MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 15 (1977)

UOGÓLNIONE POSTACIE WARIACYJNYCH ZASAD MECHANIKI W PRACACH Z KOŃCA XIX I POCZĄTKU XX WIEKU

N. J. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

1. Uogólnione postacie wariacyjnych zasad mechaniki związane z uogólnieniem pojęcia potencjału kinematycznego

W pracy KÖNIGSBERGERA [1] z 1897 r. zostały przedstawione zasady mechaniki w postaci wynikającej z uogólnienia definicji potencjału kinetycznego. Badania KÖNIGSBERGERA zostały zainspirowane pracami HELMHOLTZA. W pracy pt. *O fizycznej interpretacji zasady minimum działania* [2] oraz w *Wykładach dynamiki dyskretnych punktów materialnych* [3] HELMHOLTZ zrezygnował z charakterystycznego dla mechaniki założenia, że energia kinetyczna jest jednorodną kwadratową funkcją prędkości, a energia potencjalna zależy tylko od współrzędnych punktu (i czasu). Celem takiego postępowania było jednolite mechanistyczne ujęcia termo- i elektromechaniki.

Różnicę energii potencjalnej i kinetycznej, czyli podstawową funkcję Hamiltona, HELMHOLTZ nazwał potencjałem kinetycznym. Potencjał ów $H = V-T$ w ujęciu HELMHOLTZA może być dowolną funkcją uogólnionych współrzędnych, prędkości i czasu.

Uzupełniając H dodatkowymi członami, odpowiadającymi siłom zewnętrznym, HELMHOLTZ zapisał zasadę Hamiltona i odpowiednie równania Lagrange'a drugiego rodzaju w postaci uogólnionej

$$(1)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}\Big(H+\sum_{l=1}^{k}Q_l q_l\Big)dt = 0,$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_l}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_l}\right) = Q_l.$$

We wzorach tych Q_l oznacza uogólnioną reakcję poruszającego się układu na zmianę współrzędnych q_l.

KÖNIGSBERGER posunął się jeszcze dalej niż HELMHOLTZ w uogólnianiu potencjału kinetycznego, zakładając go w postaci dowolnej funkcji czasu, współrzędnych i ich pochodnych po czasie. Wynikiem tego były uogólnione postacie różniczkowych i całkowych twierdzeń wariacyjnych.

Uogólniona zasada d'Alemberta-Lagrange'a ma postać

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{3n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \ddot{x}_k}\right)-\ldots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right)-X_k\right]\delta x_k = 0,$$

gdzie H jest kinetycznym potencjałem — daną funkcją czasu, współrzędnych i ich pochodnych po czasie (do ν-tej włącznie), X_k są danymi funkcjami czasu i współrzędnych, a δx_k — wirtualnymi przemieszczeniami, które spełniają równania holonomicznych i liniowych nieholonomicznych więzów

$$\sum_{k=1}^{3n} a_{rk}\,\delta x_k = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, l). \tag{3}$$

Z zasady (2) i równań (3) otrzymuje KÖNIGSBERGER za pomocą mnożników nieokreślonych uogólnione równania Lagrange'a pierwszego rodzaju dla holonomicznych i liniowych nieholonomicznych układów:

(4)

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k}\right) + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right) - X_k + \sum_{r=1}^{l} \lambda_r a_{rk} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, 3n),$$

oraz uogólnione równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla układów holonomicznych:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}\right) + Q_i = 0. \tag{5}$$

We wzorze tym

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{3n} X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

jest funkcją czasu i uogólnionych współrzędnych q_i.

W przypadku zwykłego potencjału kinetycznego równania (5) utożsamiają się z uogólnionymi równaniami Lagrange'a (1).

KÖNIGSBERGER otrzymał również uogólnioną zasadę minimum wymuszenia dla układów holonomicznych. Uogólniona definicja wymuszenia ma postać

$$Z = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{-\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)2}}} \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k}\right) + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right) - X_k\right]^2. \tag{6}$$

Wymuszenie Z traktowane jest jako funkcja wielkości $x_k^{(2\nu)}$ przy ustalonych $x_k, \dot{x}_k, \ldots, \ldots, x^{(2\nu-1)}$, lub odpowiednio funkcja wielkości $q_i^{(2\nu)}$ przy ustalonych $q_i, \dot{q}_i, \ldots, q_i^{(2\nu-1)}$. Zakładając, że potencjał kinetyczny H jest całkowitą funkcją zmiennych $x_k^{(\nu)}$, nie zawierającą ich pochodnych, czyli

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\varrho^{(\nu)} \cdot \partial x_\sigma^{(\nu)}} = 0, \qquad \varrho \neq \sigma, \tag{7}$$

otrzymujemy

(8)

$$(-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial q_i^{(2\nu)}} = \sum_{k=1}^{3n} \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k}\right) + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right) - X_k\right] \frac{\partial x_k^{(2\nu)}}{\partial q_i^{(2\nu)}}.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial x_k^{(2\nu)}}{\partial q_i^{(2\nu)}} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i},$$

można sprowadzić równanie (8) do postaci

$$(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial q_i^{(2\nu)}} = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\right) + \ldots + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}\right) + Q_i,$$

z której na podstawie uogólnionych równań Lagrange'a (5) wynika, że

$$\frac{\partial Z}{\partial q_i^{(2\nu)}} = 0.$$

Zatem dla wartości $q_i^{(2\nu)}$ określonych za pomocą uogólnionych równań Lagrange'a (przy ustalonych $q_i, \dot{q}_i, \ldots, q_i^{(2\nu-1)}$) i odpowiadających im wartości $x_k^{(2\nu)}$ (przy ustalonych $x_k, \dot{x}_k, \ldots, x_k^{(2\nu-1)}$) funkcja Z osiąga punkt ekstremalny. Jeżeli wszystkie pochodne $\partial^2 H/\partial x_k^{(\nu)2}$ są ujemne, to punkt ten odpowiada minimum Z, ponieważ Z jest wówczas dodatnie. W przypadku, gdy H jest zwykłym potencjałem kinetycznym, twierdzenie powyższe utożsamia się z zasadą minimum wymuszenia sformułowaną przez Gaussa. Z powyższego dowodu uogólnionej zasady minimum wymuszenia wynika, że jest ona odpowiednikiem uogólnionych równań Lagrange'a drugiego rodzaju.

