma^*_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = r, \varphi)$. Ten ostatni wynik jest zgodny z twierdzeniem dotyczącym naprężeń cieplnych przy ustalonym reżimie cieplnym (por. np. [15], s. 161).

Przedstawione wyniki mają postać szeregów Fouriera o dosyć skomplikowanych współczynnikach. Zaletą jednak takiego przedstawienia jest fakt, że współczynniki te zależą tylko od czterech bezwymiarowych parametrów, w tym od bezwymiarowego promienia ϱ. Otrzymane wyniki stanowią zatem wygodne narzędzie do badań modelowych.

Literatura cytowana w tekście

1. K. Grysa, *Nieustalone pole temperatury w wirującym walcu kołowym, wywołane utrzymywaną na jego pobocznicy odcinkami stałą temperaturą*, Mech. Teoret. i Stos., 2, **15** (1977).
2. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
3. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
4. N. W. McLachlan, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
5. S. Timoshenko, I. N. Goodier, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
6. Y. C. Fung, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
7. T. Mura, *Dynamical thermal stress due to thermal shocks*, Res. Rep. Faculty of Engng., Meiji Univ., 8, 1956.
8. W. Derski, *A dynamical problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech., 2, **13** (1961).
9. K. Grysa, M. Kwiek, *Stan naprężenia w walcu kołowym wywołany przyłożeniem stałej temperatury na pobocznicy*, Mech. Teoret. Stos., 1, **15** (1977).
10. H. Parkus, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1958; tłum. ros., Moskwa 1963.
11. K. Grysa, *Rozkład temperatury i naprężeń w walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznicy*, Rozpr. doktorska, Politechnika Poznańska, 1975.
12. А. Г. Харламов, *Измерение теплопроводности твердых тел*, АТОМИЗДАТ, Москва 1973.
13. K. Grysa, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos., 2, **15** (1977).
14. L. I. Siedow, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, WNT, Warszawa 1968.
15. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Изд. Наука, Москва 1966.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В КРУГЛОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ ПРИ НЕСИММЕТРИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ ЕГО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе приведены напряжения и перемещения в круглом вращающемся цилиндре во время регулярного теплового режима. Полученное решение имеет вид рядов Фурье, представленных при помощи безразмерных координат и параметров, содержащих физические константы.

Summary

THE STRESSES AND DISPLACEMENTS IN A ROTATING CIRCULAR CYLINDER DUE TO AXIALLY NON-SYMMETRICAL HEATING OF ITS LATERAL SURFACE

The problem of stress and displacement distributions a rotating circular cylinder heated on its lateral surface is dealt with in case of a regular thermal process. The solution is given in a form of Fourier series involving dimensionless variables and dimensionless parameters determined by the mechanical and thermal properties of material.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1976 r.