

## PEWNE PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA TEORII KATASTROF W MECHANICE\*

M. J. SEWELL (READING, W. BRYTANIA)

### 1. Wstęp

Tematem artykułu jest zastosowanie teorii katastrof w mechanice; jego celem podanie przykładów, zrozumiałych bez specjalistycznego przygotowania matematycznego.

Większość podanych przykładów jest oryginalna. Powstały one przy okazji wygłaszania przez autora wykładów na temat zastosowań teorii katastrof, z których pierwszy miał miejsce na zebraniu Towarzystwa Matematycznego w Reading w 1974 r., a później m.in. w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki w Warszawie (w 1975 r.).

Ze względu na trudność i złożoność dowodu twierdzenia Thoma [1] i twierdzenia o uniwersalnym wygładzaniu, wydaje się uzasadnione najpierw pokazać na przykładach co twierdzenia te mówią, a do dowodów powrócić później.

Artykuł zawiera również opisy prostych doświadczeń. Czytelnik będzie mógł skonstruować własne przykłady, na wzór tu zamieszczonych, i przeanalizować je metodami teorii katastrof.

Stosowanie tej teorii ma wiele aspektów, które powinny być przedstawione zanim osiągnie się pełne zrozumienie jej giętkości interpretacyjnej. Zadaniem artykułu jest dać pewne wyobrażenie o temacie bez szczegółowego zgłębiania go. Rozważany jest problem: jeżeli teoria katastrof może opisać zdarzenia tak skomplikowane jak ewolucja embrionu [2], czy inne typy morfogenezy biologicznej [3], to czy można ją zastosować do ilościowej analizy problemów morfogenezy mechanicznej?

Prostym przykładem tej ostatniej może być quasi-statyczna ewolucja konstrukcji od jej stanu «naturalnego» (beznapięzeniowego) tzn., używając terminologii biologicznej, wyłowienie jej «ośrodka organizującego». Teorię katastrof, jak dotychczas, sformułowano jedynie dla przestrzeni o skończonej liczbie wymiarów. Dlatego bezpośrednie zastosowanie jej do problemów mechaniki wymaga rozważenia ich skończenie-wymiarowych aproksymacji. Pewne wskazówki daje tu praca [4].

### 2. Proste przykłady katastrof

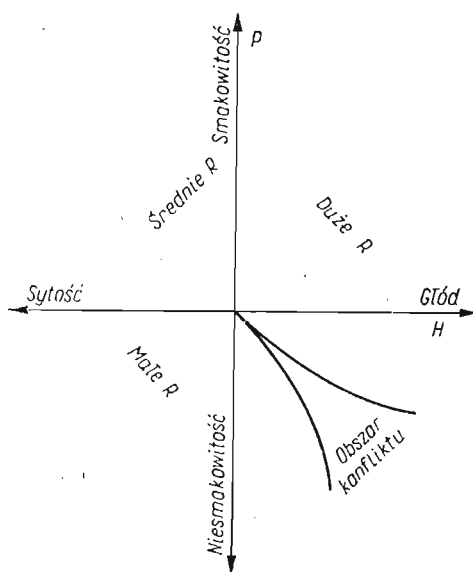
**2.1. Katastrofa kuchenna.** Aby wprowadzić w temat, zaczynijmy np. od apetytu i prześledźmy następnie pewien schemat geometryczny i zachodzące zależności. Przypuśćmy, że ktoś został poczęstowany jedzeniem. Jakie czynniki wpływają na  $R$  — jego zapal do

\* Pracę przetłumaczył z angielskiego dr S. Świszczowski, a opracował dr hab. J. A. König.

jedzenia? Oczywiście, jednym z najistotniejszych jest głód  $H$  lub jego przeciwieństwo —  $H$  — nasylenie. Istnieje również i drugi czynnik, którym jest smakowitość jedzenia  $P$  lub jego przeciwieństwo —  $P$ .

Funkcja  $R(H, P)$  wyraża jedną zmienną stanu przez dwie niezależne zmienne sterujące. Jeżeli obie wartości,  $H$  i  $P$ , są duże, to i  $R$  będzie duża. Jeżeli  $H$  będzie małe, a  $P$  duże, to  $R$  zapewne przyjmie wartość średnią. Gdy jednak  $H$  ma dużą, a  $P$  małą wartość, powstaje sytuacja, w której  $R$  przyjąć może wartość zarówno dużą, jak i małą.

Danie może mieć smak tak odstręczający, że nie można go jeść bez względu na to, jak jest się głodnym; można też być tak głodnym, że je się bez względu na smak jedzenia. Tę sytuację, w której obie decyzje: jeść lub nie jeść są możliwe, nazywamy «katastrofą kuchenną» [5]. Stosując terminologię ZEEMANA [6] nazwiemy głód i niesmakowitość potrawy czynnikami konfliktowymi.

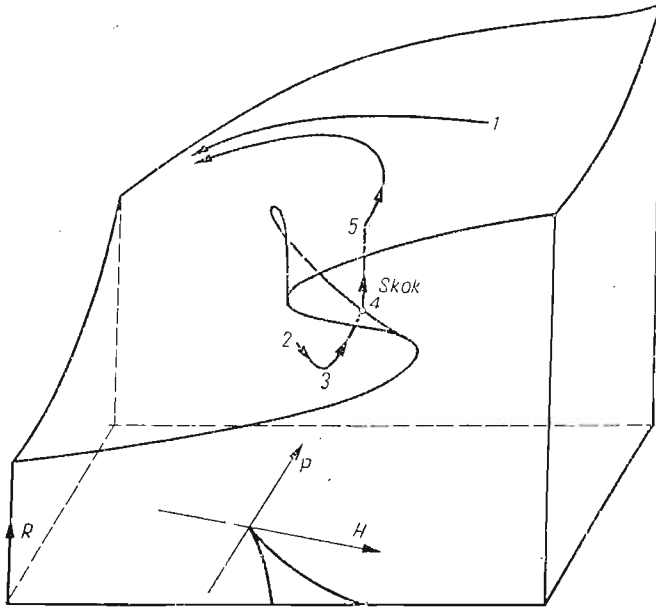


Rys. 1

Teoria katastrof sugeruje, że obszar konfliktowy ma na płaszczyźnie  $H, P$  kształt ostrego (rys. 1). Wartość funkcji  $R(H, P)$  może być przedstawiona jako wysokość ponad płaszczyznę  $H, P$ ; w ten sposób w trójwymiarowej przestrzeni  $H, P, R$  powstanie pewna powierzchnia (rys. 2). Jest ona gładka, ale zawiera fałdę. Rzut tej fałdy na płaszczyznę  $H, P$  wyznacza obszar konfliktowy. Każda prosta pionowa, przechodząca przez ten obszar przecina powierzchnię z rys. 2 w trzech punktach. Inne proste pionowe przecinają ją tylko raz.

Narysujmy na tej powierzchni pewne przebiegi trajektorii posiłków. Zwykle posiłek zaczyna się w punkcie 1, gdzie  $H$  i  $P$  mają duże wartości, a następnie postępujemy, przy stałym  $P$ , w kierunku malejących  $H$ , dopóki  $R$  nie dojdzie do zera. Przebieg ten omija sfaldowanie. Rozważmy jednakże przypadek dziecka (historia prawdziwa 3), które lubi kurczaka z sosem chlebowym, a nie lubi go jeść bez sosu. Gdy brak sosu, przebieg posiłku

rozpocznie się od punktu 2, na najniższej części fałdy, gdzie  $H$  ma dużą wartość, ale  $R$  i  $P$  mają wartości niskie. Jeśli nie zmieniamy sterującej zmiennej  $P$ , to wartość  $H$  będzie rosła, podczas gdy  $R$  pozostanie bliskie zeru. Na szczęście można osiągnąć wzrost  $P$  poprzez obietnicę (w punkcie 3) dania dziecku kanapki z kurczędem i szklanki mleka (mniej więcej te same składniki co sosu chlebowego). Zmienia to trasę trajektorii w kierunku



Rys. 2

dolnej linii fałdy, a gdy zostanie ona osiągnięta (w punkcie 4), nastąpi skok na tę część powierzchni, na której wartość  $R$  jest duża (punkt 5). Następnie trajektoria zbliża się do tej, którą omawiano poprzednio i sytuacja jest uratowana.

