MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 15 (1977)

SUMOWANIE NIEKTÓRYCH SZEREGÓW BESSELA-FOURIERA WYSTĘPUJĄCYCH W ZAGADNIENACH PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

MICHAŁ CIAŁKOWSKI (POZNAŃ)

Oznaczenia

$J_\beta(\xi)$, $Y_\beta(\xi)$ funkcje Bessela I i II rodzaju rzędu β, argumentu ξ,
$I_\beta(\xi)$, $K_\beta(\xi)$ zmodyfikowane funkcje Bessela I i II rodzaju rzędu β, argumentu ξ,
$\eta(\xi)$ funkcja Heviside'a,
$\delta(\xi)$ dystrybucja Diraca,
ψ współczynnik charakteryzujący rodzaj warunku brzegowego (liczba Biota),
β współczynnik określający kształt ciała,
Fo liczba Fouriera (bezwymiarowy czas),
ξ bezwymiarowa współrzędna punktu.

W wielu zagadnieniach przewodnictwa cieplnego rozwiązanie odpowiedniego problemu wyraża się poprzez funkcje Bessela. I tak np. rozkład temperatur w płycie nieograniczonej (o zerowej temperaturze jednej powierzchni) oraz symetryczny rozkład temperatur w walcu nieograniczonym możemy wyrazić w postaci bezwymiarowej następującym wzorem:

$$(1)\qquad \vartheta(\xi, \mathrm{Fo}) = -\frac{2\beta+\psi}{\psi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\psi^2\xi^\beta J_\beta(\mu_m\xi)e^{-\mu_m^2 \mathrm{Fo}}}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)\mu_m J_{\beta-1}(\mu_m)}, \quad \begin{array}{l}\xi\in\langle 0; 1\rangle\\ \mathrm{Fo}\in\langle 0; +\infty\rangle,\end{array}$$

będącym rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}+\frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}, \quad \begin{array}{l}\xi\in\langle 0; 1\rangle\\ \mathrm{Fo}\in\langle 0; +\infty\rangle\end{array}$$

z warunkami:

— warunek początkowy

$$\vartheta(\xi, 0) = \xi^{2\beta}, \quad \xi\in\langle 0; 1\rangle,$$

— warunek brzegowy

$$-\left.\frac{\partial\vartheta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = \psi\vartheta(\xi, \mathrm{Fo})|_{\xi=1}, \quad \mathrm{Fo}\in(0; +\infty), \ \psi = \mathrm{const}.$$

Parametr β występujący w równaniu przewodnictwa cieplnego charakteryzuje kształt ciała np.: $\beta = -1/2$ — kula, $\beta = 0$ — walec, $\beta = 1/2$ — płyta.

Dla wartości parametru β w rozwiązaniu (1), równanie określające wartości własne stowarzyszonego zagadnienia brzegowego ma postać

$$(2) \qquad -\frac{J_\beta(\mu)}{J_{\beta-1}(\mu)} = \frac{\mu}{\psi}.$$

Kolejne pierwiastki równania (2) oznaczamy przez $\mu_m^{(\beta)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Dla przejrzystości zapisu będziemy opuszczać indeks β przy wartości własnej $\mu_m^{(\beta)}$. Równanie (2) wynika z powyższego warunku brzegowego i dla rozważanego równania przewodnictwa możemy napisać go również w formie

$$\left\{\frac{d}{d\xi}[\xi^\beta J_\beta(\mu\xi)] + \psi\xi^\beta J_\beta(\mu\xi)\right\}\Bigg|_{\xi=1} = 0 \quad \text{lub} \quad \mu J_{\beta-1}(\mu) + \psi J_\beta(\mu) = 0.$$

Wynika stąd, że równanie (2) obejmuje wszystkie trzy postacie warunków brzegowych:

a) warunek brzegowy I rodzaju $J_\beta(\mu) = 0$, $\psi \to +\infty$,

b) warunek brzegowy II rodzaju $J_{\beta-1}(\mu) = 0$, $\psi = 0$,

c) warunek brzegowy II rodzaju $\mu J_{\beta-1}(\mu) + \psi J_\beta(\mu) = 0$, $\psi > 0$.

Dalej pokażemy, że znajomość pierwiastków równania (2) pozwala na wyznaczanie sum pewnych szeregów trygonometrycznych (gdyż funkcje Bessela rzędu połówkowego wyrażają się przez funkcje trygonometryczne) oraz sum pewnych szeregów zawierających funkcje Bessela rzędu zerowego.

Wyprowadzone wzory rozszerzymy na sumowanie innych szeregów otrzymanych przez wykorzystanie związków pomiędzy funkcjami Bessela argumentu rzeczywistego i urojonego.

Przedstawimy też sumowanie szeregu w postaci

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m\xi) J_\beta(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^2 + s)(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)},$$

który jest w szczególnym przypadku transformatą Laplace'a (dla $a^2 = s$) szeregu (1). Podobne szeregi występują również przy nadaniu rozkładów temperatur dla bardzo małych liczb Fouriera określonych wzorem (1); mianowicie dla Fo $\ll$ 1 mamy

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^\beta J_\beta(\mu_m\xi) e^{-\mu_m^2 \mathrm{Fo}}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}(\mu_m)} \approx \frac{2\psi^2}{\mathrm{Fo}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^\beta J_\beta(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)\left(\mu_m^2 + \frac{1}{\mathrm{Fo}}\right) J_{\beta-1}(\mu_m)}.$$

W metodzie sumowania szeregów wykorzystujemy wzory zachodzące dla dystrybucji Diraca.

