MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 15 (1977)

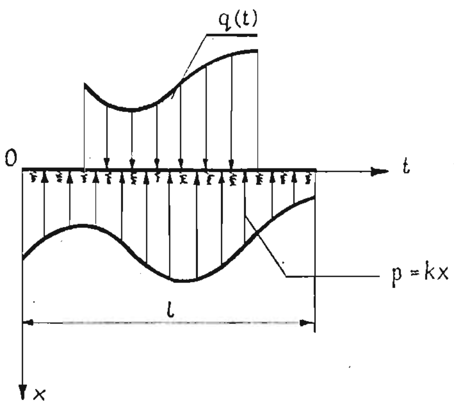
OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM Z UWZGLĘDNIENIEM OGRANICZEŃ NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH

MACIEJ MAKOWSKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Przedmiotem pracy będzie optymalizacja kształtu (szerokości) belki spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera z uwagi na minimum objętości przy ograniczeniu naprężeń normalnych.

W tym celu w prostokątnym, kartezjańskim układzie współrzędnych Otx rozważymy belkę o skończonej długości, sprężystą, jednorodną, izotropową o przekroju prostokątnym (rys. 1).



Rys. 1

Linia ugięcia belki opisana jest znanym równaniem różniczkowym

$$(EJx'')''+kx = q(t), \tag{1.1}$$

gdzie E oznacza moduł Younga, J — moment bezwładności, $x(t)$ — ugięcie belki, $q(t)$ — obciążenie, k — współczynnik podatności podłoża.

Rozważać będziemy belkę spoczywająca na podłożu o stałym współczynniku podatności k, o stałej wysokości i zmiennej, lecz symetrycznej względem osi belki, szerokości.

Szerokość belki możemy wyrazić w postaci

$$b(t) = \frac{12EJ(t)}{h^3E} = \frac{12}{h^3E}m(t), \tag{1.2}$$

gdzie $m(t) \overset{\mathrm{df}}{=} EJ(t)$.

Szukanie minimum objętości belki przy takich założeniach równoważne jest szukaniu minimum funkcjonału $\int_{o}^{l} m(t)dt$.

W dalszym ciągu pracy belkę będziemy traktować jako układ sterowania, rozwiązując nieklasyczny problem wariacyjny na podstawie metody programowania dynamicznego BELLMANA.

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy belkę opisaną równaniem

(2.1) $$[m(t)x'']'' = q-kx.$$

Warunek ograniczający naprężenie normalne

(2.2) $$|\sigma| \leqslant \sigma_d;$$

funkcjonał postaci

(2.3) $$J_0 = \int_{o}^{l} (t)dt.$$

Należy wyznaczyć taki kształt belki, który przy spełnieniu (2.1) i (2.2) realizuje minimum funkcjonału J_0.

3. Rozwiązanie problemu

Ograniczenie (2.2) zastąpimy równoważnym ograniczeniem na drugą pochodną ugięcia. Korzystając ze wzoru

(3.1) $$\sigma = \frac{|M|}{W} = \frac{|EJx''|}{J}\cdot\frac{h}{2} = \frac{|Ex''h|}{2}$$

i uwzględniając (2.2), otrzymujemy

(3.2) $$|x''| < \sigma_0,$$

gdzie $\sigma_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{2\sigma_\alpha}{Eh}$.

Oznaczając $x'' \overset{\mathrm{df}}{=} v$, które traktujemy jako nowe sterowanie [1], można sformułowany problem przedstawić następująco:

(3.3) $$[m(t)x'']'' = q-kx,$$

(3.4) $$x'' = v,$$

(3.5) $$\Omega = \{v: |v| \leqslant \sigma_0\},$$

(3.6) $$\min_{v\in\Omega} \int^{l} m(t)dt.$$

Równanie (3.4) przedstawiamy w postaci układu równań rzędu pierwszego:

(3.7) $$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v,$$

gdzie $x_1 \overset{\mathrm{df}}{=} x$.

Umiejscawiając zagadnienie szukania $\min\limits_{v\in\Omega} \int_0^l m(t)dt$ w szerszej klasie ze zmienną dolną granicą całkowania, mamy

(3.8) $$f(\bar{x}, t) = \min_{v\in\Omega} \int_t^l m(u)du,$$

gdzie $\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1, x_2)$.