2. Modyfikacja zasady Gaussa w «Mechanice» Macha

Analityczna postać zasady minimum wymuszenia we współrzędnych holonomicznych osiągnęła kształt ostateczny w wyniku badań uczonych austriackich A. WASSMUTA, E. SCHENKELA i P. LEITINGERA. Jednak owe prace, jak również wcześniejsze badania uczonych niemieckich i rosyjskich, poświęcone są zwykłej gaussowskiej postaci tej zasady. Dopiero w «Mechanice» MACHA [4] po raz pierwszy pojawia się propozycja modyfikacji twierdzenia przez odrzucenie części więzów układu. Chociaż MACH nie podał analitycznej postaci swej propozycji i zajmował się jedynie więzami holonomicznymi, to jednak jego pomysł stanowi ważne osiągnięcie austriackiej szkoły mechaniki, dające impuls do dalszych uogólnień.

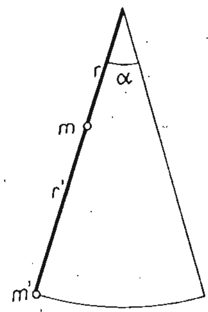
W «Mechanice» MACHA porównywane są odchylenia ruchów rzeczywistego i wirtualnego nie od ruchu swobodnego, jak u Gaussa, lecz od ruchu będącego wynikiem odrzucenia części więzów układu punktów materialnych. «*Każdy z nowo wprowadzonych więzów* — pisze Mach — *zwiększa odchylenie sumaryczne, lecz wzrost ów jest zawsze minimalny ... Jeżeli zwiążemy ze sobą dwa lub kilka układów, to ruch będzie się odbywał z minimalnym odchyleniem od ruchów poszczególnych podukładów. Na przykład, jeżeli zbudujemy wahadło liniowe z kilku zwykłych wahadeł to ruch wahadła złożonego będzie wykazywał najmniejsze odchylenie od ruchów poszczególnych wahadeł*» [4].

Na podstawie tak zmodyfikowanej zasady Gaussa, oblicza MACH przyśpieszenia wahadła złożonego.

«*Przy odchyleniu α zwykle wahadło wykazuje przyśpieszenie $g\sin\alpha$. Jeżeli $\gamma\sin\alpha$ jest przyśpieszeniem punktu odległego o jednostkę długości od osi wahadła złożonego, to*

$\Sigma m(g\sin\alpha - r\gamma\sin\alpha)^2$, *lub* $\Sigma m(g-r\gamma)^2$ *osiąga minimum. Stąd* $\Sigma m(g-r\gamma)r = 0$ *lub* $\gamma = g\frac{\Sigma mr}{\Sigma mr^2}$.»[1]

Zwracając uwagę na to, że taki sposób rozwiązania zagadnienia o przyśpieszeniach wahadła złożonego jest najprostszy, MACH objaśnia to tym, że «*w zasadzie Gaussa zawarte jest już całe doświadczenie Huygensa, Jakuba i Jana Bernoulli i innych*»[2]. Za pomocą



Rys. 1

przykładów MACH stara się wykazać, że «*zasada Gaussa nie zawiera istotnie nowej treści*[3]», że jest ona «*nowa tylko formalnie, lecz nie merytorycznie*»[4]. Podobne zdanie o zasadzie Gaussa miał DÜRING. «*Nawet to* — kontynuuje Mach —, *że ona* (zasada Gaussa, przyp. autorki) *obejmuje statyczne i dynamiczne zagadnienia, również nie stanowi o jej przewadze nad zasadą d'Alemberta w postaci Lagrange'a, o czym już wspominaliśmy*»[5].

Pomijając niesłuszną krytykę zasady Gaussa, zauważmy, że «Mechanika» Macha zawiera wiele przykładów zastosowań tej zasady, przy czym wykorzystywane są różne postacie wzoru na wymuszenie. Pod tym względem praca ta jest bardzo interesująca, a prezentuje przecież ponadto nowy pomysł o odrzucaniu więzów.

Zajmiemy się teraz badaniami BOŁOTOWA, który rozwinął idee MACHA.

3. Zasada Gaussa w pracach Bołotowa

Praca BOŁOTOWA [5] wyróżnia się pośród wielu publikacji dotyczących zasady Gaussa. Miała ona duży wpływ na późniejsze badania tej zasady. Właśnie ta praca zainteresowała zasadą Gaussa CZETAJEWA. Wystarczy porównać pracę BOŁOTOWA z pierwszą publikacją CZETAJEWA [6] o zasadzie Gaussa, aby stwierdzić jej znaczenie dla uogólnień CZETAJEWA.

Przedstawimy teraz w skrócie wyniki badań BOŁOTOWA i porównamy tok jego rozumowania z późniejszym uogólnieniem na przypadek układów nieliniowych w pracach CZETAJEWA.

[1] por. [4] s. 306–307
[2] tamże s. 307
[3] tamże s. 311
[4] tamże s. 312
[5] tamże s. 312

3.1. Zasada minimum wymuszenia w postaci Bołotowa. BOŁOTOW uogólnił zasadę Gaussa uwzględniając nowe koncepcje odrzucania wszystkich więzów jednokierunkowych oraz części więzów dwukierunkowych. W sformułowaniu BOŁOTOWA uogólniona zasada Gaussa brzmi następująco: «*odchylenie ruchu rzeczywistego od ruchu układu, w którym zostały odrzucone wszystkie jednokierunkowe więzy oraz dowolna liczba więzów dwukierunkowych jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu wirtualnego*».