1. Szereg podstawowy

Ponieważ układ funkcji Bessela $\{J_\beta(\mu_m\xi)\}$, gdzie μ_m są określone wzorem (2), jest zupełny, przeto dla dystrybucji $\delta = \delta(\xi - \varrho)$ ma miejsce związek ([1], s. 244)

$$(3) \qquad \delta(\xi - \varrho) = 2\varrho\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m\varrho) J_\beta(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)}, \qquad \varrho \in \langle 0; 1 \rangle, \quad \xi \in \langle 0; 1 \rangle,$$

Ze względu na symetrię funkcji delta mamy również

$$\delta(\varrho-\xi) = 2\xi\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \xi) J_\beta(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)}. \tag{4}$$

Ponieważ

$$\int_0^\xi f(\hat{\xi})\,\delta(\hat{\xi}-\varrho)\,d\hat{\xi} = f(\varrho), \tag{5}$$

to biorąc $f(\xi) = \xi I_\beta(a\xi)$ mamy

$$\int_0^\xi \delta(\hat{\xi}-\varrho)\,\hat{\xi} I_\beta(a\hat{\xi})\,d\hat{\xi} = \varrho I_\beta(a\varrho). \tag{6}$$

Związek (6), na mocy (3), przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \varrho I_\beta(a\varrho) &= 2\varrho\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \varrho) \int_0^\xi \hat{\xi} J_\beta(\mu_m \hat{\xi}) I_\beta(a\hat{\xi})\,d\hat{\xi}}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \\ &= 2\psi^2\varrho\xi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{d\xi}[I_\beta(a\xi)] \frac{J_\beta(\mu_m\varrho) J_\beta(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)(\mu_m^2+a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} + \\ &\quad -2\psi^2\varrho\xi \sum_{m=0}^{\infty} I_\beta(a\xi) \frac{J_\beta(\mu_m\varrho) \frac{d}{d\xi}[J_\beta(\mu_m\xi)]}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)(\mu_m^2+a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} \end{aligned} \tag{7}$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial\xi} H_\beta(\xi,\varrho) - \frac{\frac{d}{d\xi} I_\beta(a\xi)}{I_\beta(a\xi)} H_\beta(\xi,\varrho) = -\frac{I_\beta(a\varrho)}{I_\beta(a\xi)} \frac{1}{\xi}, \tag{8}$$

gdzie

$$H_\beta(\xi,\varrho) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m\varrho) J_\beta(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)(\mu_m^2+a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} \tag{9}$$

jest szeregiem podstawowym.

Związek (8) traktujemy jako równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją $H_\beta(\xi, \varrho)$ i poszukujemy jego rozwiązania w formie

$$H_\beta(\xi,\varrho) = u_\beta(\xi,\varrho) I_\beta(a\varrho), \tag{10}$$

stąd równanie określające funkcję $u_\beta(\xi, \varrho)$ jest w postaci

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi} - \frac{\frac{d}{d\xi} I_\beta(a\xi)}{I_\beta(a\xi)} u_\beta = -\frac{1}{I_\beta(a\xi)} \frac{1}{\xi}. \tag{11}$$

Następnie wykorzystując związek (wyznacznik Wrońskiego funkcji $I_\beta(a\xi)$ i $K_\beta(a\xi)$)

$$I_\beta(a\xi)K'_\beta(a\xi)-I'_\beta(a\xi)K_\beta(a\xi) = -\frac{1}{a\xi} \tag{12}$$

redukujemy (11) do postaci

$$I_\beta(a\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}[u_\beta(\xi,\varrho)-K_\beta(a\xi)]-\frac{d}{d\xi}I_\beta(a\xi)[u_\beta(\xi,\varrho)-K_\beta(a\xi)] = 0. \tag{13}$$

Rozwiązanie równania (13) jest następujące:

$$u_\beta(\xi,\varrho) = CI_\beta(a\xi)+K_\beta(a\xi), \qquad C \text{ — stała}. \tag{14}$$

Zatem

$$H_\beta(\xi,\varrho) = I_\beta(a\varrho)[CI_\beta(a\xi)+K_\beta(a\xi)]. \tag{15}$$

Szereg (9) jest szeregiem symetrycznym względem ξ i ϱ, wobec tego otrzymujemy

$$H_\beta(\xi,\varrho) = \eta(\xi-\varrho)L_1(\xi,\varrho,\psi,a)+\eta(\varrho-\xi)L_1(\varrho,\xi,\psi,a), \qquad \xi,\varrho\in\langle 0;1\rangle, \tag{16}$$

gdzie $L_1(\xi,\varrho,\psi,a) = I_\beta(a\varrho)[C(a,\psi)I_\beta(a\xi)+K_\beta(a\xi)]$.

Stałą C określimy kładąc teraz we wzorze (9) $\xi = 1$, czyli

$$[CI_\beta(a)+K_\beta(a)]I_\beta(a\varrho) = 2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_\beta(\mu_m)J_\beta(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)(\mu_m^2+a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)}. \tag{17}$$

Korzystając z ortogonalności funkcji Bessela z warunkiem (2), po przemnożeniu obustronnym równania (17) przez $\varrho J_\beta(\mu_m\varrho)$ i scałkowaniu w granicach od 0 do 1 otrzymujemy

$$[CI_\beta(a)+K_\beta(a)]\{aJ_\beta(\mu_m)I_{\beta-1}(a)-\mu_m I_\beta(a)J_{\beta-1}(\mu_m)\} = J_\beta(\mu_m),$$

a uwzględniając (2)

$$C(a,\psi) = -\frac{K_\beta(a)}{I_\beta(a)}+\frac{1}{I_\beta(a)}\frac{1}{aI_{\beta-1}(a)+\psi I_\beta(a)}. \tag{18}$$