Równanie BELLMANA [1] dla wyznaczenia funkcji f ma postać

(3.9) $$0 = \min_{v\in\Omega}\left[m+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial f}{\partial x_2}v\right].$$

Zależność w nawiasie kwadratowym od v jest liniowa, czyli minimum tego wyrażenia będzie osiągnięte na brzegu Ω.

Mamy więc równoważną postać równania Bellmana

(3.10) $$0 = \inf_{v\in\Omega}\left[m+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial f}{\partial x_2}v\right],$$

a stąd otrzymujemy sterowanie optymalne

(3.11) $$v = -\sigma_0 \operatorname{sgn}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

które można zapisać w równoważnej postaci

(3.12) $$|x''| = \sigma_0.$$

Rozwiązaniem optymalnym postawionego zadania jest więc belka równomiernej wytrzymałości.

Jakościowy charakter sterowania został znaleziony stosunkowo prosto, jednak w dalszym ciągu należy poszukać WKW na to, aby belka była równomiernej wytrzymałości i podać jej konstrukcję.

4. Belki o równomiernej wytrzymałości na podłożu sprężystym

4.1. Przypadek krzywizny stałego znaku. Rozważmy początkowo najprostszy przypadek, czyniąc zastrzeżenie

(4.1) $$x'' > 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l\rangle.$$

Warunek określający kształt belki ma postać: $\sigma = \sigma_d$, który zgodnie z (3.1) można zapisać

(4.2) $$\frac{Ex''h}{2} = \sigma_d.$$

Równanie linii ugięcia belki po wykorzystaniu wzoru na moment bezwładności przyjmuje postać

$$\frac{h^2}{6}\left[\frac{Ex''h}{2}b(t)\right]'' = q-kx$$

lub

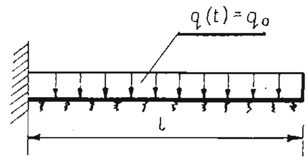
$$\frac{h^2}{6}[\sigma_d b(t)]'' = q-kx$$

po wykorzystaniu związku (4.2).

Mamy stąd

$$b''(t) = \frac{6}{h^2\sigma_d}(q-kx). \tag{4.3}$$

Do wyznaczenia poszukiwanego kształtu belki mamy więc układ dwóch równań (4.2) (4.3). Są to równania różniczkowe rzędu drugiego, należy więc dołączyć do nich po dwa warunki początkowe lub brzegowe ze względu na $x(t)$ i $b(t)$.



Rys. 2

Jako przykład rozważmy belkę utwierdzoną na jednym i swobodną na drugim końcu, obciążoną w sposób stały $q(t) = q_0 = \text{const}$.

Rozwiązanie równania (4.2) ma postać

$$x = \frac{\sigma_d}{Eh}t^2+C_1t+C_2,$$

a po uwzględnieniu warunków początkowach $x(0) = x'(0) = 0$ otrzymujemy

$$x = \frac{\sigma_d}{Eh}t^2. \tag{4.4}$$

Po wstawieniu związku (4.4) do (4.3) otrzymujemy równanie

$$b''(t) = \frac{6}{h^2\sigma_d}\left(q_0-\frac{k\sigma_d}{Eh}t^2\right), \tag{4.5}$$

którego rozwiązanie ma postać

$$b(t) = \frac{3q_0}{h^2\sigma_d}t^2-\frac{k}{2Eh^3}t^4+C_3t+C_4. \tag{4.6}$$

Warunki początkowe dla $b(t)$ otrzymujemy uwzględniając, że moment i siła poprzeczna powinny być równe zeru dla $t = l$. Mamy więc:

$$EJx''|_{t=l} = 0 \Rightarrow b(l) = 0,$$

$$(EJx'')'|_{t=l} = 0 \Rightarrow b'(l) = 0.$$

Uwzględniając te warunki mamy poszukiwany kształt belki

$$b(t) = \frac{3q_0}{h^2\sigma_d}t^2 - \frac{k}{2Eh^3}t^4 + \frac{l}{h^2}\left(\frac{2kl^2}{Eh} - \frac{6q_0}{\sigma_d}\right)t + \frac{l^2}{h^2}\left(\frac{3q_0}{\sigma_d} - \frac{3kl^2}{2Eh}\right). \tag{4.7}$$