W zasadzie uogólnionej zamiast Z mamy sumę

$$\frac{dt^4}{4}\sum m[(j_{ix}-j_{kx})^2+(j_{iy}-j_{ky})^2+(j_{iz}-j_{kz})^2] = \frac{dt^4}{2}S_{ik}, \tag{1}$$

która jest miarą odchylenia k-tego ruchu od i-tego. Symbole j_{kx}, j_{ky}, j_{kz} oraz odpowiednio j_{ix}, j_{iy}, j_{iz} oznaczają rzuty na osie układu współrzędnych przyśpieszeń punktu materialnego dla ruchów k-tego i i-tego w chwili czasu t (ruchy te nie muszą być wirtualne). Oba rodzaje ruchu zachowują przy tym identyczne współrzędne i prędkości punktów materialnych w chwili t.

Jeżeli i-ty ruch jest ruchem układu swobodnego w wyniku działania sił zewnętrznych, a k-ty ruch jest jednym z wielu możliwych dla danego układu, to wzór (1) jest identyczny ze wzorem na wymuszenie Z w zasadzie Gaussa. BOŁOTOW rozważa odrzucenie wszystkich jednokierunkowych więzów holonomicznych układu

$$\varphi_\mu(t, x, y, z) \geqslant 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots m) \tag{2}$$

wraz z pewną liczbą więzów dwukierunkowych

$$f_\lambda(t, x, y, z) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots l). \tag{3}$$

Dowód zmodyfikowanej zasady opiera się na dwóch następujących założeniach:

1) Wirtualne przemieszczenia układu z więzami (2) i (3) należą do wirtualnych przemieszczeń układu, pozbawionego wszystkich jednokierunkowych i części dwukierunkowych więzów.

2) Istnieją przemieszczenia wirtualne, których rzuty są proporcjonalne do różnic $j_{kx}-j_{1x}, j_{ky}-j_{1y}, j_{kz}-j_{1z}$. Faktycznie bowiem z warunków, jakie wynikają z więzów dla przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym (Bołotow nazywa go ruchem «pierwszym») oraz w k-tym ruchu wirtualnym, o identycznych współrzędnych i prędkościach punktów w chwili t wynikają zależności:

$$\sum\left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}(j_{kx}-j_{1x})+\frac{\partial f_\lambda}{\partial y}(j_{ky}-j_{1y})+\frac{\partial f_\lambda}{\partial z}(j_{kz}-j_{1z})\right] = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l),$$

$$\sum\left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x}(j_{kx}-j_{1x})+\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y}(j_{ky}-j_{1y})+\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z}(j_{kz}-j_{1z})\right] \geqslant 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Porównując je z warunkami dla przemieszczeń wirtualnych

$$\sum\left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_\lambda}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_\lambda}{\partial z}\delta z\right] = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots l),$$

$$\sum\left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z}\delta z\right] \geqslant 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots m),$$

można założyć

$$\delta x = a(j_{kx} - j_{1x}), \quad \delta y = a(j_{ky} - j_{1y}), \quad \delta z = a(j_{kz} - j_{1z}),$$

gdzie a jest dowolnym mnożnikiem dodatnim. Wówczas z zasady d'Alemberta-Lagrange'a mamy

$$(4) \qquad \sum [(X - mj_{1x})(j_{kx} - j_{1x}) + (Y - mj_{1y})(j_{ky} - j_{1y}) + (Z - mj_{1z})(j_{kz} - j_{1z})] \leqslant 0.$$

Załóżmy, że układ został pozbawiony więzów jednokierunkowych, a spośród dwukierunkowych zostało zachowane jedynie l_1 więzów. Ruch takiego układu, z zachowaniem poprzednich prędkości i sił zewnętrznych w chwili t, Bołotow nazywa ruchem «zerowym». Przyśpieszenia j_{0x}, j_{0y}, j_{0z} dla takiego ruchu wynikają z równania

$$(5) \qquad \sum [(X - mj_{0x})\Delta\bar{x} + (Y - mj_{0y})\Delta\bar{y} + (Z - mj_{0z})\Delta\bar{z}] = 0,$$

przy czym ΔX, ΔY, ΔZ muszą spełniać warunki

$$\sum \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}\Delta\bar{x} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y}\Delta\bar{y} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial Z}\Delta\bar{z} \right] = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots l_1).$$

Na podstawie pierwszego z podstawowych założeń można przyjąć

$$\Delta\bar{x} = a(j_{kx} - j_{1x}), \quad \Delta\bar{y} = a(j_{ky} - j_{1y}), \quad \Delta\bar{z} = a(j_{kz} - j_{1z}),$$

co pozwala zapisać równanie (5) w postaci

$$(6) \qquad \sum [(X - mj_{0x})(j_{kx} - j_{1x}) + (Y - mj_{0y})(j_{ky} - j_{1y}) + (Z - mj_{0z})(j_{kz} - j_{1z})] = 0.$$

Odejmując stronami równanie (6) i nierówność (4), otrzymujemy

$$(7) \qquad \sum m(j_{0x}j_{kx} + j_{0y}j_{ky} + j_{0z}j_{kz}) - \sum m(j_{1x}j_{kx} + j_{1y}j_{ky} + j_{1z}j_{kz}) -$$
$$- \sum m(j_{0x}j_{1x} - j_{0y}j_{1y} + j_{0z}j_{1z}) + \sum m(j_{1x}^2 + j_{1y}^2 + j_{1z}^2) \leqslant 0.$$

Wprowadzając energię przyśpieszeń

$$S_i = \frac{1}{2} \sum m(j_{ix}^2 + j_{iy}^2 + j_{iz}^2),$$

można wykazać, że

$$\sum m(j_{ix}j_{kx} + j_{iy}j_{ky} + j_{iz}j_{kz}) = S_i + S_k - S_{ik}.$$

W takim razie relacja (7) przyjmuje postać

$$S_{1k} - S_{0k} + S_{01} \leqslant 0, \qquad \text{lub} \qquad S_{10} \leqslant S_{k0} - S_{1k}.$$

Ponieważ $S_{1k} > 0$ to $S_{10} < S_{k0}$, czyli odchylenie ruchu rzeczywistego od ruchu układu częściowo pozbawionego więzów jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu wirtualnego od ruchu układu częściowo pozbawionego więzów.

Dowód powyższy zachodzi również w przypadku liniowych więzów nieholonomicznych. Dwa podstawowe założenia, wykorzystywane w dowodzie Bołotowa, są również najważniejszą częścią dowodu Czetajewa[6].