Skok nastąpił, ponieważ środkowa, odwrotnie nachylona, powierzchnia fałdy powyżej obszaru konfliktu może być uznana za powierzchnię niestabilną, podczas gdy inne punkty na powierzchni można nazwać stabilnymi. Gładka linia sfaldowania (zarówno jej górna, jak i dolna część) powoduje w ten sposób «katastrofę», w sensie nagłej zmiany położenia punktu (w górę lub w dół) dla każdej trajektorii, która tam przechodzi.

Jaki jest pożytek z modelu «katastrofy kuchennej»? Po prostu wprowadza on nas, w sposób elementarny, w teorię katastrof. Początkujący powinien skonstruować swoje własne przykłady, w których zostałyby zidentyfikowane «podstawowe zmienne sterowania». Następnie można tworzyć przykłady o bogatszej zawartości. Jedną z podstawowych trudności jest dobór danych. Prawidłowy model teorii katastrof musi wyraźnie identyfikować podstawowe zmienne sterowania. Ścisłość tej identyfikacji zależy od rodzaju problemu.

**2.2. Obwiednia normalnych do paraboli.** Jak wiadomo [7], obwiednią normalnych do paraboli jest ostrze. Ostrze to możemy interpretować jako rzut na płaszczyznę  $x, y$  gładkiej,

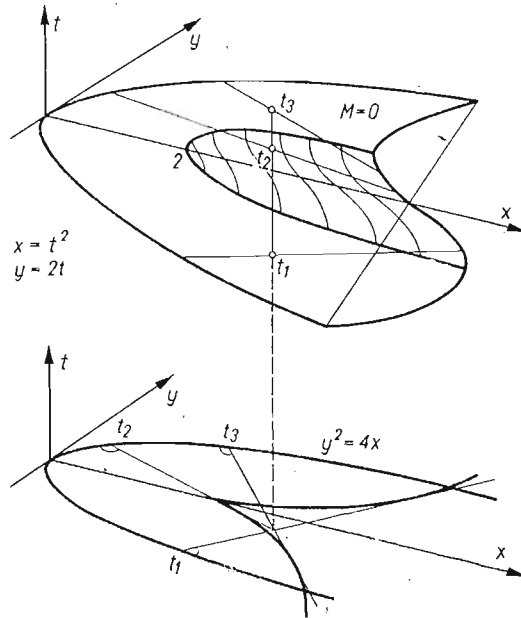
sfałdowanej trójwymiarowej powierzchni w przestrzeni  $x, y, t$ , gdzie  $t$  jest parametrem paraboli.

Normalną do paraboli  $y^2 = 4x$ , na płaszczyźnie  $x, y$  w punkcie  $t^2, 2t$ , jest krzywa

$$(2.1) \quad (y-2t)(x-t^2) = -t$$

lub inaczej

$$(2.2) \quad M(x, y, t) = t^3 - t(x-2) - y = 0.$$



Rys. 3

Powierzchnię tę przedstawiono na rys. 3. Sama linia fałdowa jest gładką krzywą przestrzenną, wzdłuż której płaszczyzna styczna do  $M = 0$  jest pionowa. Jej równanie znaleźć można przez rozwiązanie układu  $\partial M / \partial T = 0$  w połączeniu z  $M = 0$ , co daje

$$(2.3) \quad x-2 = 3t^2, \quad y = -2t^3.$$

Forma parametryczna  $x = t^2, y = 2t$  paraboli może być rozpatrywana (niekonwencjonalnie) jako inna krzywa przestrzenna, która także leży na powierzchni  $M = 0$ .

Rozważmy teraz rzut powierzchni  $M = 0$  na płaszczyznę  $x, y$ . Po wyczerpaniu  $t$  okazuje się, że rzut linii fałdowej jest krzywą o kształcie ostrza

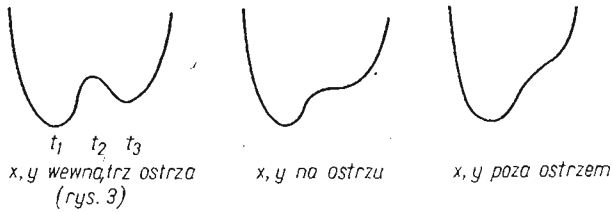
$$(2.4) \quad 4(x-2)^3 = 27y^2,$$

a rzutem paraboli przestrzennej jest jej parabola płaska  $y^2 = 4x$ . Rzuty te pokazano w niższej części rys. 3. Niech  $t_0$  będzie dowolną daną wartością parametru  $t$ . Płaszczyzna pozioma  $t = t_0$  przecina powierzchnię sfałdowaną  $M = 0$  wzdłuż linii prostej. Linia ta przecina wznoszącą się linię fałdową tylko raz i jej rzut jest styczny do ostrza. Ale ten rzut jest także normalny do (płaskiej) paraboli w punkcie odpowiadającym parametrowi  $t_0$ . Wobec tego krzywa o kształcie ostrza jest obwiednią normalnych do paraboli.

Przez każdy punkt płaszczyzny  $x, y$  przechodzi jedna normalna, natomiast przez każdy punkt wewnątrz ostrza przechodzą trzy normalne. Odpowiadające im wartości  $t$  znaleźć można, znajdując wartości np.  $t_1, t_2, t_3$ , dla których oś  $t$  przechodzi przez powierzchnię sfałdowaną (rys. 4).

Istnieje kwadratowy potencjał generujący

$$(2.5) \quad V = 14t^4 - 12t^2(x-2) - ty + 14(x^2 + y^2)$$



Rys. 4

taki, że  $\frac{1}{4}\sqrt{V}$  jest odległością pomiędzy dowolnym punktem  $x, y$  na płaszczyźnie  $x, y$ , a punktem  $t^2, 2t$  na paraboli. Funkcja  $V(t; x, y)$  ma przy tym następujące własności:

$$(2.6) \quad M = \partial V / \partial t, \quad \partial M / \partial t = \partial^2 V / \partial t^2.$$

Stacjonarne ze względu na  $t$  wartości tej odległości (np. gdy położenie paraboli ulega zmianie poprzez zmianę  $t$  w granicach od  $-\infty$  do  $+\infty$ ) odpowiadają wobec tego, jeśli rozpatrujemy po kolei każdy punkt  $(x, y)$ , wszystkim punktom  $(x, y, t)$  powierzchni  $M = 0$ . Gdy zmieniamy położenie paraboli, kwadrat odległości do niej z punktu  $(x, y)$  zachowuje się jak jedna z funkcji kwadratowych pokazanych (dla  $y < 0$ ) na rys. 4, której wartości stacjonarne odpowiadają punktom początkowym normalnych.

Linia fałdowa na  $M = 0$  oddziela punkty o maksymalnej odległości ( $\partial V / \partial t = 0$ ,  $\partial^2 V / \partial t^2 < 0$ , wewnątrz fałdy) od punktów o odległości minimalnej ( $\partial V / \partial t = 0$ ,  $\partial^2 V / \partial t^2 > 0$  na zewnątrz fałdy).

W teorii katastrof parametr  $t$  uznaje się za zmienną stanu, a  $x, y$  za zmienne sterowania. W terminologii mechanicznej  $\partial V / \partial t$  może być uważana za siłę, a fałdowa powierzchnia  $M = 0$  może być uznana za «powierzchnię równowagi». Oczywiście, przy rozważaniach czysto geometrycznych wprowadzanie takiej terminologii nie jest konieczne.

Podstawą komputerowych obliczeń obwiedni (tak zwanych zbiorów bifurkacyjnych) jest metoda tworzenia kolejnych przekrojów poziomych poprzez powierzchnię sfałdowaną i rzutowanie tych prostych na powierzchnię sterującą. Metoda ta została zastosowana do wszystkich elementarnych katastrof o wymiarze  $\leq 4$ , badanych przez WOODCOCKA i POSTONA [8]. Może ona być porównana z metodą analityczną eliminacji  $t$  z równań  $M = \partial M / \partial t = 0$ .

Istnieje tu wyraźny związek z teorią optymalizacji, przejawiający się w szukaniu minimalnej odległości od zbioru wypukłego (parabola) nie tylko punktów na zewnątrz, lecz również i wewnątrz zbioru. Problemy dualne i przytoczone problemy punktu siodłowego mogą być również rozpatrywane z punktu widzenia teorii katastrof.