Do wyniku (4.7) możemy dojść również inną metodą. Z założenia $x'' = \sigma_0$, otrzymujemy reakcję podłoża równą $\frac{k}{2}\sigma_0 t^2$. Oznaczmy

$$q(t) = q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 t^2. \tag{4.8}$$

Moment od obciążenia $q(t)$ liczony z prawej strony przekroju ma postać

$$M(t) = -\int_t^l \left(q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 u^2\right)(u-t)du. \tag{4.9}$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$M(t) = -q_0\frac{(l-t)^2}{2} + \frac{k\sigma_0}{2}\left(\frac{l^4}{4} - \frac{l^3 t}{3} + \frac{t^4}{12}\right). \tag{4.10}$$

Powyższy wynik otrzymaliśmy przy założeniu $x'' > 0$, czyli $M(t)$ jest ujemne dla $t \in \langle 0, l)$.

Poszukiwany kształt belki otrzymamy, wykorzystując wzór

$$b(t) = \frac{6}{h^2\sigma_d}|M(t)|. \tag{4.11}$$

Ponieważ $|M(t)| = -M(t)$, otrzymujemy ostatecznie wzór

$$b(t) = \frac{3q_0}{h^2\sigma_d}t^2 - \frac{k}{2Eh^3}t^4 + \frac{l}{h^2}\left(\frac{2kl^2}{Eh} - \frac{6q_0}{\sigma_d}\right)t + \frac{l^2}{h^2}\left(\frac{3q_0}{\sigma_d} - \frac{3kl^2}{2Eh}\right) \tag{4.12}$$

identyczny ze wzorem (4.7) otrzymanym w poprzedniej metodzie.

Otrzymaliśmy optymalny kształt belki przy uczynionym *a priori* założeniu $x'' > 0$ dla $t \in (0, l\rangle$.

Wyprowadzimy obecnie warunek konieczny i wystarczający na to, aby $x'' > 0$ dla $t \in (0, l\rangle$.

Twierdzenie (4.1)

Założenie: $\qquad x'' > 0 \quad$ dla $\quad t \in (0, l\rangle$.

Teza: $\qquad q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geqslant 0.$

Dowód: $\qquad x'' > 0 \Rightarrow x'' = \sigma_0 \Rightarrow x = \frac{\sigma_0}{2}t^2 \Rightarrow kx = \frac{k}{2}\sigma_0 t^2.$

Oznaczmy $q(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 t^2.$

Ponieważ $q(t)$ jest funkcją malejącą, musi przyjmować wartości dodatnie dla $t \in \langle 0, l)$, gdyż w przeciwnym przypadku nie byłoby spełnione założenie $x'' > 0$. Zauważmy, że wartość równą zeru może przyjmować $q(t)$ jedynie dla $t = l$ i że prawdziwa jest następująca implikacja:

$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 t^2 \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l\rangle \Rightarrow q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geqslant 0, \quad \text{cbdo.}$$

Twierdzenie (4.2)

Założenie:
$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geqslant 0.$$

Teza:
$$x'' > 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l\rangle.$$

Dowód:

$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geqslant 0 \Rightarrow q(t) \overset{\mathrm{df}}{=} q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 t^2 > 0 \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, l).$$

Moment obliczony od obciążenia $q(t)$ przyjmuje wartości ujemne, czyli x'' przyjmuje wartości dodatnie, cbdo.

Otrzymaliśmy więc warunek konieczny i wystarczający na to, aby x'' było dodatnie w postaci nierówności

$$q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Wzór (4.12) przedstawia więc optymalny kształt belki przy założeniu, że parametry: q_0, k, σ_0 i l spełniają relację: $q_0 - \frac{k}{2}\sigma_0 l^2 \geqslant 0$. Zauważmy, że jeżeli we wzorze (4.12) przejdziemy w granicy z k do zera otrzymamy znane rozwiązanie Galileusza:

$$b(t) = \frac{3q_0}{h^2\sigma_d}t^2 - \frac{6q_0 l}{h^2\sigma_d} + \frac{3l^2 q_0}{h^2\sigma_d}. \tag{4.14}$$

4.2. Przypadek zmiany znaku krzywizny. Rozważać teraz będziemy przypadek z jednokrotną zmianą krzywizny parabol w przedziale $(0, l)$; zakładamy więc, że:

$$x'' = \begin{cases} \sigma_0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant a_1, \\ -\sigma_0 & \text{dla} \quad a_1 < t \leqslant l, \end{cases} \tag{4.15}$$

gdzie a_1 jest nieznanym punktem leżącym wewnątrz przedziału $(0, l)$.