W szczególnym przypadku

$$C = \begin{cases} -\dfrac{K_\beta(a)}{I_\beta(a)} & \text{dla warunku brzegowego I rodzaju,}\\[2ex] -\dfrac{K_\beta(a)}{I_\beta(a)}+\dfrac{1}{I_\beta(a)}\cdot\dfrac{1}{aI_{\beta-1}(a)} & \text{dla warunku brzegowego II rodzaju.}\end{cases} \tag{18a}$$

Dla warunku brzegowego II rodzaju w szeregu podstawowym (9) wykorzystujemy związek (2). Zatem

$$L_1(\xi,\varrho,\psi,a) = \frac{I_\beta(a\varrho)}{I_\beta(a)}\left[-K_\beta(a)\cdot I_\beta(a\xi)+I_\beta(a)\cdot K_\beta(a\xi)+\frac{I_\beta(a\xi)}{aI_{\beta-1}(a)+\psi I_\beta(a)}\right],$$

$$L_1(1,\varrho,\psi,a) = \frac{I_\beta(a\varrho)}{aI_{\beta-1}(a)+\psi I_\beta(a)}.$$

Całkując związek (16) z wagą $\xi^{\beta+1}$ w granicach od 0 do ξ, mamy

$$
\overline{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} H_\beta(\hat{\xi}, \varrho) d\hat{\xi} = \int_{\varrho}^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} L_1(\hat{\xi}, \varrho, \psi, a) d\hat{\xi} + \tag{19}
$$

$$
+ \int_0^{\varrho} \hat{\xi}^{\beta+1} L_1(\varrho, \hat{\xi}, \psi, a) d\hat{\xi} = \frac{1}{a^2} [\varrho^\beta + \xi^{\beta+1} L_3(\xi, \varrho, \psi, a)],
$$

gdzie

$$
L_3(\xi, \varrho, \psi, a) = a I_\beta(a\varrho) [C(a, \psi) I_{\beta+1}(a\xi) - K_{\beta+1}(a\xi)] =
$$

$$
= \frac{a I_\beta(a\varrho)}{I_\beta(a)} \left[-K_\beta(a) I_{\beta+1}(a\xi) - I_\beta(a) K_{\beta+1}(a\xi) + \frac{I_{\beta+1}(a\xi)}{a I_{\beta-1}(a) + \psi I_\beta(a)} \right],
$$

$$
L_3(1, \varrho, \psi, a) = -I_\beta(a\varrho) \frac{2\beta+\psi}{a I_{\beta-1}(a) + \psi I_\beta(a)}.
$$

Z drugiej strony

$$
\overline{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \varrho) \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1} J_\beta(\mu_m \hat{\xi}) d\hat{\xi}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \tag{20}
$$

$$
= 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \xi) J_\beta(\mu_m \varrho)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) \mu_m J_{\beta-1}^2(\mu_m)}.
$$

Analogicznie

$$
\overline{\overline{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\varrho} \hat{\varrho}^{\beta+1} H_\beta(\xi, \hat{\varrho}) d\hat{\varrho} = \frac{1}{a^2} [\xi^\beta + \varrho^{\beta+1} L_3(\varrho, \xi, \psi, a)],
$$

a z drugiej strony

$$
\overline{\overline{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m \xi) \int_0^{\varrho} \hat{\varrho}^{\beta+1} J_\beta(\mu_m \hat{\varrho}) d\hat{\varrho}}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} =
$$

$$
= 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_\beta(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) \mu_m J_{\beta-1}^2(\mu_m)}.
$$

Stąd widać, że funkcje $\overline{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ i $\overline{\overline{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ są symetryczne względem zmiennych ξ i ϱ, $\overline{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) = \overline{\overline{J}}_1(\varrho, \xi, \psi, a)$ oraz $\overline{J}_1(\varrho, \xi, \psi, a) = \overline{\overline{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$.

Wobec tego

$$
2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{\beta+1} J_\beta(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{\mu_m (\mu_m^2 + \psi^2 + 2\beta\psi)(\mu_m^2 + a^2) J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \tag{20a}
$$

$$
= \eta(\xi - \varrho) \overline{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho - \xi) \overline{\overline{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a) =
$$

$$
= \eta(\xi - \varrho) \frac{1}{a^2} [\varrho^\beta + \xi^{\beta+1} L_3(\xi, \varrho, \psi, a)] + \eta(\varrho - \xi) \frac{1}{a^2} [\xi^\beta + \varrho^{\beta+1} L_3(\varrho, \xi, \psi, a)].
$$

W szczególnym przypadku dla I warunku brzegowego ($\psi \to \infty$) i $\beta = 0$, podstawiając w (20a) $\xi = 1$ otrzymamy

$$(21)\qquad 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \varrho)}{\mu_m(\mu_m^2+a^2)J_1(\mu_m)} = \frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{I_0(a\varrho)}{I_0(a)}\right].$$