[6] por. [6] s. 70.

3.2. Zastosowanie uogólnionej zasady minimum wymuszenia w zagadnieniu osłabienia więzów jednokierunkowych. Załóżmy, że układ o więzach dwukierunkowych

$$f_\lambda(t, x, y, z) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots l)$$

ma s współrzędnych $q_1, q_2, \dots, q_s$. Dodatkowe więzy jednokierunkowe

$$\varphi_\mu(t, x, y, z) \geqslant 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

wprowadzają m ograniczeń. Zawsze można określić współrzędne uogólnione w taki sposób, aby te ograniczenia miały postać

$$q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0, \dots, q_m \geqslant 0.$$

Niech w chwili t więzy jednokierunkowe są aktywne. Wówczas

$$q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_m = 0.$$

Zakładamy dodatkowo, że[7)]

$$\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0, \dots, \dot{q}_m = 0.$$

W takim razie drugie pochodne współrzędnych uogólnionych dla dowolnego ruchu wirtualnego spełniają warunki:

$$\ddot{q}_{1k} = \beta_{1k}, \ddot{q}_{2k} = \beta_{2k}, \dots, \ddot{q}_{mk} = \beta_{mk},$$

gdzie $\beta_{ik} \geqslant 0$ (por. [7]).

Aby otrzymać warunki na osłabienie (pasywność) więzów jednokierunkowych, BOŁOTOW rozważa sytuację, w której odrzucone są wszystkie więzy jednokierunkowe przy jednoczesnym zachowaniu więzów dwukierunkowych. Wówczas odchylenie k-tego ruchu wirtualnego od zerowego ruchu układu o zredukowanych więzach

$$S_{k0} = \frac{1}{2} \sum m[(j_{kx} - j_{0x})^2 + (j_{ky} - j_{0y})^2 + (j_{kz} - j_{0z})^2]$$

można otrzymać z wyrażenia energii kinetycznej dla tego układu. W tym celu należy zamienić w tym wyrażeniu człony drugiego rzędu względem $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ na różnice $\ddot{q}_{1k} - \ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{2k} - \ddot{q}_{20}, \dots \ddot{q}_{sk} - \ddot{q}_{s0}$. Wynika to z porównania wyrażeń na różnice przyśpieszeń

$$j_{kx} - j_{0x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}(\ddot{q}_{1k} - \ddot{q}_{10}) + \frac{\partial x}{\partial q_2}(\ddot{q}_{2k} - \ddot{q}_{20}) + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_s}(\ddot{q}_{sk} - \ddot{q}_{s0}),$$

. . . .

i pochodne

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_s}\dot{q}_s,$$

. . . .

Przyśpieszenia $\ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{20}, \dots, \ddot{q}_{s0}$, występujące we wzorze dla odchylenia S_{0k}, są obliczane z równań Lagrange'a dla układu o zredukowanych więzach. Natomiast przyśpieszenia w ruchu rzeczywistym układu wyjściowego wynikają z warunku minimum odchylenia S_{0k}.

[7)] Jeżeli $\dot{q}_1 > 0, \dot{q}_2 > 0, \dots, \dot{q}_m > 0$, to nie można niczego powiedzieć o drugich pochodnych $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_m$ (por. [7] s. 188).

Poszukiwanie tego minimum BOŁOTOW dzieli na dwa etapy. Najpierw określa się minimum S_{0k} dla ustalonych wartości przyśpieszeń: $\ddot{q}_{1k} = \beta_{1k}, \ddot{q}_{2k} = \beta_{2k}, \ldots, \ddot{q}_{mk} = \beta_{mk}$. Wartości pozostałych przyśpieszeń $\ddot{q}_{m+1,k}, \ldots, \ddot{q}_{sk}$ obliczane są z warunków

$$\frac{\partial S_{0k}}{\partial \ddot{q}_{m+1,k}} = 0, \ldots, \frac{\partial S_{0k}}{\partial \ddot{q}_{sk}} = 0.$$

Wyrażając w tych równaniach $\ddot{q}_{m+1,k}, \ldots, \ddot{q}_{sk}$ przez $\beta_{1k}, \beta_{2k}, \ldots, \beta_{mk}$ i wstawiając je do S_{0k}, otrzymujemy minimalną wartość odchylenia $\overline{S}_{0k}$.

Następnie oblicza się wartości $\beta_{1k}, \beta_{2k}, \ldots, \beta_{mk}$, dla których $\overline{S}_{0k}$ osiąga minimum. BOŁOTOW pisze: «*Jeżeli minimum $\overline{S}_{0k}$ odpowiada dodatnim wartościom β, to odpowiednie więzy w chwili t ruchu rzeczywistego są pasywne, podczas gdy pozostałe są aktywne*». Tak więc, problem podziału więzów jednokierunkowych na aktywne i pasywne w podejściu BOŁOTOWA jest teoretycznie prosty. Jednakże obliczenia praktyczne są bardzo żmudne. Biorąc to pod uwagę, Bołotow w § 4 swej pracy podaje kilka wskazówek usprawniających obliczenia.

Z tego, że S_{0k} jest jednorodną kwadratową funkcją różnic $\ddot{q}_{1k}-\ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{2k}-\ddot{q}_{20}, \ldots, \ldots, \ddot{q}_{sk}-\ddot{q}_{s0}$, wynika jednorodność $\overline{S}_{0k}$ względem różnic $\beta_{1k}-\ddot{q}_{10}, \beta_{2k}-\ddot{q}_{20}, \ldots, \beta_{mk}-\ddot{q}_{m0}$. Można zatem obliczać $\overline{S}_{0k}$ w sposób następujący. We wzorze energii kinetycznej układu o zredukowanych więzach należy wyróżnić zbiór T_2 członów kwadratowych względem uogólnionych prędkości $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$. Następnie należy wyrugować z T_2 prędkości $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_s$ za pomocą równań

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_{m+1}} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_{m+2}} = 0, \ldots, \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} = 0.$$

Wreszcie prędkości pozostałe $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_m$ należy zastąpić różnicami $\beta_{1k}-\ddot{q}_{10}$, $\beta_{2k}-\ddot{q}_{20}, \ldots, \beta_{mk}-\ddot{q}_{m0}$.