## 3. Co to jest teoria katastrof?

Teoria katastrof zajmuje się, w szczególności, określaniem pewnych podstawowych lokalnych cech jakościowych rozwiązań równań typu

$$(3.1) \quad \partial V / \partial x = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

otrzymanych z danego gładkiego potencjału generującego  $V(x, \lambda_\alpha)$  z  $n$  zmiennymi stanu  $x_i$  i  $k$  parametrami sterującymi  $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, k$ ). Tych  $n$  równań, wiążących  $n+k$  zmiennych, określa  $k$ -wymiarową «rozmaitość katastrofy» [8], lub «powierzchnię równowagi» [9]. Na tej powierzchni istnieje pewna «granica stabilności» [9], na której zeruje się wyznacznik

$$(3.2) \quad \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right| = 0,$$

(np. linia fałdowa na rys. 3, na której płaszczyzna styczna do powierzchni równowagi jest prostopadła do przestrzeni sterującej). W tym sensie granica stabilności określa stany «równowagi krytycznej», dla których  $V$  może przestać być lokalnym minimum, co odpowiada osobliwościom rzutu powierzchni równowagi na przestrzeń sterowań. Jako konsekwencja tego rzutowania — granica stabilności w przestrzeni sterowania — (otrzymana w zasadzie przez wyeliminowanie  $n$  parametrów  $x$  z kolejnych  $n+1$  równań) jest  $k-1$  wymiarowym «miejszem upadku» uzależniającym  $k$  parametrów sterujących (np. samo ostrze na rys. 3). To miejsce upadku jest nazywane w teorii katastrof «zbiorem bifurkacji».

Twierdzenie Thoma [1, 3, 6] identyfikuje możliwe zbiory bifurkacji jako równoważne, w określonym sensie technicznym, z jedną z małej liczby katastrof nazwanych «katastrofami elementarnymi». Liczba ta jest skończona (w rzeczywistości  $\leq 11$ ), jeżeli  $k \leq 5$ , niezależnie od wartości  $n$  (która w takim razie może wynieść wiele tysięcy; pozwala to rozważać układy, które już zostały zdyskretyzowane, np. przez podział na elementy skończone i stosować zasady wariacyjne).

Jeśli wymiar przestrzeni sterowania  $k \leq 4$ , to wtedy istnieje co najwyżej 7 katastrof elementarnych. Są one wyrażalne [10] poprzez «wygładzenie» zwykłych wielomiarowych «zarodków» dla jednej lub dwu zmiennych stanu. W tablicy 1 przytoczono listę Thoma możliwych katastrof. Zmienne sterowania zostały w przedstawionej wersji ograniczone do  $u, v, w, t$ .

Przykład ostrza z poprzedniego rozdziału można otrzymać przez prostą zmianę zmiennych:  $(x, n, v) \rightarrow (t, 2-x, y)$ .

Przy stosowaniu teorii katastrof do konkretnego problemu nasuwa się pytanie, ile występuje w nim podstawowych parametrów sterowania i jaka jest ich interpretacja? Jeśli mamy do czynienia z zastosowaniem mechanicznym,  $V$  może być energią potencjalną systemu z  $x$  jako współrzędnymi uogólnionymi, a w mechanice konstrukcji, na przykład, parametry sterowania mogą być kombinacją obciążeń, wymiarów, niedokładności lub modułów [9]. Elastyczność spojrzenia jest sprawą na tym etapie zasadniczą, ponieważ zmienne sterowania pokazane na powyższej liście wygładzeń mogą nie mieć prostych interpretacji, np. mogą być algebraiczną kombinacją prostych sterowań fizycznych. Co więcej, nawet w kontekście mechanicznym,  $V$  nie musi być energią potencjalną. W rzeczywistości może przedstawiać (po dyskretyzacji) dowolny funkcjonal wynikający z zasad wariacyjnych. Ten ostatni może być rodzaju «mieszanego» i mieć jako zmienne zarówno

Tablica 1. Tablica Thoma

Nazwa	Centrum organizacyjne	Uniwersalne wygładzenie
Zwykle minimum	$V = x^2$	$V = x^2$
Falda	$V = \frac{1}{3} x^3$	$V = \frac{1}{3} x^3 + ux$
Ostrze	$V = \frac{1}{4} x^4$	$V = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ux^2 + vx$
Jaskółczy ogon	$V = \frac{1}{5} x^5$	$V = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} ux^3 + \frac{1}{2} vx^2 + wx$
Motyl	$V = \frac{1}{6} x^6$	$V = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{4} ux^4 + \frac{1}{3} vx^3 + \frac{1}{2} wx^2 + tx$
Umbilik hiperboliczny	$V = x^3 + y^3$	$V = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$
Umbilik eliptyczny	$V = x^3 - 3xy^2$	$V = x^3 - 3xy^2 + wx^2 + y^2 - ux - vy$
Umbilik paraboliczny	$V = xy^2 + x^4$	$V = xy^2 + x^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$

wielkości kinematyczne, jak i dynamiczne (takie jak przemieszczenia i naprężenia). W tym sensie wydaje się, że nie ma powodu, by zmienne stanu musiały być koniecznie zmiennymi konfiguracji, ale szczegółowe przykłady muszą dopiero zostać przebadane.

Zakładając, że wielkość  $k$  została prawidłowo ustalona, wybieramy z tablicy Thoma te wygładzenia uniwersalne, które zawierają  $k$  parametrów sterowania (zauważmy, że wszystkie one występują liniowo). Lokalny zbiór bifurkacyjny w początkowym układzie  $n$ -wymiarowym, w przestrzeni sterowań, powinien być równoważny jakościowo jednemu z układów narzuconych przez wybrany rodzaj wygładzenia. Analiza tego ostatniego jest łatwiejsza, ponieważ duża liczba mniej ważnych zmiennych stanu została usunięta podczas sekwencji rzutowań zawartych w dowodzie twierdzenia Thoma. Zbiory bifurkacyjne wyprowadzone z potencjałów, zawartych w tablicy Thoma, zostały dokładnie przebadane przez WOODCOCKA i POSTONA [8].

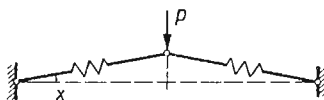
Jeśli  $k = 2$ , to istnieją co najwyżej dwa wygładzenia do wyboru, jeśli  $k = 3$  jest ich co najwyżej 5. W praktyce wybór może być jeszcze bardziej zawężony przez spodziewany stopień wyrażeń w funkcji stanu. Na przykład przy nieliniowych «małych, ale skończonych» odkształceniach sprężystych, energia odkształcenia wyrażona w naprężeniach jest formą kwadratową, a naprężenia są z kolei formami kwadratowymi gradientu przemieszczeń. Dzięki temu możemy nie spodziewać się występowania wyrażeń o stopniu wyższym niż 4.

Idea wygładzenia jest ważna również z powodów, które wymienimy poniżej. Nie tylko każdy z centrów organizujących można otrzymać przez nadanie zmiennym sterowania z tablicy wartości zero, ale i odwrotnie — istnieje topologiczna równoważność, w której każda zmienna każdego z tych centrów może być reprezentowana przez odpowiednie wygładzenie uniwersalne. Oznacza to, że centrum organizujące, w rzeczywistości, rozdziela wygładzenie na zwykłe wielomiany ze współczynnikami liniowymi. W mechanice, w odróżnieniu od biologii, centrum organizujące może być nazwane fundamentalnym, naturalnym albo podstawowym. Zakłada się, że np. konstrukcja inżynierska, albo sieć krystaliczna zawierają w sobie pewne trywialne stany będące źródłem ich lokalnej ewolucji, która musi być opisana jakościowo przez uniwersalną energię wygładzenia.

W następnym rozdziale zostaną opisane proste modele matematyczne, dające precyzyjną ilustrację katastrofy ostrzowej, z różną interpretacją zmiennych sterowania i energii wygładzenia. Istnieje w analizie problem pewnych zadań mechanicznych, które nie pasują dokładnie do żadnej z energii wygładzeń zestawionych w tabelicy 1.

#### 4. Przykłady zastosowania teorii katastrof w mechanice

4.1. Łuk mało wyniosły. Wieczko puszek z herbatnikami może być w przybliżeniu rozpatrywane jako mało wyniosła powłoka sferyczna podparta przegubowo wzdłuż obwodu. Naciśnięta w środku może nagle «przeskoczyć» przez płaszczyznę oparcia przegubowego do drugiego położenia równowagi o przeciwnej wypukłości i pozostać w tym położeniu mimo braku obciążenia.



