

## WPLYW SIŁ BEZWŁADNOŚCI NA PRZEPLYW CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE MIĘDZY POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI: NIERUCHOMĄ I WIRUJĄCĄ

EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

### 1. Wstęp

Laminarne przepływy cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi tarczami [2 - 10, 14, 15] stożkami [11, 12] oraz powierzchniami obrotowymi (13, 16, 17] budziły od dawna zainteresowanie ze względu na możliwości szerokich zastosowań praktycznych w budowie maszyn.

Różnego rodzaju metody badań teoretycznych można znaleźć w literaturze przytoczonej na końcu pracy. W większości istniejących badań autorzy ograniczają się w zasadzie do uproszczonej analizy wpływu sił lepkości na przepływ cieczy. Niektóre z przytoczonych prac uwzględniają częściowy wpływ sił bezwładności; wymienić tu można prace [7, 9, 12, 14 - 17]. Na uwagę zasługuje również praca [13], w której zbadano szczególny przypadek przepływu cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi z uwzględnieniem wpływu sił bezwładności. Jednak uzyskane tam rozwiązanie zachowuje swoją ważność jedynie dla pewnych, ściśle określonych kształtów powierzchni, dla których istnieje samopodobieństwo przepływu.

Celem tej pracy jest podanie w postaci ogólnej rozwiązania problemu sformułowanego w tytule pracy, bez dodatkowych założeń upraszczających dotyczących kształtu powierzchni ograniczających obszar przepływu. W rozważaniach uwzględniono wpływ sił bezwładności stosując metodę małego parametru do rozwiązania równań ruchu cieczy lepkiej podobnie, jak w pracach [1, 18].

### 2. Równania ruchu

Aby rozpatrzyć badany przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi o wspólnej osi symetrii (rys. 1), wprowadzimy krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych  $x, \theta, y$  związany z wewnętrzną powierzchnią. Oś  $x$  niech będzie skierowana wzdłuż tworzącej wewnętrznej powierzchni, oś  $y$  — w poprzek szczeliny, prostopadle do tej tworzącej. Wewnętrzna nieruchoma powierzchnia niech będzie opisana funkcją  $R = R(x)$  oznaczającą jej promień, zaś grubość szczeliny  $h = h(x)$  — spełniającą zależność  $h \ll R$  — niech oznacza odległość między powierzchniami, mierzoną wzdłuż normalnej do wewnętrznej powierzchni.

Parametrami fizycznymi przepływu są składowe prędkości  $v_x, v_\theta, v_y$  oraz ciśnienie  $p$ . Ze względu na osiową symetrię przepływu parametry te nie zależą od kąta  $\theta$ .

Równania ruchu — przy założeniu, że  $h \ll R$  — podane są dla ogólnego przypadku przepływu w przyjętym układzie współrzędnych  $x, \theta, y$  w pracach [13, 16, 17]. Dokonując w tych równaniach oszacowań charakterystycznych dla przepływów w cienkich warstwach cieczy otrzymamy

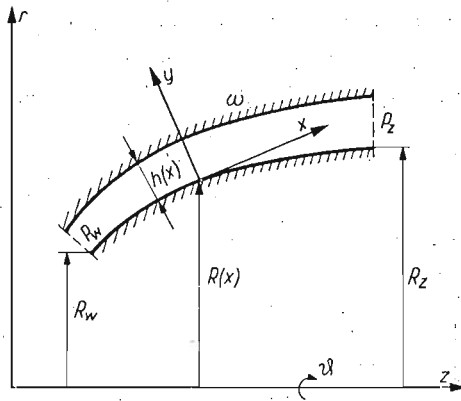
$$(2.1) \quad \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\theta^2 \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$(2.2) \quad \rho \left( v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x v_\theta \right) = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2},$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Tutaj i dalej w pracy przecinkiem oznacza się pochodną względem zmiennej  $x$ .



Rys. 1

Z równania (2.3) wynika zależność:

$$(2.5) \quad p = p(x).$$

Warunki brzegowe dla składowych prędkości są następujące:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} v_x = v_y = 0 & \quad \text{dla} \quad y = 0, \quad y = h, \\ v_\theta = 0 & \quad \text{dla} \quad y = 0, \quad v_\theta = R\omega \quad \text{dla} \quad y = h. \end{aligned}$$

Ponadto na wlocie i wylocie ze szczeliny powinny być spełnione następujące warunki brzegowe dla ciśnienia:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p = p_w & \quad \text{dla} \quad x = x_w, \\ p = p_z & \quad \text{dla} \quad x = x_z. \end{aligned}$$

Równań (2.1) - (2.4) użyjemy do wyznaczenia parametrów przepływu cieczy w szczelinie.