Minimum absolutne funkcji $\overline{S}_{0k}$ jest równe zeru i osiągane dla $\beta_{1k} = \ddot{q}_{10}$, $\beta_{2k} = \ddot{q}_{20}, \ldots, \ldots, \beta_{mk} = \ddot{q}_{m0}$. Lecz $\beta_{ik} \geqslant 0$ dla ruchu wirtualnego. Zatem minimum zerowe $\overline{S}_{0k}$, odpowiadające ruchowi rzeczywistemu, otrzymamy wtedy, gdy wszystkie przyśpieszenia $\ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{20}$, $\ddot{q}_{m0}$ są nieujemne. Jeżeli zaś niektóre wartości tych przyśpieszeń są ujemne, to należy szukać minimum $\overline{S}_{0k}$ na granicy obszaru dopuszczalnych wartości zmiennych β_{ik} (tzn. zakładać, że niektóre z nich mogą być zerowe).

Niech $\beta_{hk} = \beta_{lk} = \ldots = 0$, a $\beta_{pk} > 0$, $\beta_{rk} > 0, \ldots$. Wówczas wartości β_{ik} minimalizujące $\overline{S}_{0k}$ na obszarze dopuszczalnym możemy obliczyć z warunków

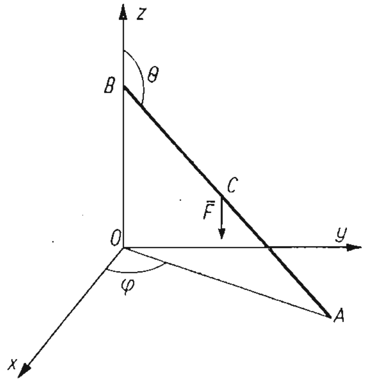
$$\frac{\partial \overline{S}_{0k}}{\partial \beta_{pk}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{S}_{0k}}{\partial \beta_{rk}} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial \overline{S}_{0k}}{\partial \beta_{hk}} \geqslant 0, \quad \frac{\partial \overline{S}_{0k}}{\partial \beta_{lk}} \geqslant 0, \ldots.$$

Następnie BOŁOTOW wykazał, że nie mogą istnieć jednocześnie dwa minima na granicy obszaru.

Jako przykład zastosowania swej teorii, BOŁOTOW przytacza takie zagadnienie. Jednorodny pręt o masie m oparty jest w chwili t jednym końcem o płaszczyznę $(x\,0\,y)$, drugim zaś o oś z (rys. 2). Dopuszcza się możliwość utraty kontaktu między oporami a prętem. W chwili początkowej pręt jest w stanie spoczynku i działa nań siła $F(X, Y, Z)$, zaczepiona w środku ciężkości pręta. Należy ustalić, w jakich okolicznościach może nastąpić w chwili t utrata kontaktu między jednym z końców pręta a płaszczyzną podpierającą.

Oznaczmy przez $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ współrzędne środka ciężkości, $\varphi = \sphericalangle x0A, \theta = \sphericalangle ABz$ i przez l połowę długości pręta. Wówczas więzy jednokierunkowe mają postać

(1) $$\bar{z}+l\cos\theta \geqslant 0, \quad \bar{x}-l\cos\varphi\sin\theta \geqslant 0, \quad \bar{y}-l\sin\varphi\sin\theta \geqslant 0.$$



Rys. 2

W chwili t są one spełnione równościowo. Energia kinetyczna układu bez więzów ma postać

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\bar{x}}^2+\dot{\bar{y}}^2+\dot{\bar{z}}^2)+\frac{1}{2}R^2m(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta),$$

gdzie R oznacza promień bezwładności pręta względem osi, poprowadzonej prostopadle do pręta przez jego środek ciężkości. Wybierając jako współrzędne uogólnione wielkości x_B, y_B, z_A, dla których zachodzą relacje

$$x_B = \bar{x}-l\cos\varphi\sin\theta, \quad y_B = \bar{y}-l\sin\varphi\sin\theta, \quad z_A = \bar{z}+l\cos\theta,$$

możemy zapisać warunki (1) w postaci

$$x_B \geqslant 0, \quad y_B \geqslant 0, \quad z_A \geqslant 0.$$

Sposób układania funkcji $\bar{S}_{0k}$ został omówiony poprzednio. Ze wzoru na energię kinetyczną w zmiennych x_B, y_B, z_A, φ, θ:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2+\dot{z}_A^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta(R^2+l^2)+\dot{\theta}^2(R^2+l^2)-2\dot{\varphi}(\dot{x}_B l\sin\theta\sin\varphi-$$
$$-\dot{y}_B l\sin\theta\cos\varphi)+2\dot{\theta}(l\dot{x}_B\cos\theta\cos\varphi+l\dot{y}_B\cos\theta\sin\varphi+\dot{z}_A l\sin\theta)],$$

redukujemy $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$ na podstawie równań

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = 0.$$

Następnie $\dot{x}_B$, $\dot{y}_B$, $\dot{z}_A$ zastąpimy różnicami

$$\ddot{x}_B-\ddot{x}_{B0}, \quad \ddot{y}_B-\ddot{y}_{B0}, \quad \ddot{z}_A-\ddot{z}_{A0},$$

gdzie $\ddot{x}_{B0}$, $\ddot{y}_{B0}$, $\ddot{z}_{A0}$ oznaczają przyśpieszenia układu swobodnego, czyli

$$\ddot{x}_{B0} = \frac{X}{m}, \quad \ddot{y}_{B0} = \frac{Y}{m}, \quad \ddot{z}_{A0} = \frac{Z}{m}.$$