Na podstawie założenia (4.15) mamy

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\sigma_0 t^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant a_1,$$

a po uwzględnieniu warunków zszycia:

$$x_1(a_1) = x_2(a_1), \quad x_1'(a_1) = x_2'(a_1).$$

Otrzymujemy

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}\sigma_0 t^2 + 2\sigma_0 a_1 t - \sigma_0 a_1^2 \quad \text{dla} \quad a_1 \leqslant t \leqslant l.$$

Przyjmując

$$(4.16)\qquad q(t) = \begin{cases} -q_0 - \frac{k}{2}\sigma t_0^2 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant a_1, \\ q_0 - k\left(-\frac{\sigma_0}{2}t^2 + 2\sigma_0 a_1 t - \sigma_0 a_1^2\right) & \text{dla} \quad a_1 \leqslant t \leqslant l, \end{cases}$$

sprowadzamy zagadnienie do belki statycznie wyznaczalnej. Moment od obciążenia $q(t)$ dla $a_1 \leqslant t \leqslant l$ ma postać

$$M(t) = -\int_t^l \left[q_0 - k\left(-\frac{\sigma_0}{2}u^2 + 2\sigma_0 a_1 u - \sigma_0 a_1^2\right)\right](u-t)\,du.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(4.17)\qquad M(t) = (q_0 + k\sigma_0 a_1^2)\left(tl - \frac{l^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right) + \frac{k}{2}\sigma_0\left(\frac{l^3}{3}t - \frac{l^4}{4} - \frac{t^4}{12}\right) + \\ + 2k\sigma_0 a_1\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2}t + \frac{t^3}{6}\right).$$

Podobnie w przedziale $0 \leqslant t \leqslant a_1$ mamy

$$(4.18)\qquad M(t) = -q_0\frac{(a_1-t)^2}{2} + \frac{k\sigma_0}{2}\left(\frac{a_1^4}{4} - \frac{a_1^3}{3}t + \frac{t^4}{12}\right) + \\ + (q_0 + k\sigma_0 a_1^2)\left(a_1 l - \frac{l^2}{2} - \frac{a_1^2}{2}\right) + \frac{k}{2}\sigma_0\left(\frac{l^3}{3}a_1 - \frac{l^4}{4} - \frac{a_1^4}{12}\right) + \\ + 2k\sigma_0 a_1\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2}a_1 + \frac{a_1^3}{6}\right).$$

Wartość momentu w punkcie $t = a_1$ wynosi

$$(4.19)\qquad M(a_1) = (q_0 + k\sigma_0 a_1^2)\left(a_1 l - \frac{l^2}{2} - \frac{a_1^2}{2}\right) + \frac{k}{2}\sigma_0\left(\frac{l^3}{3}a_1 - \frac{l^4}{4} - \frac{a_1^4}{12}\right) + \\ + 2k\sigma_0 a_1\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^2}{2}a_1 + \frac{a_1^3}{6}\right).$$

Na podstawie związku $EJx'' = -M$ i założenia, że w punkcie a_1 następuje skok x'' oraz faktu, że moment od obciążenia ciągłego jest funkcją ciągłą, wnioskujemy, że $M(a_1) = 0$.

Warunek $M(a_1) = 0$ pozwala wyznaczyć nieznaną wartość odciętej punktu, w którym następuje zmiana krzywizny. Po przekształceniach wyrażenia (4.19) i przyrównaniu do zera otrzymujemy równanie stopnia czwartego

$$(4.20)\qquad a_1^4 - \frac{24}{5}la_1^3 + \left(\frac{12q_0}{5k\sigma_0} + \frac{36l^2}{5}\right)a_1^2 - \left(\frac{24q_0 l}{5k\sigma_0} + 4l^3\right)a_1 + \left(\frac{12q_0 l^2}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5}l^4\right) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ze względu na a_1 pozwoli wyznaczyć optymalny kształt belki po wykorzystaniu związku $b(t) = \frac{6}{h^2\sigma_d}|M(t)|$.