Rys. 5

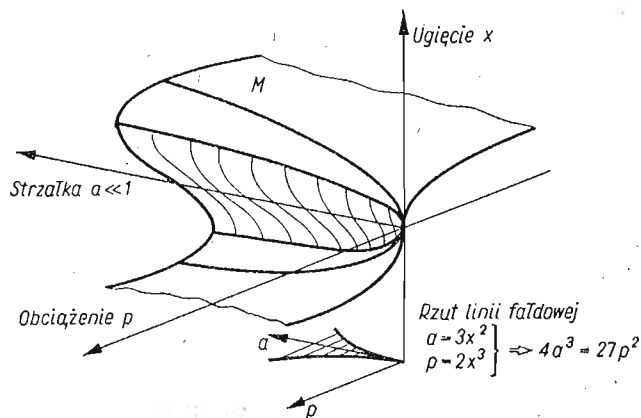
Pokazany na rys. 5 płaski model składa się z dwu sprężystych prętów ściskanych, o równej długości, opartych przegubowo na podporach, połączonych i obciążonych w węzle środkowym. Konfiguracja modelu opisana jest przy pomocy kąta  $x$  i «strzałki» łuku,  $a = 2/l - \cos \alpha \approx \alpha^2 > 0$  dla małych  $\alpha$ , gdzie  $x = \pm \alpha$  (lub zero), gdy obciążenie  $p = 0$ .

Unormowana energia potencjalna, wyprowadzona w sposób przybliżony dla małych ugięć, ma postać

$$(4.1) \quad V = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 + px.$$

Powierzchnia równowagi  $M$  w przestrzeni  $x, a, p$  jest dana równaniem

$$(4.2) \quad x^3 - ax + p = 0,$$

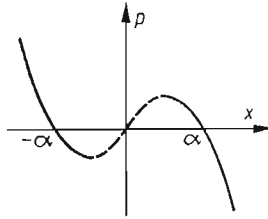


Rys. 6



wyprowadzonym z warunku  $\partial V/\partial x = 0$  i przedstawionym na rys. 6. Jak widać, przedstawia ona powierzchnię fałdową. Rzut linii fałdowej na płaszczyznę  $a, p$  ma kształt ostrza.

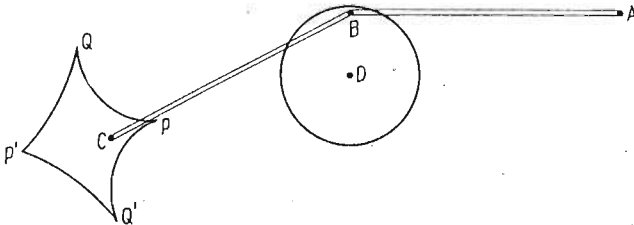
Model ten może być więc rozpatrywany jako prosty przykład uniwersalnego wygładzenia, któremu odpowiada katastrofa ostrzowa z tablicy Thoma. Zmiennymi sterującymi są obciążenie  $p$  i «strzałka»  $a \ll 1$ . W ten sposób można rozpatrzeć rodzinę łuków. Ilustruje to elastyczność podejścia, która może być wymagana przy korzystaniu z teorii katastrof; nie wszystkie parametry muszą być zmiennymi w pojedynczym zadaniu. Krzywa obciążenie–ugięcie powstaje jako przekrój powierzchni  $M$  z płaszczyzną prostopadłą do osi  $a$ , co pokazano na rys. 7. Katastrofą jest gwałtowny przeskok; zaciemniony obszar wewnątrz fałdy na rys. 6 reprezentuje niestabilne stany równowagi. Ten sam kształt rzutu (ostrze) wywiera wpływ na formę rys. 16, podanego dalej, w obszarze, w którym  $A = 0$  i  $a \rightarrow 0$ .



Rys. 7

Można by się spytać, czy dyfuzja lub zagęszczenie defektów punktowych w wyniku działania siły na barierę potencjału pomiędzy dwoma atomami siatki krystalicznej ma podobny model lokalny, ktoś inny mógłby zauważyć, że charakterystyka napięcia prądu elektrycznego w diodzie tunelowej jest topologicznie podobna do krzywej na rys. 7.

**4.2. Maszyna katastroficzna Zeemana.** Jest to prosty przyrząd, który również ilustruje przeskok przy utracie stateczności. Może on być łatwo wykonany przy pomocy trzech pinesek, dwu pasków gumowych i koła ze sztywnej tektury. Całość powinna być złożona



Rys. 8

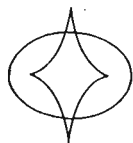
jak na rys. 8. Urządzenie to umożliwia szybką demonstrację powstawania ostrza w przestrzeni sterowań. Pineski  $A$  i  $D$  są przymocowane do podłoża, kółko może się obracać dookoła punktu  $D$  (np. dzięki małej podkładce pomiędzy kołem a podłożem). Pineska  $B$  wpięta jest w koło w pobliżu jego brzegu. Jeden z pasków gumowych rozpięty jest pomiędzy punktami  $A$  i  $B$ . Jeden z końców drugiego paska przymocowany jest do punktu  $B$ ,

a drugi koniec tego paska  $C$  służy jako punkt sterujący (np. przy pomocy szpilki przechodzącej przez pasek w punkcie  $C$ ).

Poruszając powoli końcem  $C$  można znaleźć takie położenie, w którym nastąpi gwałtowny przeskok na odwrotną stronę linii  $AD$ . Jeśli zrobimy to wielokrotnie i jeśli zaznamy igłą te punkty, w których nastąpił przeskok, wtedy okaże się, że na papierze powstała krzywa ostrzowa. Czułość urządzenia zależy od wielkości tarcia na osiach obrotów. Dogodnością tego przyrządu jest to, że zmiennymi sterowania są dwie współrzędne punktu  $C$ , a zatem, płaszczyzną sterowania jest tu płaszczyzna, na której wykonuje się doświadczenie. Dzięki temu krzywą ostrzową otrzymuje się bezpośrednio. W żargonie mechaniki stosowanej został tu użyty «przyrząd o sztywnym obciążeniu», który pokazuje nie wartość przyłożonego obciążenia, lecz jego położenie. Fizyczna interpretacja zmiennych sterowania jest wobec tego całkiem inna niż ta, która dotyczyła zmiennych  $p$  i  $a$  w poprzednim przykładzie.

Omawiany przykład został dokładnie zanalizowany w [11] i [12]. Rozwiązanie ogólne powierzchni równowagi ma linię fałdową oddzielającą obszary stateczne od niestatecznych [11], taką że jej rzut ma cztery ostrza, jak to pokazano na rys. 8. Dwie części  $QPQ'$  i  $QP'Q'$  tego rzutu (lub zbioru «bifurkacji» jak można by to nazwać w teorii katastrof, lecz nie w mechanice) odpowiadają przeskokom odpowiednio po lewej i po prawej stronie punktu  $D$ .

4.3. Ewoluta elipsy. Obwiednią normalnych do elipsy (ewolutą) jest, jak wiadomo [7], krzywa z czterema ostrzami w płaszczyźnie sterowań  $x, y$ , jak to pokazano na rys. 9. Można postawić pytanie: jaka powinna być rozmaitość katastroficzna  $M$  w trójwymiarowej przestrzeni  $x, y, t$ , jeżeli  $t$  jest parametrem elipsy? Rozwiązanie globalne dla paraboli, podane wcześniej, okazało się takie same jak rozwiązanie lokalne, gdy istnieje tylko



Rys. 9

jedna fałda. Globalna obwiednia, albo zbiór bifurkacji, dla elipsy ma cztery ostrza i bardzo przypomina konchoidę Nikomedesa (rys. 8) otrzymaną dla maszyny katastroficznej. Czy istnieje więc ścisły związek pomiędzy gładką sfałdowaną rozmaitością ( $M$  maszyny) pokazanej w [11] (i elipsy)? Czytelnik łatwo znajdzie na to odpowiedź.