Całkując teraz $\overline{J}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ z wagą $\varrho^{\beta+1}$ w granicach od 0 do ϱ oraz $\overline{\overline{J}}_1(\xi, \varrho, \psi, a)$ z wagą $\xi^{\beta+1}$ w granicach od 0 do ξ, otrzymujemy symetryczny wzór względem zmiennych ξ i ϱ

$$(22)\qquad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi\varrho)^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m \xi)}{\mu_m^2(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)(\mu_m^2+a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} =$$

$$= \eta(\xi-\varrho)\overline{J}_2(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho-\xi)\overline{\overline{J}}_2(\xi, \varrho, \psi, a),$$

gdzie

$$\overline{J}_2(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\varrho} \hat{\varrho}^{\beta+1}\overline{J}_1(\xi, \hat{\varrho}, \psi, a)\,d\hat{\varrho} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\varrho^{2\beta+2}}{2\beta+2} + (\xi\varrho)^{\beta+1}L_2(\xi, \varrho, \psi, a)\right],$$

$$\overline{\overline{J}}_2(\xi, \varrho, \psi, a) = \int_0^{\xi} \hat{\xi}^{\beta+1}\overline{\overline{J}}(\hat{\xi}, \varrho, \psi, a)\,d\hat{\xi} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\xi^{2\beta+2}}{2\beta+2} + (\varrho\xi)^{\beta+1}L_2(\varrho, \xi, \psi, a)\right].$$

Stąd

$$\overline{J}_2(\xi, \varrho, \psi, a) = \overline{\overline{J}}_2(\varrho, \xi, \psi, a) \quad \text{oraz} \quad \overline{J}_2(\varrho, \xi, \psi, a) = \overline{\overline{J}}_2(\xi, \varrho, \psi, a),$$

$$L_2(\xi, \varrho, \psi, a) = I_{\beta+1}(a\varrho)[C(a, \psi)I_{\beta+1}(a\xi) - K_{\beta+1}(a\xi)] =$$

$$= \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{I_\beta(a)}\left[-K_\beta(a)I_{\beta+1}(a\xi) - I_\beta(a)K_{\beta+1}(a\xi) + \frac{I_{\beta+1}(a\xi)}{aI_{\beta-1}(a)+\psi I_\beta(a)}\right],$$

$$L_2(1, \varrho, \psi, a) = -\frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{a}\,\frac{2\beta+\psi}{aI_{\beta-1}(a)+\psi I_\beta(a)}.$$

Kładąc w (22) $\xi = 1$ otrzymujemy zależność

$$(22a)\qquad 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m)}{\mu_m^2(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)(\mu_m^2+a^2)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{\varrho^{\beta+1}}{2\beta+2} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{a}\,\frac{2\beta+\psi}{aI_{\beta-1}(a)+\psi I_\beta(a)}\right],$$

$$|a| > 0.$$

W szczególności dla warunku brzegowego II rodzaju ($\psi = 0$)

$$(22b)\qquad 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho) J_{\beta+1}(\mu_m)}{\mu_m^2(\mu_m^2+a^2)J_\beta^2(\mu_m)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\varrho^{\beta+1}}{2\beta+2} - \frac{2\beta}{a^2}\,\frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{I_{\beta-1}(a)}\right], \qquad |a| > 0,$$

a dla I warunku brzegowego uzyskujemy $(-J_{\beta-1}(\mu_m) = J_{\beta+1}(\mu_m))$,

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m \varrho)}{\mu_m^2(\mu_m^2+a^2)J_{\beta+1}(\mu_m)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\varrho^{\beta+1}}{2\beta+2} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{aI_\beta(a)}\right], \quad |a|>0, \tag{23}$$

stąd dla $\varrho = 1$.

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2(\mu_m^2+a^2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\left[1-\dfrac{\operatorname{tgh} a}{a}\right], & \beta = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{I_1(a)}{aI_0(a)}\right], & \beta = 0, \\ \dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{\operatorname{ctgh} a}{a}\right], & \beta = \dfrac{1}{2}, \quad |a|>0. \end{cases} \tag{23a}$$

Obliczając granicę wyrażeń po prawej stronie zależności (23a) dla $a \to 0$ otrzymamy

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^4} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}; & \beta = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{16}; & \beta = 0, \\ \dfrac{1}{45}; & \beta = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{23b}$$

Oczywiście wartości własne μ_m są różne dla różnych wartości parametru β. Posługując się wzorem (22) możemy obliczyć np. sumę szeregu typu

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi\varrho)^{\beta+1} J_{\beta+1}(\mu_m\varrho) J_{\beta+1}(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+a^2)(\mu_m^2+b^2)(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)J_{\beta-1}^2(\mu_m)}, \tag{24}$$

wykorzystując związek

$$\frac{1}{\mu_m^2+a^2}\,\frac{1}{\mu_m^2+b^2} = \frac{b^2}{b^2-a^2}\,\frac{1}{\mu_m^2}\,\frac{1}{u_m^2+b^2} - \frac{a^2}{b^2-a^2}\,\frac{1}{\mu_m^2}\,\frac{1}{\mu_m^2+a^2}.$$

Zatem

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m\varrho) J_{\beta+1}(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+a^2)(\mu_m^2+b^2)(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \tag{24a}$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}\{\eta(\xi-\varrho)[L_2(\xi,\varrho,\psi,b)-L_2(\xi,\varrho,\psi,a)]+$$

$$+\eta(\varrho-\xi)[L_2(\varrho,\xi,\psi,b)-L_2(\varrho,\xi,\psi,a)]\}.$$

W szczególności dla warunku brzegowego I rodzaju

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^2+a^2)(\mu_m^2+b^2)J_{\beta+1}(\mu_m)} = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{I_{\beta+1}(b\varrho)}{bI_\beta(b)} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{aI_\beta(a)}\right], \tag{25}$$

a dla $\varrho = 1$

$$\text{(25a)}\quad 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu_m^2+a^2)(\mu_m^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\times\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tgh}a}{a}-\dfrac{\operatorname{tgh}b}{b}, & \beta=\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{I_1(a)}{aI_0(a)}-\dfrac{I_1(b)}{bI_0(b)}, & \beta=0,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{ctgh}a}{a}-\dfrac{\operatorname{ctgh}b}{b}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}, & \beta=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$$|a|>0,\quad |b|>0.$$