Pierwiastki równania stopnia czwartego określają znane wzory, jednak w naszym przypadku istotne jest znalezienie WKW na to, aby równanie (4.20) posiadało dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty w przedziale $(0, l)$. W tym celu oprzemy się na następującej definicji i twierdzeniu [2]:

Definicja: Jeżeli w ciągu skończonym liczb rzeczywistych $C_1, C_2, \ldots, C_n$ zachodzi dla $1 \leqslant k \leqslant n-1$ nierówność $C_k \times C_{k+1} < 0$, to mówimy, że para liczb C_k, C_{k+1} stanowi odmianę.

Również w przypadku, gdy jest $C_k \times C_{k+p+1} < 0$, przy czym $C_{k+s} = 0$ dla $s = 1, 2, \ldots \ldots, p$ $(1 \leqslant k,\ 1 \leqslant p,\ k+p < n)$, to mówimy, że para liczb stanowi odmianę.

W ciągu 2, 3, -5, -1, 0, -2, 7, 0, 0, -9, -5 odmianę tworzą pary: 3, -5; -2, 7; 7, -9. Mamy więc trzy odmiany w tym ciągu.

Regula Fouriera. Tworzymy dla danego wielomianu $f(x)$ stopnia n ciąg jego pochodnych: $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Pochodna $f^{(n)}(x)$ jest stała. Oznaczmy przez $N(x_0)$ ilość odmian w ciągu liczb $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.

Twierdzenie Budana-Fouriera. Niech $f(x)$ będzie wielomianem rzeczywistym i niech $\alpha < \beta$, $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$. Wtedy ilość zer wielomianu $f(x)$ w przedziale (α, β) wynosi $N(\alpha)-N(\beta)$, lub jest od tej liczby mniejsza o liczbę parzystą.

Rozważając $M(a_1)$ zauważamy, że l jest dwukrotnym pierwiastkiem tego wielomianu (gdyż $M(l) = 0$ i $M'(l) = 0$). Wielomian $M(a_1)$ można więc rozłożyć na czynniki:

$$M(a_1) = (a_1-l)^2\left(a_1^2 - \frac{14}{5} l a_1 + \frac{12 q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^2\right).$$

Wystarczy teraz zbadać zera drugiego czynnika w przedziale $(0, l)$; opierając się na twierdzeniu Budana-Fouriera mamy:

$$h(a_1) \overset{\mathrm{df}}{=} a_1^2 - \frac{14}{5} l a_1 + \frac{12 q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^2,$$

$$h'(a_1) = 2a_1 - \frac{14}{5} l,$$

$$h''(a_1) = 2,$$

$$h(0) = \frac{12 q_0}{5k\sigma_0} + \frac{3}{5} l^2 > 0,$$

$$h'(0) = -\frac{14}{5} l < 0,$$

$$h''(0) = 2 > 0.$$

Mamy więc $N(0) = 2$.

$$h(l) = -\frac{6}{5} l^2 + \frac{12 q_0}{5k\sigma_0},$$

$$h'(l) = -\frac{4}{5} l < 0,$$

$$h''(l) = 2 > 0.$$

Jeżeli $h(l)$ będzie ujemne, wtedy $N(l) = 1$ i zgodnie z twierdzeniem Budana-Fouriera ilość zer $h(a_1)$ w przedziale $(0, l)$ wynosić będzie $N(0)-N(l) = 1$.

Otrzymaliśmy więc WKW na to, aby równanie (4.20) miało dokładnie jeden pierwiastek leżący w przedziale $(0, l)$ w postaci

$$-\frac{6}{5}l^2+\frac{12q_0}{5k\sigma_0} < 0$$

lub po przekształceniu

$$q_0-\frac{k}{2}\sigma_0 l^2 < 0. \tag{4.21}$$

Rozwiązując równanie kwadratowe

$$a_1^2-\frac{14}{5}la_1+\frac{12q_0}{5k\sigma_0}+\frac{3}{5}l^2 = 0,$$

otrzymujemy dokładnie jeden pierwiastek leżący w przedziale $(0, l)$

$$a_1 = \frac{7}{5}l-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{136}{25}l^2-\frac{48q_0}{5k\sigma_0}}. \tag{4.22}$$