4.4. Słupy i tarcze. Jest to klasa konstrukcji, które, jeśli są obciążone mimośrodowo podczas idealnego eksperymentu (bez «niedokładności»), pozostają najpierw proste, ale mogą zachować pewną wytrzymałość nawet po rozgałęzieniu się (bifurkacji) drogi równowagi narysowanej we współrzędnych obciążenie–przemieszczenie w stanie wyboczonym. Najbardziej znanym przykładem są tzw. elastica (patrz [13], gdzie zamieszczono nowoczesną interpretację tego zjawiska). Model teoretyczny pokazany na rys. 10 składa się ze sztywnego elementu w kształcie litery  $T$  mającego na końcu wspornika małą półkę o długości  $\eta$ , na końcu której przyłożono pionowo siłę skupioną  $P$ , [9]. Obrót dookoła

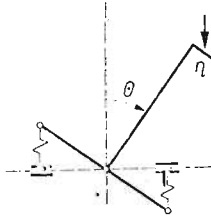
punktu 0 jest ograniczony przez dwie sprężyny, które przenoszą tylko siły pionowe. Całkowita energia potencjalna (unormowana) wynosi

$$(4.3) \quad V = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta - p(1 - \cos \theta + \eta \sin \theta)$$

i dla małych kątów  $\theta$  przyjąć można

$$(4.4) \quad V = \frac{3}{8} \theta^4 - \frac{1}{2} (p-1) \theta^2 - p\eta \theta.$$

Rzut oka na tablicę Thoma upewnia, że jest to jeszcze jeden przykład katastrofy ostrzowej. Zmiennymi sterującymi są tym razem obciążenie  $p-1$  i «niedokładność»  $p\eta$ . Teoria



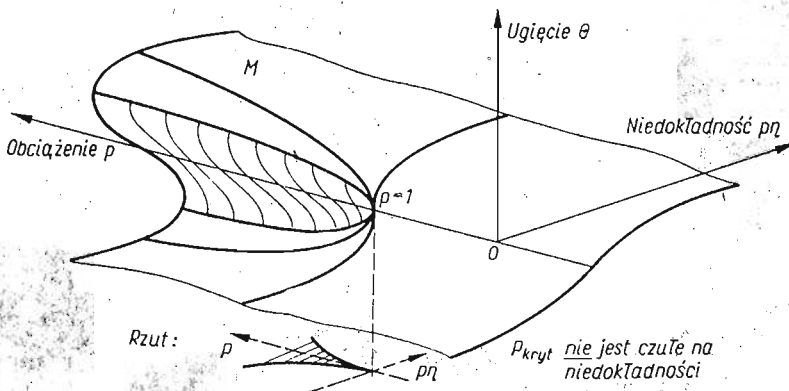
Rys. 10

wyglądzenia może z powodzeniem wskazać wyrażenie, które można zinterpretować jako efekt nieuniknionego powstania małej pary sił, natychmiast po przyłożeniu głównego obciążenia. Historycznie rzecz biorąc, takie niedokładności były czasem pomijane w początkach analizy mechanicznej.

Powierzchnia równowagi  $M$  jest dana równaniem  $\partial V / \partial \theta = 0$ , co prowadzi do

$$(4.5) \quad \frac{3}{2} \theta^3 - (p-1)\theta - p = 0.$$

Pokazano ją na rys. 11. Podobnie jak na rys. 7, ilustrującym zachowanie się mało wyniosłego łuku płaskiego, stany równowagi chwiejnej (maksimum potencjału  $V$  względem  $\theta$ , przy

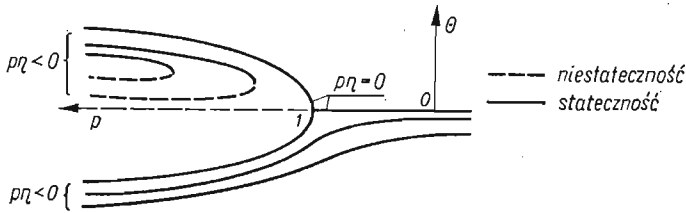


Rys. 11

ustalonych  $p$  i  $\eta$ ) pokrywają się z zakreskowanym obszarem powierzchni  $M$  (wewnątrz fałdy), podczas gdy stany stateczne znajdują się po drugiej stronie fałdy.

To, że ostrze jest rzutem gładkiej powierzchni fałdowej, zostało pokazane w pracy [9], gdzie również wprowadzono pojęcie powierzchni równowagi w sensie mechanicznym.

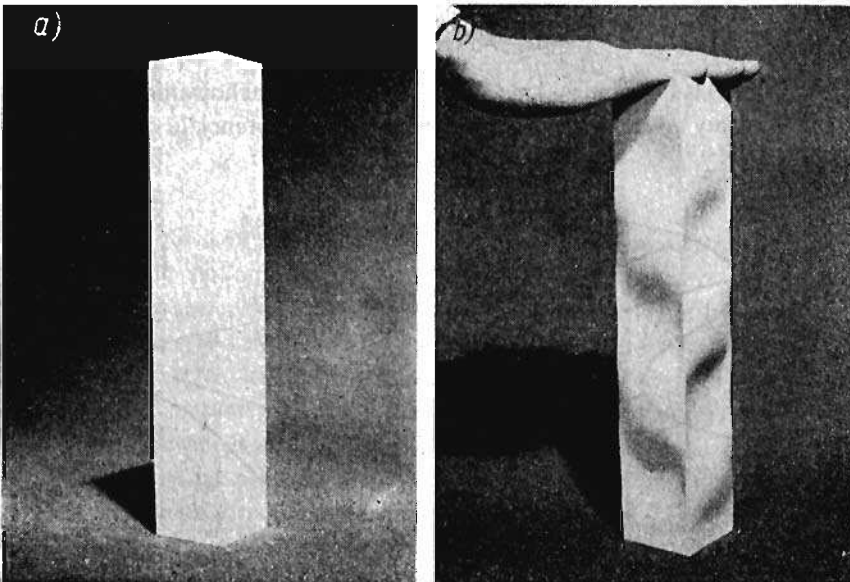
Przekroje powierzchni  $M$  płaszczyznami  $p\eta = \text{const}$  pokazano na rys. 12. Wytrzymałość układu po rozgałęzieniu (wspomnianym powyżej) pokazano jako przekrój powierzchni  $M$  płaszczyzną  $p\eta = 0$ . «Niedokładne» drogi równowagi (obydwa znaki  $p\eta$ ) wykazują te same tendencje, ale nie ma tu rozgałęzienia. Można to zademonstrować obciążając



Rys. 12

kwadratową rurę z materiału gumopodobnego (rys. 13). Wykonano ją w ten sposób, że każdy z jej czterech boków zachowuje się jak sprężysta tarcza prostokątna, o brzegach swobodnie podpartych; poddana ścisnaniu mimośrodowemu. Doświadczenia na takich rurach opisano w pracy [14].

**4.5. Tarcze zakrzywione i powłoki.** Jest to klasa konstrukcji, których własności zależą w znacznym stopniu od wielkości pewnych parametrów geometrycznych. Dla pewnych ich wartości wytrzymałość wybocheniowa rzeczywistej konstrukcji jest bardzo czuła na nie-

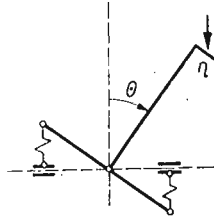


Rys. 13

dokładności wykonania. Konstrukcje o idealnych wymiarach, bez niedokładności wykazują po rozgałęzieniu znacznie zredukowaną wytrzymałość. Powodem tego jest niestabilność samego punktu rozgałęzienia [15, 16], odwrotnie niż ma to miejsce w przypadkach opisanych w poprzednim rozdziale.

Ilustracją tej własności może być tarcza zakrzywiona, ściskana równoległe do tworzących, o dostatecznie dużej krzywiznie [17]. W przypadku małej krzywizny punkt rozgałęzienia jest stabilny.