Przechodząc w związku (25a) do granicy przy $b\to 0$ otrzymamy wzór (23a). Przedstawione wzory możemy również wykorzystać do obliczenia sum szeregów stanowiących transformaty Laplace'a naprężeń termicznych stycznych $\sigma_t(\xi,\mathrm{Fo})$ i promieniowych $\sigma_r(\xi,\mathrm{Fo})$, wywołanych działaniem pola temperatury (1) w walcu nieskończonym. Wyrażają się one wzorami:

$$\mathscr{L}[\sigma_t(\xi,\mathrm{Fo})] = \mathscr{L}\left\{2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_m^2\mathrm{Fo}}}{\mu_m(\mu_m^2+\psi^2)J_1(\mu_m)}\left[\frac{J_1(\mu_m)}{\mu_m}+\frac{J_1(\mu_m\xi)}{\mu_m\xi}-J_0(\mu_m\xi)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\psi}{s[\sqrt{s}\,I_1(\sqrt{s})+\psi I_0(\sqrt{s})]}\left[I_0(\sqrt{s}\,\xi)-\frac{1}{\sqrt{s}\,\xi}I_1(\sqrt{s}\,\xi)-\frac{1}{\sqrt{s}}I_1(\sqrt{s})\right]$$

oraz

$$\mathscr{L}[\sigma_r(\xi,\mathrm{Fo})] = \mathscr{L}\left\{2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_m^2\mathrm{Fo}}}{\mu_m(\mu_m^2+\psi^2)J_1(\mu_m)}\left[\frac{J_1(\mu_m)}{\mu_m}-\frac{J_1(\mu_m\xi)}{\mu_m\xi}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\psi}{s[\sqrt{s}\,I_1(\sqrt{s})+\psi I_0(\sqrt{s})]}\left[\frac{1}{\sqrt{s}\,\xi}I_1(\sqrt{s}\,\xi)-\frac{1}{\sqrt{s}}I_1(\sqrt{s})\right].$$

Sumy tych szeregów są przypadkami szczególnymi wyprowadzonych wzorów. Jako ilustrację zastosowania otrzymanych zależności obliczymy rozkład temperatur (1) w walcu nieskończonym dła $\mathrm{Fo}\ll 1$. Wówczas funkcję $\exp(-\mu_m^2\mathrm{Fo})$ możemy zastąpić trzema pierwszymi wyrazami jej rozwinięcia w szereg MacLaurina.

Zatem

$$2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\mu_m\xi)e^{-\mu_m^2\mathrm{Fo}}}{(\mu_m^2+\psi^2)\mu_m J_1(\mu_m)} \approx 2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+\psi^2)\mu_m J_1(\mu_m)}\frac{1}{1+\dfrac{\mu_m^2\mathrm{Fo}}{1!}+\dfrac{(\mu_m^2\mathrm{Fo})^2}{2!}} =$$

$$= \frac{2\psi^2}{\mathrm{Fo}^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+\psi^2)J_1(\mu_m)}\frac{2}{\left(\mu_m^2+\dfrac{1+i}{\mathrm{Fo}}\right)\left(\mu_m^2+\dfrac{1-i}{\mathrm{Fo}}\right)} =$$

$$= \frac{i}{\mathrm{Fo}}\left[2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+\psi^2)J_1(\mu_m)}\frac{1}{\mu_m^2\dfrac{1+i}{\mathrm{Fo}}}-2\psi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2+\psi^2)J_1(\mu_m)}\frac{1}{\mu_m^2+\dfrac{1-i}{\mathrm{Fo}}}\right].$$

Wykorzystując teraz wzór (20a) otrzymamy

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \xi)}{(\mu_m^2+\psi^2)\mu_m J_1(\mu_m)} \frac{1}{1+\frac{\mu_m^2 \mathrm{Fo}}{1!}+\frac{(\mu_m^2 \mathrm{Fo})^2}{2!}} =$$

$$= 1 -$$

$$+\frac{2}{\mathrm{Fo}} \frac{D_1\left(\frac{\xi\gamma}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\left[C_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)+\psi D_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right]-D_2\left(\frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\left[C_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)+\psi D_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right]}{\left[C_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)+\psi D_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right]^2+\left[C_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)+\psi D_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right]^2},$$

$$\alpha = 2^{1/4}$$

gdzie

$$D_1\left(\frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{2(4k)}}{((4k)!)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{2(4k+1)}}{((4k+1)!)^2} -$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{2(4k+3)}}{((4k+3)!)^2},$$

$$D_2\left(\frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{2(4k+2)}}{((4k+2)!)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{2(4k+1)}}{((4k+1)!)^2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{2(4k+3)}}{((4k+3)!)^2},$$

$$C_1\left(\frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) = \frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+3}}{(4k+3)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+4}}{(4k+4)!} -\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+3}}{(4k+3)!} +$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k}}{(4k)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+1}}{(4k+1)!}\right],$$

$$C_2\left(\frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) = \frac{\xi\alpha}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+1}}{(4k+1)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+2}}{(4k+2)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+3}}{(4k+3)!} +$$

$$\left. +\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k}}{(4k)!} \frac{\left(\frac{\xi\alpha}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)^{4k+1}}{(4k+1)!}\right].$$

W celu zwiększenia dokładności wzorów, funkcję $\exp(-\mu_m^2 \mathrm{Fo})$ możemy zastąpić dla $\mathrm{Fo} \ll 1$ większą liczbą wyrazów rozwinięcia jej w szereg Mac Laurina. Dalej postępowanie jest analogiczne do powyższego.