Otrzymujemy zatem wzór następujący:

$$\bar{S}_{0k} = \frac{1}{2}\frac{m}{R^2+l^2}\left[\left(\ddot{x}_B - \frac{X}{m}\right)^2 (R^2+\bar{x}^2) + \left(\ddot{y}_B - \frac{Y}{m}\right)^2 (R^2+\bar{y}^2) + \left(\ddot{z}_A - \frac{Z}{m}\right)^2 (R^2+\bar{z}^2) + \right.$$
$$\left. +2\left(\ddot{x}_B - \frac{X}{m}\right)\left(\ddot{y}_B - \frac{Y}{m}\right)\bar{x}\bar{y} + 2\left(\ddot{x}_B - \frac{X}{m}\right)\left(\ddot{z}_A - \frac{Z}{m}\right)\bar{x}\bar{z} + 2\left(\ddot{y}_B - \frac{Y}{m}\right)\left(\ddot{z}_A - \frac{Z}{m}\right)\bar{y}\bar{z}\right].$$

Na podstawie tego wzoru Bolotow określa warunki, które powinna spełniać siła $\bar{F}(X, Y, Z)$, aby w chwili t następowała utrata kontaktu między końcami pręta i płaszczyznami podpierającymi.

1. Przyśpieszenia końców pręta $\ddot{x}_B$, $\ddot{y}_B$, $\ddot{z}_A$ są dodatnie, gdy końce te oddalają się od płaszczyzn oporowych. Zgodnie z uogólnioną zasadą Gaussa, przyśpieszenia te można określić z warunków na minimum funkcji S_{0k}:

$$\frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \ddot{x}_B} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \ddot{y}_B} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{S}_{0k}}{\partial \ddot{z}_A} = 0.$$

Otrzymujemy zatem

$$\ddot{x}_B = \frac{X}{m}, \qquad \ddot{y}_B = \frac{Y}{m}, \qquad \ddot{z}_A = \frac{Z}{m}.$$

Wartości te są dodatnie, gdy rzuty siły $\bar{F}$ na osie układu współrzędnych są dodatnie.

Tak więc oba końce pręta tracą kontakt z oparciem, gdy

$$X > 0, \qquad Y > 0, \qquad Z > 0.$$

W podobny sposób można zbadać pozostałe przypadki.

2. Punkty A i B tracą kontakt z płaszczyznami $x0y$ i $y0z$ (lecz B pozostaje w kontakcie z płaszczyzną $x0z$), gdy

$$Y < 0, \qquad X > -\frac{Y\bar{x}\bar{y}}{R^2+\bar{x}^2+\bar{z}^2}, \qquad Z > -\frac{Y\bar{y}\bar{z}}{R^2+\bar{x}^2+\bar{z}^2}.$$

3. Punkt B traci kontakt z płaszczyznami $y0z$ i $x0z$ (lecz punkt A pozostaje na płaszczyźnie $x0y$), gdy

$$Z < 0, \qquad X > -\frac{Z\bar{x}\bar{z}}{R^2+\bar{x}^2+\bar{y}^2}, \qquad Y > -\frac{Z\bar{y}\bar{z}}{R^2+\bar{x}^2+\bar{y}^2}.$$

4. Koniec pręta B traci kontakt z płaszczyzną $y0z$ (lecz pozostaje na płaszczyźnie $x0z$, a koniec A — na płaszczyźnie $x0y$), gdy co najmniej jeden z rzutów Y, Z jest ujemny.

3. Zastosowanie uogólnionej zasady minimum wymuszenia w teorii uderzenia

W §§ 6 i 7 swej pracy Bolotow udowadnia stosowalność uogólnionej zasady Gaussa w teorii uderzenia, obejmującej działanie zewnętrznego impulsu uderzeniowego lub nagłe wprowadzenie nowych więzów (możliwe jest też jednoczesne obu tych oddziaływań). Sformułowanie zasady minimum dla uderzenia poprzedzone jest pewnymi nowymi definicjami.

Jeżeli na początku uderzenia układ ma więzy $\varphi(t, x, y, z) \geqslant 0$, to pełna różniczka funkcji φ po czasie

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}V_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}V_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}V_z\right)$$

jest w trakcie uderzenia ujemna i nazywa się prędkością odkształcenia więzów.

Jeżeli na końcu uderzenia ograniczenie $\varphi(t, x, y, z) \geqslant 0$ staje się pasywne, to zupełna różniczka $d\varphi/dt$ uzyskuje wartość dodatnią, zwaną prędkością osłabienia więzów.

Ruchem częściowo swobodnym (lub ruchem drugim) nazywany jest ruch układu pod wpływem identycznych impulsów i nagle nakładanych więzów co w ruchu rzeczywistym, lecz po zredukowaniu wszystkich więzów jednokierunkowych i dowolnej liczby dwukierunkowych.

Uogólniona zasada minimum wymuszenia dla uderzeń formułowana jest w sposób następujący: «*Odchylenie rzeczywistego ruchu po uderzeniu od ruchu zwanego drugim jest najmniejsze pośród odchyleń ruchów wirtualnych, które mają identyczne z ruchem rzeczywistym prędkości osłabienia więzów jednokierunkowych*» (por. [6] s. 35 - 36). BOŁOTOW przytacza dowód tej zasady dla więzów holonomicznych (w ogólnym przypadku nieustalonych). Można ów dowód rozszerzyć na przypadek liniowych więzów nieholonomicznych. Rozważany jest ruch układu n punktów materialnych M_i o masach m_i. Niech przed uderzeniem układ ma l więzów dwukierunkowych.

(1) $$f_\lambda(t, x, y, z) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

oraz m więzów jednokierunkowych

(2) $$F_\mu(t, x, y, z) \geqslant 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

W ogólnym przypadku uderzenie składa się z zewnętrznych impulsów $\bar{F}(\underset{\cdot}{X}, \underset{\cdot}{Y}, \underset{\cdot}{Z})$ i nagle wprowadzanych nowych więzów

(3) $$\varphi_\nu(t, x, y, z) \geqslant 0, \quad \nu = (1, 2, \ldots, p).$$

Na początku uderzenia (w chwili t) znane są prędkości punktów układu, a tym samym i prędkości odkształcania nowych więzów

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \alpha_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Zakłada się, że więzy (3) pozostają aktywne w trakcie uderzenia.