Jako prosta ilustracja służyć może konstrukcja wykonana przez dodanie pionowych sprężyn (w miejsce stałych podpór) do ramion elementu  $T$  [9], jak to przedstawiono na

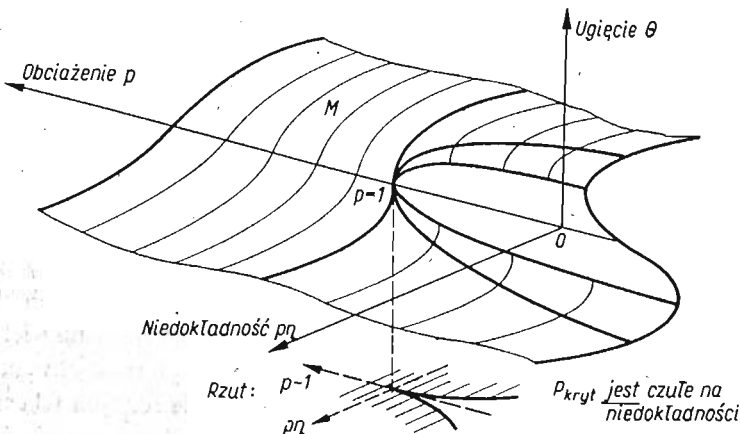


Rys. 14

rys. 14. Rozpiętość podpór może się teraz zmniejszyć podczas obciążenia, a nie pozostaje zawsze stała, jak to było w przypadku konstrukcji pokazanej na rys. 10. Unormowana energia odkształcenia wynosi teraz, dla małych  $\theta$ :

$$(4.6) \quad V = \frac{1}{2} \sin^2 \theta - p(1 - \cos \theta) + \eta \sin \theta = -\frac{1}{8} \theta^4 - \frac{1}{2} (p-1) \theta^2 - \eta \theta.$$

Zmiana znaku członu z  $\theta^4$  ma bardzo duży wpływ na kształt powierzchni równowagi  $M$  (rys. 15). Fałda zawiera teraz punkty stabilne, a nie niestabilne jak poprzednio. Zwrot osi  $p$  uległ zmianie i jest teraz skierowany od ostrza. Wskazuje to, że małe niedokładności



Rys. 15

$p$  wywołują teraz znaczne zmniejszenie  $p_{kr}$  (tj. wartości  $p$  na linii fałdowej) w stosunku do wartości  $p = 1$  dla punktu rozgałęzienia. Użycie pojęcia ostrza jest analitycznym ujęciem czułości na niedokładność tak jak zostało ono użyte przez KOITERA [15, 16], który również narysował «separatryse», czyli rzut linii fałdowej na płaszczyznę  $\eta\eta = 0$ , ale nie wprowadził trójwymiarowej powierzchni równowagi.

4.6. Wyboczenie drugoplanowe i pewne związane z nim problemy. Dotychczas skoncentrowano uwagę na katastrofie ostrzowej, by podkreślić różnorodność interpretacji możliwą dla jednego przypadku. Punktem krytycznym jest tutaj punkt równowagi, dla którego układ

$$(4.7) \quad \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} - \omega m_{ij} \right) p_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ma  $n$ -krotną zerową wartość własną ( $m_{ij}$  jest macierzą dodatnio określoną). Jeśli  $m = 1$ , to zagadnienie jest proste, a rzutowanie prowadzące do ostrza po prostu zbiera wszystkie niekrytyczne współrzędne w pojedynczą zmienną stanu  $x$ , która występuje w ustalonym wygładzeniu (podobnie dzieje się w przypadku innych elementarnych katastrof o wymiarach jeden). Łatwo jest pokazać rzutowanie dla  $m = 1$ , np. przez zastosowanie [18] metod rozwiniętych w mechanice konstrukcji [19, 20]. Trzeba pamiętać, że w jakościowym kontekście mechaniki rzeczywista «wyttrzymałość» osobliwości, tj. wielkość krzywizny w punkcie ostrza, może być znaczna [13, 21], i wobec tego klasyfikacja jakościowa w twierdzeniu Thoma nie rozwiązuje całego problemu, nawet jeśli porządkuje go częściowo.

Katastrofa fałdowa może być rozpatrywana w podobny sposób w przypadkach, w których w wyrażeniu na energię pomijamy człony sześciennne. Wtedy powierzchnia równowagi jest pojedynczą gładką fałdą, zawierającą zmianę stateczności typu Poincarego w punkcie, w którym dwie drogi równowagi przecinają się na linii fałdowej. Ponieważ jednak odległość mierzona wzdłuż linii fałdowej nie oddaje teraz żadnych zmian jakościowych, mamy tu w istocie rzeczy do czynienia tylko z jedną zmienną sterującą (np. w kierunku poprzecznym do fałdy lub punktu granicznego), a zmienna  $u$  — w wygładzeniu  $1/3(x^3) + ux$  — może mieć złożoną interpretację mechaniczną [22] (np. niedokładność minus kwadrat obciążenie).

Katastrofa ostrzowa może być tu rozpatrywana jako «organizująca» dwie fałdy (katastrofa wyższego rzędu organizuje katastrofę niższego rzędu w sposób hierarchiczny [8]).

Zwykle minimum w tablicy Thoma może być rozpatrywane jako ilustracja twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań w teorii sprężystości. Rozpatrzmy np. sprężynę (o długości  $l$  i module  $\lambda$ ) podpierającą masę  $m$ , przemieniającą się o  $y$ , dla której energia

$$(4.8) \quad V = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} y^2 - mgy = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} \left( y - \frac{mgl}{\lambda} \right)^2 + \text{const.}$$

Jeśli dwie lub więcej wartości własnych  $\omega$  znajdzie się w tym samym lub bliskich sobie punktach na powierzchni równowagi, można wtedy mówić o wyboczeniu wielomodulnym, albo o pierwszoplanowym i drugoplanowym wyboczeniu o pewnej sekwencji; mogą tu powstać różne problemy związane z oddziaływaniem na siebie różnych schematów wyboczenia (np. [13, 23]). Teoria katastrof gwarantuje, że jeżeli liczba sterowań nie przekracza czterech, to w jakościowym lokalnym opisie zbioru bifurkacji wszystkie możliwe postacie


wybożenia mogą być opisane nie więcej niż dwoma (odpowiednio dobranymi) zmiennymi stanu. Gdy krotność zerowej wartości własnej  $\omega$  jest  $m \geq 2$ , konieczne staje się uwzględnienie nowych powierzchni fałdowych, mianowicie trzech umbilików wymienionych w tablicy 1 Thoma.

Oczywiście, gdy  $m > 2$  rzutowanie, które zmniejsza liczbę zmiennych problemu, redukuje nie tylko wszystkie niekrytyczne współrzędne, lecz również pewne współrzędne krytyczne do dwu (lub jednej) zmiennych stanu pojawiających się w wygładzeniach. Wspomniane powyżej metody bezpośredniego rozwiązywania problemów nie korzystały, jak dotychczas, z tego ostatniego typu redukcji i prawdopodobnie dokładne zrozumienie go leży w przestudiowaniu sekwencji rzutowań stosowanych w dowodzie twierdzenia Thoma [1]. Powstaje pytanie, jak z mechanicznego punktu widzenia interpretować bezpośrednio dwie zmienne stanu  $x$  i  $y$  w problemach wielowymiarowych. Wydaje się, że mogą one reprezentować pewne ogólne cechy np. form deformacji, takie jak symetryczna (rys. 6) i antysymetryczna postać wybożenia.

Wycinek powłoki kulistej (niezbyt płaski) przechodzi w postać antysymetryczną, zanim zostanie osiągnięte maksymalne obciążenie, wynikające z wykresu na rys. 17. Obciążoną siłą skupioną kupa winylowa wyboży się według «trójroźnego» schematu utraty stateczności (model ten przedstawił prof. LECKIE z Uniwersytetu w Leicester).

Próbki rozciągane (zarówno pręty metalowe [24], jak i monokryształy [25, 26, 27]) mogą tracić stateczność na skutek powstania szyjki lub ścięcia, przed lub po osiągnięciu obciążenia maksymalnego.

Istnieją dane, że przykłady te są ilustracjami umbiliku hiperbolicznego ze zmiennymi  $x$  i  $y$  stowarzyszonymi odpowiednio z przemieszczeniami normalnym i stycznym. Szeroka tarcza z usztywnieniami, może wykazywać zarówno lokalną, jak globalną postać wybożenia i jeśli  $x$  i  $y$  są ich kombinacją [28] umowna energia potencjalna redukuje się wtedy [18] do takiej, jak dla umbiliku hiperbolicznego. Praca [18] zawiera jednak również mylące stwierdzenia i nieprawdziwe interpretacje, np. stwierdza ona, że tylko mechaniczne zmienne sterowania (poza obciążeniem) mogą być niedokładnościami. Przykłady przytoczone powyżej i poniżej przeczą temu wyraźnie.