Jeżeli rozważymy przypadek ogólny, gdy obciążenie jest dowolną funkcją $q(t)$ i założymy, że x'' zmienia znak w przedziale $(0, l)$ n razy w punktach $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to dochodzimy do następującego układu równań:

$$\begin{aligned}
&-\int_{a_n}^{l} q(u)(u-a_n)du-k\sigma_0\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k^2\left(a_n l-\frac{l^2}{2}-\frac{a_n^2}{2}\right)+\\
&\qquad+(-1)^n\frac{k}{2}\sigma_0\left(-\frac{l^3}{3}a_n+\frac{l^4}{4}-\frac{a_n^4}{12}\right)+\\
&\qquad+2k\sigma_0\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\left(\frac{l^3}{3}-\frac{l^2}{2}a_n+\frac{a_n^3}{6}\right) = 0,\\
&-\int_{a_{n-1}}^{a_n} q(u)(u-a_{n-1})du-k\sigma_0\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k^2\left(a_{n-1}a_n-\frac{a_n^2}{2}-\frac{a_{n-1}^2}{2}\right)+\\
&\qquad+(-1)^{n-1}\frac{k}{2}\sigma_0\left(-\frac{a_n^3}{3}a_{n-1}+\frac{a_n}{4}+\frac{a_{n-1}^4}{12}\right)+\\
&\qquad+2k\sigma_0\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a_k\left(\frac{a_n^3}{3}-\frac{a_n^2}{2}a_{n-1}+\frac{a_{n-1}^3}{6}\right) = 0,\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\int_{a_2}^{a_3} q(u)(u-a_2)du-k\sigma_0(-a_1^2+a_2^2)\left((a_2a_3-\frac{a_3^2}{2}-\frac{a_2^2}{2}\right)+\\
&\qquad+\frac{k}{2}\sigma_0\left(-\frac{a_3^3}{3}a_2+\frac{a_3^4}{4}+\frac{a_2^4}{12}\right)+2k\sigma_0(a_1-a_2)\left(\frac{a_3^3}{3}-\frac{a_3^2}{2}a_2+\frac{a_2^3}{6}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$-\int_{a_1}^{a_2} q(u)(u-a_1)du - k\sigma_0(-a_1^2)\left((a_1 a_2 - \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_1^2}{2}\right) +$$

$$+\frac{k}{2}\sigma_0\left(-\frac{a_2^3}{3}a_1 + \frac{a_2^4}{4} + \frac{a_1^4}{12}\right) + 2k\sigma_0 a_1\left(\frac{a_2^3}{3} - \frac{a_2^2}{2}a_1 + \frac{a_2^1}{6}\right) = 0\,.$$

Jeżeli istnieje rozwiązanie tego układu równań spełniające warunek $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < l$, to daje ono poszukiwane punkty zmian krzywizny parabol.

5. Zakończenie

W pracy wykazano, że optymalne kształtowanie belek na podłożu sprężystym, z uwagi na minimum objętości przy ograniczeniu naprężeń normalnych, prowadzi do belek równomiernej wytrzymałości. W odróżnieniu od znanych rozwiązań układów statycznie wyznaczalnych — wyznaczenie kształtu belki na podłożu winklerowskim nastręcza poważne trudności. W pracy ograniczono się jedynie do przypadku belki jednoprzęsłowej, otrzymując ścisłe analityczne rozwiązanie. Poszukiwanie optymalnego rozwiązania dla belki ciągłej na podłożu Winklera wymagałoby już odpowiedniej procedury numerycznej.

Literatura cytowana w tekście

1. R. BELLMAN, S. DREYFUS, *Programowanie dynamiczne*, PWE, Warszawa 1967.
2. A. FELDBAUM, *Podstawy teorii optymalnych układów sterowania automatycznego*, PWN, Warszawa 1967.
3. J. TOU, *Nowoczesna teoria sterowania*, WNT, Warszawa 1967.
4. A. TUROWICZ, *Geometria zer wielomianów*, PWN, Warszawa 1967.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе рассмотрена задача об оптимальной форме балки, лежащей на упругом основании Винклера. Искомым является минимум обьема при ограничении величины нормальных напряжений. При помощи динамического программирования получено решение в виде равнопрочной балки. Дан метод построения такой балки, лежащей на упругом основании.

Summary

OPTIMUM SHAPE DESIGN OF A BEAM RESTING ON ELASTIC FOUNDATION WITH NORMAL STRESS RESTRICTIONS

In the paper the problem of shape optimization of a beam resting on elastic foundation is formulated. The problem of minimum weight is considered, under the condition of limited normal stresses. The solution is obtained by means of dynamic programming. The problem of a beam resting on a Winkler-type elastic foundation of uniform strength is considered in detail.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1976 r.