2. Szeregi o sumach wyrażonych przez zwyczajne funkcje Bessela

Zastosowanie wyprowadzonych wzorów możemy znacznie poszerzyć, wykorzystując związki zachodzące pomiędzy funkcjami Bessela argumentu rzeczywistego i urojonego. Dla zmodyfikowanych funkcji Bessela argumentu urojonego mamy następujące związki:

$$I_\nu(a\xi i) = e^{\nu\frac{\pi i}{2}} J_\nu(a\xi),$$

$$K_\nu(a\xi i) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\nu\frac{\pi i}{2}} [J_\nu(a\xi) - iY_\nu(a\xi)].$$

Weźmy teraz pod uwagę następujące wyrażenia występujące po prawych stronach wzorów (16), (20) i (22).

Podstawiając ai w miejsce a otrzymujemy

(26)

$$L_1(\xi, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2}\frac{J_\beta(a\varrho)}{J_\beta(a)}\left[Y_\beta(a)J_\beta(a\xi) - Y_\beta(a\xi)J_\beta(a) + \frac{2}{\pi}\frac{J_\beta(a\xi)}{aJ_{\beta-1}(a)+\psi J_\beta(a)}\right],$$

(27)

$$L_2(\xi, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2}\frac{J_{\beta+1}(a\varrho)}{J_\beta(a)}\left[J_\beta(a)Y_{\beta+1}(a\xi) - J_{\beta+1}(a\xi)Y_\beta(a) - \frac{2}{\pi}\frac{J_{\beta+1}(a\xi)}{aJ_{\beta-1}(a)+\psi J_\beta(a)}\right],$$

(28)

$$L_3(\xi, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2}\frac{aJ_\beta(a\varrho)}{J_\beta(a)}\left[J_\beta(a)Y_{\beta+1}(a\xi) - J_{\beta+1}(a\xi)Y_\beta(a) - \frac{2}{\pi}\frac{J_{\beta+1}(a\xi)}{aJ_{\beta-1}(a)+\psi J_\beta(a)}\right].$$

W szczególności dla $\xi = 1$

$$L_1(1, \varrho, \psi, ai) = \frac{\pi}{2} \frac{J_\beta(a\varrho)}{aJ_{\beta-1}(a)+\psi J_\beta(a)}, \tag{26a}$$

$$L_2(1, \varrho, \psi, ai) = -\frac{J_{\beta+1}(a\varrho)}{a} \frac{2\beta+\psi}{aJ_{\beta-1}(a)+\psi J_\beta(a)}, \tag{27a}$$

$$L_3(1, \varrho, \psi, ai) = -J_\beta(a\varrho) \frac{2\beta+\psi}{aJ_{\beta-1}(a)+\psi J_\beta(a)}. \tag{28a}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób sumy następujących szeregów:

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\beta(\mu_m\xi)J_\beta(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^2-a^2)(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = \eta(\xi-\varrho)L_1(\xi, \varrho, \psi, ai)+\eta(\varrho-\xi)L_1(\varrho, \xi, \psi, ai), \tag{29}$$

$$2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{\beta+1}J_\beta(\mu_m\varrho)J_{\beta+1}(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2-a^2)(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)\mu_m J_{\beta-1}^2(\mu_m)} = -\eta(\xi-\varrho)\frac{1}{a^2}[\varrho^\beta+\xi^{\beta+1}L_3(\xi, \varrho, \psi, ai)]-\eta(\varrho-\xi)\frac{1}{a^2}[\xi^\beta+\varrho^{\beta+1}L_3(\varrho, \xi, \psi, ai)], \tag{30}$$

$$\begin{aligned} 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\varrho\xi)^{\beta+1}J_{\beta+1}(\mu_m\varrho)J_{\beta+1}(\mu_m\xi)}{(\mu_m^2-a^2)(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)\mu_m^2 J_{\beta-1}^2(\mu_m)} &= \\ = -\eta(\xi-\varrho)\frac{1}{a^2}\left[\frac{\varrho^{2\beta+2}}{2\beta+2}+(\xi\varrho)^{\beta+1}L_2(\xi, \varrho, \psi, ai)\right] &- \\ +\eta(\varrho-\xi)\frac{1}{a^2}\left[\frac{\xi^{2\beta+2}}{2\beta+2}+(\xi\varrho)^{\beta+1}L_2(\varrho, \xi, \psi, ai)\right]&. \end{aligned} \tag{31}$$

W szczególnym przypadku, gdy $\xi = 1$, wzory powyższe mają stosunkowo prostą postać. Weźmy jeszcze pod uwagę wyrażenie (24a).

Podstawiając $b = a$ i mamy

$$\begin{aligned} 2\psi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m\varrho)J_{\beta+1}(\mu_m\xi)}{(\mu_m^4-a^4)(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)J_{\beta-1}^2(\mu_m)} &= \\ = \frac{1}{2a^2}\{\eta(\xi-\varrho)[L_2(\xi, \varrho, \psi, a)-L_2(\xi, \varrho, \psi, ai)]&+ \\ +\eta(\varrho-\xi)[L_2(\varrho, \xi, \psi, a)-L_2(\varrho, \xi, \psi, ai)]\}&. \end{aligned} \tag{32}$$

Dla I warunku brzegowego ($\psi \to \infty$) oraz $\xi = 1$ wzór (32) przyjmie postać