 Dwupostaciowe przybliżone rozwiązanie HUTCHINSONA [29] dla początku pokrytycznego zachowania się zamkniętej powłoki sferycznej poddanej ciśnieniu zewnętrznemu jest ogólnie uważane za akceptowalne. Nie ogranicza się ono do przemieszczeń obrotowo-symetrycznych i jego zredukowane równania równowagi mogą być rozpatrywane jako wprowadzone z energii unormowanej

$$(4.9) \quad V = -3xy^2 + wx^2 + y^2 - ux - vy.$$

Tutaj  $w$  oznacza nadwyżkę obciążenia ponad wartość odpowiadającą podwójnemu punktowi rozgałęzienia, a  $u$  i  $v$  są parą niedokładności początkowych. Nie zachodzi tu liniowe rzutowanie, które przeprowadziłoby  $xy^2$  w centra organizujące wymienione dla umbiliku eliptycznego i hiperbolicznego. Jednakże jest to zbyt mało, aby można było domniemywać, że problem ten może być ilustrowany umbilikami parabolicznym.

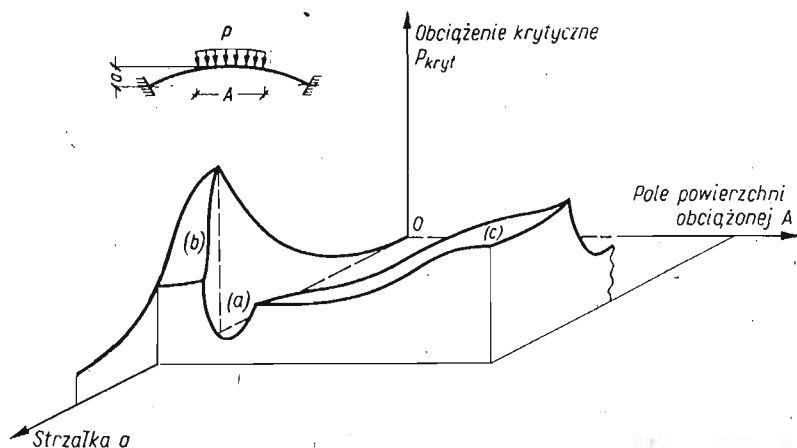
W ogólności, niedokładność może być wprowadzona od początku do każdej postaci wybożenia, tj. stowarzyszona z każdym wektorem własnym odpowiedniego problemu wartości własnych. Oznacza to istnienie wzajemnie jednoznacznego związku pomiędzy

niedokładnościami i  $n$  — początkowymi zmiennymi stanu. Co więcej, niedokładności mogą być sterowaniami i fakt ten musi być jakoś omijany w procesie redukcji zmiennych, jeśli mamy zidentyfikować  $\leq 4$  pierwszoplanowych zmiennych sterowania, a następnie podać związek pomiędzy nimi a co najwyżej dwiema efektywnymi zmiennymi stanu.

Jest jeszcze za wcześnie, by powiedzieć dokładnie jak to wykonać. Rozważmy jednak najczęściej chyba omawiany z problemów sprężystej niestateczności przykład długiego walca poddanego ścisłaniu osiowemu. W pracy [30] wykazano, przy dość ogólnych założeniach, że w rzeczywistości można spotkać tylko pięć kombinacji algebraicznych niedokładności kształtu. Problem redukuje się, w pewnym stadium, do dwu równań równowagi, które mogą być wyprowadzone z unormowanego potencjału

$$(4.10) \quad V = \frac{t_0 w + t_1 w + t_2 y}{w^2 - x^2 + y^2} - wx^2 + y^2 - uw - vy.$$

Tu również przez  $w$  oznaczono nadwyżkę obciążenia ponad jego wartość dla punktu rozgałęzienia, podczas gdy  $u, v, t_0, t_1, t_2$  są członami typu obciążenie niedokładności (podniesione do kwadratu w przypadku  $t_1$ ). Problem ten wymaga dalszych studiów.



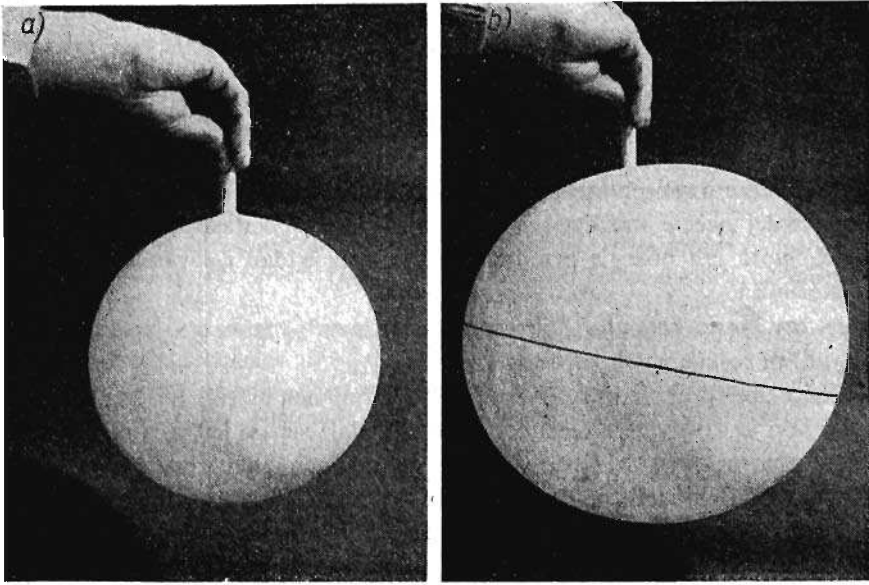
Rys. 16

Bardzo interesujące jest prześledzenie zmiany powierzchni równowagi powłok i kulistej (np. rys. 16), jeśli zwiększa się strzałka  $a$ . Jak już wspomniano, może się tu pojawić bifurkacja antysymetryczna. W przypadku wycinka powłoki kulistej, utwierdzonej na obwodzie, przebadano nie tylko efekt zmiany strzałki  $a$ , lecz również efekt zmiany powierzchni obciążonej  $A$  [31]. (Gdy  $A = 0$ , to obciążenie występuje tylko w jednym punkcie;  $A = 1$  oznacza równomierne obciążenie na całej powierzchni). Trzy przekroje globalnego zbioru bifurkacji (z wygładzonymi stanami przejściowymi) w przestrzeni sterowania  $(P, a, A)$  przedstawiono łącznie na rys. 16.  $P$  jest tu obciążeniem całkowitym. Czwartym parametrem sterowania może być antysymetryczna (nie symetryczna) niedokładność; tu przyjęto ją równą zeru. Wydaje się, że istnieją co najmniej trzy zasadnicze, łączące się obszary: a) długa dolina utraty stateczności przez przeskok bez bifurkacji oraz rozdzielające obszary b) i c), tj. powierzchnię stabilnej bifurkacji dla obciążeń rozłożonych na małej powierzchni i powierzchnię niestabilnej bifurkacji dla obciążeń rozłożonych na dużej powierzchni.

Można zauważyć, że wygładzenie ostrzowe może być osadzone w umbiliku parabolicz-



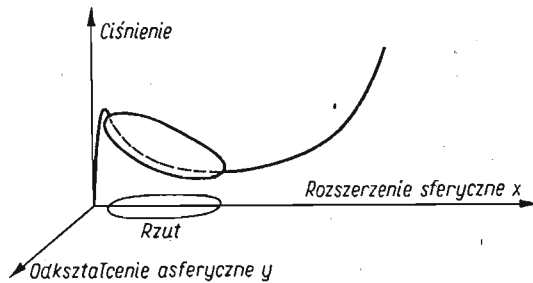
nym (przez przyjęcie  $y = 0$ ). Pamiętając równanie zilustrowane rys. 6, można przyjąć, że istnieją podstawy, by interpretować  $y$  jako postać asymetryczną. Istnieje jednak niebezpieczeństwo, że jakiegokolwiek uproszczone rozważanie o odpowiednim umbiliku mogłoby być nieuzasadnione.



Rys. 17

Jako ostatni przykład mechaniczny rozpatrzmy gumowy balon meteorologiczny i jego zachowanie się podczas napełniania. Jak każdy balon stawia on znaczny opór w początkowej fazie, dopóki nie osiągnie się maksymalnego ciśnienia gazu. W tym stadium balon jest kulisty (rys. 17a), lecz zaraz potem ciśnienie zaczyna spadać, a rozmiary balonu rosną (napełnianie określone jest masą gazu, a nie jego ciśnieniem), a jego kształt staje się wyraźnie asferyczny (rys. 17b). Stan ten trwa dopóki ciśnienie nie osiągnie bardzo płytkiego minimum, przy znacznie powiększonych rozmiarach balonu, po czym balon powraca do kształtu kulistego [32].