Zgodnie z zasadą d'Alemberta-Lagrange'a, zachodzi

(4) $$\sum\{[\underset{\cdot}{X}+m(v_{0x}-v_{1x})]\,\delta x + [\underset{\cdot}{Y}+m(v_{0y}-v_{1y})]\,\delta y + [\underset{\cdot}{Z}+m(v_{0z}-v_{1z})]\,\delta z\} \leqslant 0,$$

gdzie v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} są rzutami prędkości punktów Mi na początku uderzenia, v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} oznaczają rzuty rzeczywistych prędkości tych punktów po uderzeniu, a δx, δy, δz oznaczają rzuty wirtualnych przemieszczeń punktów układu, spełniające warunki:

(5) $$\sum\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z}\delta z\right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

(6) $$\sum\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_\mu}{\partial y}\partial y + \frac{\partial F_\mu}{\delta z}\delta z\right) \geqslant 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

(7) $$\sum\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z}\delta z\right) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p).$$

W stanie częściowo swobodnym układ ma l_1 więzów typu (1) oraz więzy typu (3), które pozostają aktywne w trakcie uderzenia. Według zasady l'Alemberta-Lagrange'a dla tego ruchu mamy

$$(8)\qquad \sum \{[X+m(v_{0x}-v_{2x})]\Delta x+[Y+m(v_{0y}-v_{2y})]\Delta y+[Z+m(v_{0z}-v_{2z})]\Delta z\} = 0,$$

gdzie v_{2x}, v_{2y}, v_{2z} są rzutami rzeczywistych prędkości punktów układu częściowo swobodnego, a Δx, Δy, Δz oznaczają rzuty wirtualnych przemieszczeń, spełniające warunki:

$$\sum\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f_\lambda}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f_\lambda}{\partial z}\Delta z\right) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l_1),$$

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z}\Delta z\right) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Warunki te odpowiadają więzom zachowanym w układzie częściowo swobodnym. We wzorze (8) występuje znak równości, ponieważ wszystkie stare więzy jednokierunkowe zostały odrzucone, a więzy nowe są aktywne.

Biorąc pod uwagę fakt, że wirtualne przemieszczenia układu rzeczywistego należą do zbioru wirtualnych przemieszczeń układu częściowo swobodnego (pierwsze założenie podstawowe), można zapisać równanie (8) w postaci

$$(9)\qquad \sum \{[X+m(v_{0x}-v_{2x})]\,\delta x+[Y+m(v_{0y}-v_{2y})]\,\delta y+[Z+m(v_{0z}-v_{2z})]\,\delta z\} = 0.$$

Odejmując stronami relacje (9) i (4) otrzymujemy

$$(10)\qquad \sum m[(v_{2x}-v_{1x})\,\delta x+(v_{2y}-v_{1y})\,\delta y+(v_{2z}-v_{1z})\,\delta z] \leqslant 0.$$

Następnie rozważając warunki na prędkości rzeczywistego i wirtualnego ruchów układu po uderzeniu, BOŁOTOW wykazał, że istnieją przemieszczenia witualne proporcjonalne do różnicy tych prędkości. Rzuty prędkości punktów w ruchu rzeczywistym po uderzeniu spełniają warunki, wynikające z równań (1) dla więzów dwukierunkowych:

$$(11)\qquad \frac{\partial f_\lambda}{\partial t}+\sum\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}v_{1x}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial y}v_{1y}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial z}v_{1z}\right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

oraz wynikające z relacji (3) i (2):

$$(12)\qquad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t}+\sum\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x}v_{1x}+\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y}v_{1y}+\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z}v_{1z}\right) = \beta_\nu \geqslant 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(13)\qquad \frac{\partial F_\mu}{\partial t}+\sum\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x}v_{1x}+\frac{\partial F_\mu}{\partial y}v_{1y}+\frac{\partial F_\mu}{\partial t}v_{1z}\right) = \gamma_\mu > 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Jeżeli rozpatrujemy tylko takie rodzaje ruchu, że prędkości osłabienia więzów (3) są takie same, jak w ruchu rzeczywistym, a prędkości osłabienia więzów (2) są nie mniejsze od odpowiednich wartości rzeczywistych, to prędkości wirtualne po uderzeniu spełniają warunki:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} v_{kx} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} v_{ky} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} v_{kz} \right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l), \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} v_{kx} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} v_{ky} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} v_{kz} \right) = \beta_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p), \tag{15}$$

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x} v_{kx} + \frac{\partial F_\mu}{\partial y} v_{ky} + \frac{\partial F_\mu}{\partial z} v_{kz} \right) = \gamma_\mu^1 \geqslant \gamma_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{16}$$

Odejmując stronami relacje (11), (12), (13) oraz odpowiednio (14), (15), (16), otrzymujemy

$$\sum \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} (v_{kx} - v_{1x}) + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} (v_{ky} - v_{1y}) + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} (v_{kz} - v_{1z}) \right] = 0, \tag{17}$$

$$\sum \left[\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} (v_{kx} - v_{1x}) + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} (v_{ky} - v_{1y}) + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} (v_{kz} - v_{1z}) \right] = 0, \tag{18}$$

$$\sum \left[\frac{\partial F_\mu}{\partial x} (v_{kx} - v_{1x}) + \frac{\partial F_\mu}{\partial y} (v_{ky} - v_{1y}) + \frac{\partial F_\mu}{\partial z} (v_{kz} - v_{1z}) \right] = \gamma_\mu^1 - \gamma_\mu \geqslant 0. \tag{19}$$

Porównując to z warunkami (5), (6), (7) dla przemieszczeń wirtualnych, dochodzimy do wniosku, że można założyć

$$\delta x = k(v_{kx} - v_{1x}), \quad \delta y = k(v_{ky} - v_{1y}), \quad \delta z = k(v_{kz} - v_{1z}). \tag{20}$$

Podstawienie wyrażeń (20) do wzoru (10) daje

$$\sum m[(v_{2x} - v_{1x})(v_{kx} - v_{1x}) + (v_{2y} - v_{1y})(v_{ky} - v_{1y}) + (v_{2z} - v_{1z})(v_{kz} - v_{1z})] \leqslant 0. \tag{21}$$

Z relacji tej wynika potwierdzenie uogólnionej zasady Gaussa dla uderzenia. Faktycznie w przypadku uderzenia odchyleniem i-tego ruchu od k-tego jest

$$dt^2 \sum m[(v_{ix} - v_{kx})^2 + (v_{iy} - v_{ky})^2 + (v_{iz} - v_{kz})^2] = 2dt^2 T_{ik},$$

gdzie

$$T_{ik} = \frac{1}{2} \sum m[(v_{ix} - v_{kx})^2 + (v_{iy} - v_{ky})^2 + (v_{iz} - v_{kz})^2]. \tag{22}$$

Pomijając stały mnożnik $2dt^2$, możemy przyjąć jako odchylenie T_{ik}, czyli energię kinetyczną prędkości utraconych przy przejściu z i-tego do k-tego ruchu.