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{\beta+1}(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^4-a^4)J_{\beta-1}(\mu_m)} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{J_{\beta+1}(a\varrho)}{aJ_\beta(a)} - \frac{I_{\beta+1}(a\varrho)}{aI_\beta(a)}\right]. \tag{32a}$$

Podstawiając z kolei do (32a) w miejsce a wielkość $\sqrt{i}\,a$ dochodzi się do funkcji Kelvina. W szczególności dla $\beta = 0$ na podstawie powyższych wzorów otrzymuje się zależność

$$(33)\quad 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^4+a^4)J_1(\mu_m)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,a^3}\,\frac{(\mathrm{ber}\,a-\mathrm{bei}\,a)\mathrm{ber}_1(a\varrho)+(\mathrm{ber}\,a+\mathrm{bei}\,a)\mathrm{bei}_1(a\varrho)}{\mathrm{ber}^2a+\mathrm{bei}^2a},$$

a w granicy dla $a \to 0$

$$(33\mathrm{a})\quad 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_1(\mu_m\varrho)}{\mu_m^4 J_1(\mu_m)} = \frac{\varrho(2-\varrho^2)}{16}.$$

Dokonując analogicznych podstawień w związkach (20a) i (30), przez ich odjęcie i dodanie stronami otrzymamy

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^4+a^4)\mu_m J_1(\mu_m)} = \frac{1}{a^4}\left[1-\frac{\mathrm{ber}\,a\cdot\mathrm{ber}\,a\varrho+\mathrm{bei}\,a\cdot\mathrm{bei}\,a\varrho}{\mathrm{ber}^2a+\mathrm{bei}^2a}\right],$$

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m\cdot J_0(\mu_m\varrho)}{(\mu_m^4+a^4)J_1(\mu_m)} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\mathrm{bei}\,a\cdot\mathrm{bei}\,a\varrho-\mathrm{ber}\,a\cdot\mathrm{bei}\,a\varrho}{\mathrm{ber}^2a+\mathrm{bei}^2a},$$

gdzie funkcje $\mathrm{ber}\,a\varrho$, $\mathrm{bei}\,a\varrho$ i $\mathrm{ber}_1 a\varrho$, $\mathrm{bei}_1 a\varrho$ są funkcjami Kelvina odpowiednio rzędu zero i jeden.

3. Uwagi końcowe

W wielu przypadkach technicznych mamy do czynienia nie z pełnym walcem, kulą czy symetrycznie ogrzewaną (chłodzoną) płytą lecz z walcem wydrążonym, kulą wydrążoną i niesymetrycznie ogrzewaną (chłodzoną) płytą. Zjawisko jednowymiarowego przewodnictwa cieplnego dla tych ciał można ująć jednym wspólnym równaniem różniczkowym:

$$(34)\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}+\frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi},\qquad \xi\in\langle\xi_1;1\rangle,\qquad \xi_1>0,\qquad \mathrm{Fo}\in\langle 0;+\infty),$$

z warunkami:

— warunek początkowy

$$\vartheta(\xi,0)=1,\qquad \xi\in\langle\xi_1;1\rangle,$$

— warunek brzegowy na powierzchni wewnętrznej

$$\left[\frac{\partial\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}-\psi_1\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})\right]_{\xi=\xi_1}=0,\qquad \mathrm{Fo}\in(0;\infty),\ \psi_1=\mathrm{const},$$

— warunek brzegowy na powierzchni zewnętrznej

$$\left[\frac{\partial\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\psi_2\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})\right]_{\xi=1}=0;\qquad \mathrm{Fo}\in(0;\infty);\qquad \psi_2=\mathrm{const}.$$

Rozwiązanie równania (34) z podanymi warunkami wyraża się wzorem

$$\vartheta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{\beta} A_m \sigma_\beta(\mu_m \xi) e^{-\mu_m^2 \mathrm{Fo}},$$

gdzie funkcja $\sigma_\beta(\mu_m \xi)$ jest funkcją walcową w postaci

$$\sigma_\beta(\mu_m \xi) = J_\beta(\mu_m \xi) - \frac{\mu_m J_{\beta-1}(\mu_m) + \psi_2 J_\beta(\mu_m)}{\mu_m Y_{\beta-1}(\mu_m) + \psi_2 Y_\beta(\mu_m)} Y_\beta(\mu_m \xi),$$

a współczynniki A_m są określone wzorem

$$A_m = \frac{\int\limits_{\xi_1}^{1} \vartheta(\xi, 0)\xi^{1-\beta}\sigma_\beta(\mu_m \xi)d\xi}{\int\limits_{\xi_1}^{1} \xi\sigma_\beta^2(\mu_m \xi)d\xi} =$$

$$= \frac{-\sigma_{\beta-1}(\mu_m) + \xi_1^{1-\beta}\sigma_{\beta-1}(\mu_m \xi_1)}{\frac{1}{2}[\sigma_\beta^2(\mu_m) - \sigma_{\beta-1}(\mu_m)\sigma_{\beta+1}(\mu_m) - \sigma_\beta^2(\mu_m \xi_1) + \sigma_{\beta-1}(\mu_m \xi_1)\sigma_{\beta+1}(\mu_m \xi_1)]}$$

oraz równanie określające wartości własne ma postać

$$\frac{\sigma_\beta(\mu\xi_1)}{\sigma_{\beta-1}(\mu\xi_1)} = \frac{\mu}{\psi_1}.$$

Układ funkcji σ_β jest układem ortogonalnym i zupełnym. Zatem dystrybucję Diraca możemy wyrazić przez funkcje $\{\sigma_\beta(\mu_m \xi)\}$ analogicznie do (3) i (4). Postępując podobnie jak poprzednio uzyskamy wzory sumacyjne dla szeregów zawierających funkcje $\sigma_\beta(\mu_m \xi)$.