Jeżeli niedokładności kształtu balonu (względem idealnej sfery) przyjmą za równe zero, to można by przypuszczać, że trajektorie globalnej równowagi balonu względem konfiguracji kulistosymetrycznej ( $x$ ) i asymetrycznej ( $y$ ) są takie, jak pokazano na rys. 18.



Rys. 18

Powstaje pytanie, czy można to rozpatrywać jako rozwinięcie sytuacji z rys. 7. Można by również uważać, że wersja lokalna sytuacji z rys. 12 każdej z obu bifurkacji jest właściwa z punktu widzenia teorii katastrof.

### 5. Zakończenie

Jak widać, można podać szereg zadziwiająco dokładnych przykładów mechanicznych dla wygładzeń wymienionych w tablicy Thoma. W związku z tym, większego znaczenia nabiera badanie rzutowań potrzebnych do klasyfikowania przykładów bardziej złożonych. Pozwoli to lepiej ocenić możliwości zastosowania teorii katastrof w nieliniowej teorii sprężystości, która jest obecnie przedmiotem licznych badań i stwarza wiele możliwości takich zastosowań.

Pytanie, czy teoria katastrof doprowadzi do nowych rozwiązań (a nie tylko nowych sformułowań) pozostaje na razie otwarte.

Na zakończenie spróbujemy odpowiedzieć, w terminach teorii katastrof, na nieuniknione pytanie: jaki jest pożytek z teorii katastrof. Wydaje się, że jedną z jej właściwości jest to, że dzieli ona matematyków, dosyć silnie, w opiniach o jej użyteczności, zależnie od ich zaangażowania w podejścia jakościowe lub ilościowe. Ci, którzy podchodzą do problemów z bardziej otwartym umysłem znajdują się w pobliżu granicy obszaru konfliktowego. Mogą zatem zostać nawróceni na wiarę w teorię katastrof (wzrost zaangażowania) lub się do niej zniechęcić (spadek).

### Literatura cytowana w tekście

1. D. J. A. TROTMAN, E. C. ZEEMAN, *The classification of elementary catastrophes of codimension  $\leq 5$* , Warwick University, Preprint, 1974.
2. E. C. ZEEMAN, *Primary and secondary waves in developmental biology*, Lect. on Math. in the Life Sciences, 7, Amer. Math. Soc., Providence, USA, 1974.
3. R. THOM, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, Benjamin, New York 1972.
4. D. CHILLINGWORTH, *The catastrophe of buckling beam*, Proc. Symp. on Appli. of Topology and Dynamical Systems, University of Warwick, 1973/4.
5. M. J. SEWELL, *Kitchen catastrophe*, Reading University, Preprint, 1974.
6. E. C. ZEEMAN, *Applications of catastrophe theory*, Tokyo Int. Conf. on Manifolds, 1973.
7. A. W. SIDONS, K. S. SNELL, J. B. MORGAN, *A New Calculus*, Cambridge University Press, 1952.
8. A. E. R. WOODCOCK, T. POSTON, *A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
9. M. J. SEWELL, *On the connexion between stability and the shape of the equilibrium surface* J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966) 203 - 230.
10. R. THOM, *Topological models in biology*, Topology, 8 (1968) 313 - 335.
11. E. C. ZEEMAN, *A catastrophe machine*, Towards a Theoretical Biology, 4 (1972) 276 - 282.
12. T. POSTON, A. E. R. WOODCOCK, *Zeeman's catastrophe machine*, Proc. Camb. Phil. Soc., 74 (1973) 217 - 226.
13. B. BUDIANSKY, *Theory of buckling and post-buckling of elastic structures*, Advances in Applied Mechanics, 14 (1974).

14. M. J. SEWELL, *Interaction between the effects of local and overall imperfections on the buckling of elastic columns*, J. Mech. Phys. Solids, **22** (1974) 519 - 540.
15. W. T. KOITER, *Elastic stability and post-buckling behaviour*, in: Nonlinear Problems, University of Wisconsin Press, Madison 1963.
16. W. T. KOITER, *On the stability of elastic equilibrium*, NASA Tech. Trans. F10-833, 1967 (итум. pracy dokt. z r. 1945).
17. W. T. KOITER, *Buckling and post-buckling of a cylindrical panel under axial compression*, Trans. Nat. Aero. Inst. Amsterdam, **20** (1956) 71.
18. J. M. T. THOMPSON, *Towards a unified bifurcation theory*, Univ. College London, Preprint, 1974.
19. M. J. SEWELL, Private communication to J. M. T. Thompson describing the 'Static perturbation technique', 22 July, 1964. (See J. Mech. Phys. Solids, **13**, 247 (SEWELL) and **13**, 295 (THOMPSON), 1965.
20. M. J. SEWELL, *A general theory of equilibrium paths through critical points*, Proc. Roy. Soc. Lond., A **306** (1968), 201 - 238, A **315** (1970) 499 - 518.
21. J. W. HUTCHINSON, B. BUDIANSKY, *Analytical and numerical study of the effects of initial imperfections on the inelastic buckling of a cruciform column*, Proc. IUTAM Symp. Buckling of Struct., Harvard Univ., 1974.
22. M. J. SEWELL, *Elastic and plastic bifurcation theory*, Lectures to the Seminar on the Plasticity Theory and its Application in Techniques, University of Niš, Yugoslavia, 1975.
23. M. J. SEWELL, *A method of post-buckling analysis*, J. Mech. Phys. Solids, **17** (1969), 219 - 233.
24. R. HILL, J. W. HUTCHINSON, *Bifurcation phenomena in the plane tension test*, Harvard Report DEAP S-12, 1975.
25. N. H. MACMILLAN, A. KELLY, *The mechanical properties of perfect crystals*, Proc. Roy. Soc. Lond., A **330** (1972) 309 - 317.
26. J. M. T. THOMPSON, P. A. STURROCK, *Bifurcational instability of an atomic lattice*, J. Mech. Phys. Solids, **23** (1975) 21 - 37.
27. R. HILL, *On the elasticity and stability of perfect crystals at finite strain*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975) 225 - 240.
28. V. TVERGAARD, *Imperfection-sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression*, Int. J. Solids Struct., **9** (1973) 177.
29. J. W. HUTCHINSON, *Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells*, J. Appl. Mech., **34** (1967) 49 - 55.
30. J. HANSEN, *Influence of general imperfections in axially loaded cylindrical shells*, Report 26, Danish Center for Appl. Math. and Mech., 1974.
31. J. R. FITCH, B. BUDIANSKY, *Buckling and post-puckling behaviour of spherical caps under axisymmetric load*, AIAAJ, **8** (1970) 686 - 693.
32. H. ALEXANDER, *Tensile instability of initially spherical balloons*, Int. J. Engng. Sci., **9** (1971) 151.

## Р е з ю м е

## ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ В МЕХАНИКЕ

Целью работы является ознакомление неспециалистов с основными идеями теории катастроф и возможностями ее применения. Теория катастроф, представляющая собой раздел качественного анализа дифференциальных уравнений, может найти применение в разных отраслях науки, позволяя найти новые точки зрения на многие задачи.

В начале работы представлены простые примеры конфликтных ситуаций и их качественного анализа. В разделе 3 дано более точное определение предмета теории катастроф. Проведена таблица Тома, в которой представлены возможные особенности решений уравнений состояния. Раздел 4, основной в данной работе, включает анализ нескольких простых примеров задач механики твердых деформируемых тел с точки зрения теории катастроф. Эти примеры относятся в основном к задачам потери устойчивости, бифуркации и т. п. В конце работы приведен обширный перечень литературы.

## Summary

## SOME MECHANICAL ASPECTS OF CATASTROPHE THEORY

The paper is aimed at introducing non-specialists into the catastrophe theory. Though the theory is a part of the qualitative analysis of differential equations, it seems to be applicable in various other fields since it allows for considering several problems from a new point of view.

Initial two chapters give some simple examples of conflict situations and present their qualitative study. Chapter 3 defines the subject of the catastrophe theory. The table of possible local singularities, given by Thom, is presented. In Chapter 4 several examples of problems are analysed in terms of the theory. The problems are taken from mechanics of deformable bodies and concern mainly such phenomena like loss of stability, bifurcation etc. The paper contains a large number of references dealing with the subject.

UNIWERSYTET W READING (W. BRYTANIA)

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 czerwca 1976 r.*

---