Na podstawie oczywistego związku

$$\sum m(v_{ix} v_{kx} + v_{iy} v_{ky} + v_{iz} v_{kz}) = T_i + T_k - T_{ik},$$

możemy przedstawić (21) w postaci

$$T_{12} \leqslant T_{k2} - T_{k1}. \tag{23}$$

Ponieważ $T_{k1} > 0$, z warunku (23) wynika

$$T_{12} < T_{k2}, \tag{24}$$

czyli odchylenie rzeczywistego ruchu od częściowo swobodnego jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu wirtualnego.

Jeżeli przed uderzeniem układ miał tylko więzy dwukierunkowe, to relacje (21) i (23) stają się równościowe. Jeżeli ponadto ruchem «drugim» jest ruch układu bez więzów, to nierówność (24) wyraża klasyczną postać zasady Gaussa. Faktycznie, podstawiając do wzoru (24) wyrażenia T_{12} i T_{k2} dla układu swobodnego, otrzymamy

$$T_{10}+\sum[\underset{\cdot}{X}(v_{0x}-v_{1x})+\underset{\cdot}{Y}(v_{0y}-v_{1y})+\underset{\cdot}{Z}(v_{0z}-v_{1z})] < T_{k0}+\sum[\underset{\cdot}{X}(v_{0x}-v_{kx})+$$
$$+\underset{\cdot}{Y}(v_{0y}-v_{ky})+\underset{\cdot}{Z}(v_{0z}-v_{kz})],$$

skąd wynika, że funkcja

$$T_{k0}+\sum[\underset{\cdot}{X}(v_{0x}-v_{kx})+\underset{\cdot}{Y}(v_{0y}-v_{ky})+\underset{\cdot}{Z}(v_{0z}-v_{kz})]$$

osiąga minimum dla ruchu rzeczywistego w klasie ruchów wirtualnych.

BOŁOTOW zwraca uwagę na to, że APPEL [8] nazywa w swej książce ten wynik twierdzeniem Robina, gdy faktycznie jest to tylko postać zasady Gaussa dla uderzenia. Appel przeprowadza dowód zasady Robina, wykorzystując twierdzenie Carnota, które zachodzi tylko dla więzów ustalonych[8)] na początku uderzenia. Uważa przy tym, że ograniczenie to dotyczy również zasady Robina. Wykazując, że twierdzenie Robina jest szczególnym przypadkiem zasady Gaussa, BOŁOTOW udowodnił słuszność zasady Robina również dla przypadków, gdy twierdzenie Carnota nie może być stosowane.

Zauważmy, że z relacji (23) wynika nie tylko nierówność (24) wyrażająca uogólnioną zasadę Gaussa, lecz również nierówność

$$T_{k1} < T_{k2}. \tag{25}$$

Wyraża ona twierdzenie, że odchylenie ruchu rzeczywistego po uderzeniu od ruchu wirtualnego jest mniejsze niż odchylenie ruchu wirtualnego od ruchu częściowo lub całkowicie swobodnego. Bołotow nie zauważył tego wniosku.

W § 10 swej pracy BOŁOTOW pokazuje zastosowanie uogólnionej zasady Gaussa na przykładzie zadania o zderzeniu dwóch ciał.

Dowód zasady Gaussa, podany w pracy BOŁOTOWA tylko dla więzów holonomicznych, przechodzi również w przypadku liniowych więzów nieholonomicznych.

Rozpatrując szeroką klasę zagadnień, związanych z uogólnioną zasadą minimum wymuszenia, pojęciem częściowej redukcji więzów, postacią analityczną i dowodem zasady minimum, zastosowaniem jej w teorii uderzenia, skomplikowanym zagadnieniem osłabienia więzów jednokierunkowych, BOŁOTOW pozostawał jednak cały czas w kręgu holonomicznych i liniowych nieholonomicznych układów. Układy z więzami nieliniowymi i nieholonomicznymi nie były rozpatrywane w jego pracy. Pozostawiło to otwartą kwestię dalszego uogólnienia zasady Gaussa. Zagadnienie to stało się przedmiotem badań CZETAJEWA, absolwenta Uniwersytetu Kazańskiego.

Literatura cytowana w tekście

1. KÖNIGSBERGER, *Über die Prinzipien der Mechanik*, Crelle's Journal, B. 118 (1897).
2. H. HELMHOLTZ, *Über die physikalishe Bedeutung d. Prinzips d. kl. Wirkung*, Crelle's Journal, B. 100 (1886), 137 - 166, 213 - 222.

[8)] por. [8] str. 452.

3. H. HELMHOLTZ, *Vorlesungen über d. Dynamik diskreter Massenpunkte*, Leipzig 1898.
4. Э. МАХ, *Механика*, Историко-критический очерк её развития, 1909, стр. 306.
5. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском университете, **21**, 3 (1916).
6. Н. Г. ЧЕТАЕВ, *О принципе Гаусса*, Известия физико-математического общества при Казанском университете, сер. 3, т. VI, 1932—1933.
7. Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, Москва-Ленинград 1946, стр. 188.
8. П. Аппель, *Теоретическая механика*, ч. II. Москва, физматгиз, 1960, стр. 452.

POLITECHNIKA W WOŁGOGRADZIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1975 r.