Przy rozwiązywaniu dwuwymiarowych zagadnień przewodzenia ciepła w walcu nieskończonym mamy do czynienia często z sumowaniem szeregów Bessela-Fouriera zawierających funkcje Bessela rzędu całkowitego n. Dla takich funkcji równanie określające liczby μ_m ma postać

$$(35) \qquad -\frac{J_n(\mu)}{J_n'(\mu)} = \frac{\mu}{\psi}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Kolejne pierwiastki równania oznaczamy przez $\mu_m^{(n)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Postępując analogicznie jak w przypadku funkcji $H_\beta(\xi, \varrho)$ uzyskamy równanie dla szeregu podstawowego $H_\beta(\xi, \varrho)$ w postaci

$$(36) \qquad \frac{\partial H_n}{\partial \xi} - \frac{aI_n'(a\xi)}{I_n(a\xi)} H_n + \frac{I_n(a\varrho)}{I_n(a\xi)} \frac{1}{2\xi} = 0, \qquad |a| > 0.$$

Z drugiej zaś strony

$$H_n(\xi, \varrho) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_n(\mu_m^{(n)}\varrho) J_n(\mu_m^{(n)}\xi)}{J_n^2(\mu_m^{(n)}) - J_{n-1}(\mu_m^{(n)}) J_{n+1}(\mu_m^{(n)})} \frac{1}{(\mu_m^{(n)})^2 + a^2}.$$

Rozwiązanie równania (36) jest następujące:

$$(37) \qquad H_n(\xi, \varrho) = \eta(\xi - \varrho) L_1^{(n)}(\xi, \varrho, \psi, a) + \eta(\varrho - \xi) L_1^{(n)}(\varrho, \xi, \psi, a),$$

gdzie

$$L_1^{(n)}(\xi, \varrho, \psi, a) = \frac{I_n(a\varrho)}{I_n(a)}\left[-K_n(a)I_n(a\xi)+K_n(a\xi)I_n(a)+\frac{I_n(a\xi)}{aI_n'(a)+\psi I_n(a)}\right].$$

Związek (37) może być wykorzystany dla znalezienia sum innych szeregów po dokonaniu identycznych operacji jak w części pierwszej pracy. Tutaj rolę parametru odgrywa całkowita liczba n. Przy rozpatrywaniu symetrycznych rozkładów temperatur w walcu nieskończonym, kuli i płycie nieograniczonej (z warunkiem początkowym $\vartheta(\xi, 0) = 1$ i brzegowym jak w części pierwszej pracy), bezwymiarowy rozkład temperatur można wyrazić wzorem

$$\vartheta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\psi^2\xi^\beta J_{-\beta}(\mu_m\xi)e^{-\mu_m^2 \mathrm{Fo}}}{(\mu_m^2+\psi^2+2\beta\psi)\mu_m J_{-(\beta-1)}(\mu_m)}, \quad \xi \in \langle 0; 1\rangle, \quad \mathrm{Fo} \in \langle 0; \infty),$$

a wartości własne stowarzyszonego zagadnienia brzegowego określa równanie

$$\frac{J_{-\beta}(\mu)}{J_{-(\beta-1)}(\mu)} = \frac{\mu}{\psi}.$$

Wtedy dla wartości własnych określonych powyższym wzorem należy zmienić w wyprowadzonych poprzednio wzorach znak wskaźnika rzędu przy funkcjach Bessela na przeciwny.

Przedstawione w pracy wzory można również uzyskać przez różniczkowanie szeregów podstawowych. Takie postępowanie przedstawione jest w pracy [2] (dla $\beta = 0$, $n = 0$, $\psi \to \infty$) i [6] (dla $\beta = 0$, $n \geqslant 0$, $\psi \to \infty$).

Zaletą wyprowadzonych wzorów jest ich ogólność w sensie warunków brzegowych (ujmują wszystkie trzy warunki brzegowe), jak również możliwość sumowania szeregów trygonometrycznych występujących przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych z zakresu przewodnictwa cieplnego.

Literatura cytowana w tekście

1. A. N. Tichonow, A. A. Samarski, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.
2. S. Woelke, *Summation of certain Bessel series occuring in elasticity problems*, Arch. Mech. Stos., 3, **22** (1970).
3. N. W. Mc Lachlan, Funkcje Bessela dla inżynierów, PWN, Warszawa 1964.
4. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
5. H. Meschkowski, *Reihen entwicklungen in der mathematischen Physik*, BI Hochschultaschenbücher, Band 51, Mannheim 1963.
6. K. Grysa, *Rozkład temperatury i naprężeń w walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznicy*, praca doktorska, Poznań 1975.

Р е з ю м е

СУММИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ БЕССЕЛЯ-ФУРЬЕ ВЫСТУПАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе представлен метод суммирования некоторых рядов Бесселя-Фурье с параметром, выступающих в задачах теплопроводности. В зависимости от значения параметра, можно получить сумму рядов для функций Бесселя порядков 0 и 0,5. Можно использовать этот метод и к определению суммы рядов с цилиндрическими функциями других порядков.

Summary

SUMMATION OF CERTAIN FOURIER-BESSEL SERIES OCCURRING IN HEAT TRANSFER PROBLEMS

The method of summation of some Bessel-Fourier series with a parameter occurring in heat-transfer problems is described. Depending on the value of the parameter, the sums of zero and half order Bessel functions are obtained. The methods of derivation of the formulae for the Bessel functions of other orders are also given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1977 r.