## 3. Całki równań ruchu

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe określone następującymi związkami:

$$(3.1) \quad \xi = \frac{x}{R_0}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{v}_x = \frac{v_x}{R_0 \omega},$$

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0}{R_0 \omega}, \quad \bar{v}_y = \frac{v_y}{h \omega}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\mu \omega} \left( \frac{h}{R_0} \right)^2$$

oraz oznaczając symbolem  $Re$  lokalną liczbę Reynoldsa

$$(3.2) \quad Re = \frac{\rho R_0 \omega h}{\mu},$$

możemy sprowadzić równania ruchu (2.1) - (2.4) — przy uwzględnieniu (2.5) — do bezwymiarowej postaci:

$$(3.3) \quad \lambda \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \xi} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \eta} - \frac{1}{R} \frac{d\bar{R}}{d\xi} \bar{v}_0^2 \right) = - \frac{d\bar{p}}{d\xi} - \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \eta^2},$$

$$(3.4) \quad \lambda \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \xi} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} + \frac{1}{R} \frac{d\bar{R}}{d\xi} \bar{v}_x \bar{v}_0 \right) = \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \eta^2},$$

$$(3.5) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial (\bar{R} \bar{v}_x)}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \eta} = 0;$$

gdzie oznaczono przez  $R_0$  — średnią wartość promienia powierzchni wewnętrznej,  $R_0 \omega$  — prędkość charakterystyczną przepływu,  $\lambda = Re \frac{h}{R_0}$  — zmodyfikowaną liczbę Reynoldsa.

Zmodyfikowana liczba Reynoldsa w przepływach laminarnych spotykanych w praktyce spełnia zależność.  $\lambda < 1$ .

Z równań (3.3) i (3.4) wynika, że dla przepływów zachodzących przy małych liczbach Reynoldsa,  $\lambda$  jest małym parametrem układu (3.3) - (3.5); zatem jego rozwiązania można przedstawić w postaci szeregów potęgowych względem  $\lambda$ :

$$(3.6) \quad \bar{v}_x = \bar{v}_x^{(0)} + \lambda \bar{v}_x^{(1)} + \lambda^2 \bar{v}_x^{(2)} + \dots$$

$$(3.7) \quad \bar{v}_0 = \bar{v}_0^{(0)} + \lambda \bar{v}_0^{(1)} + \lambda^2 \bar{v}_0^{(2)} + \dots$$

$$(3.8) \quad \bar{v}_y = \bar{v}_y^{(0)} + \lambda \bar{v}_y^{(1)} + \lambda^2 \bar{v}_y^{(2)} + \dots$$

$$(3.9) \quad \bar{p} = \bar{p}^{(0)} + \lambda \bar{p}^{(1)} + \lambda^2 \bar{p}^{(2)} + \dots$$

Podstawiając przewidywane rozwiązania (3.6) - (3.9) do układu (3.3) - (3.5) oraz grupując wyrażenia stojące przy tych samych potęgach  $\lambda$  otrzymamy układy równań różniczkowych liniowych względem niewiadomych funkcji  $\bar{v}_x^{(i)}$ ,  $\bar{v}_0^{(i)}$ ,  $\bar{v}_y^{(i)}$  oraz  $\bar{p}^{(i)}$ . Ograniczając się do liniowego przybliżenia i wracając do wielkości wymiarowych możemy napisać

$$(3.10) \quad \frac{\partial^2 v_x^{(0)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp^{(0)}}{dx},$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 v_0^{(0)}}{\partial y^2} = 0,$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [Rv_x^{(0)}],$$

$$(3.13) \quad \frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp^{(1)}}{dx} + \frac{\varrho}{\mu} \left[ v_x^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} + v_y^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\theta^{(0)2} \right],$$

$$(3.14) \quad \frac{\partial^2 v_\theta^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\varrho}{\mu} \left[ v_x^{(0)} \frac{\partial v_\theta^{(0)}}{\partial x} + v_y^{(0)} \frac{\partial v_\theta^{(0)}}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x^{(0)} v_\theta^{(0)} \right],$$

$$(3.15) \quad \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [Rv_x^{(1)}].$$

Warunki brzegowe zgodnie z (2.6) i (2.7) przyjmują teraz postać:

$$(3.16) \quad \begin{cases} v_x^{(0)} = v_x^{(1)} = v_y^{(0)} = v_y^{(1)} = 0 & \text{dla } y = 0, y = h, \\ v_\theta^{(0)} = v_\theta^{(1)} = 0 & \text{dla } y = 0, v_\theta^{(0)} = R\omega, v_\theta^{(1)} = 0 & \text{dla } y = h, \\ p^{(0)} = p_w, p^{(1)} = 0 & \text{dla } x = x_w, \\ p^{(0)} = p_z, p^{(1)} = 0 & \text{dla } x = x_z. \end{cases}$$

Całkując równania (3.10) - (3.15) przy spełnieniu warunków brzegowych (3.16) — podobnie jak uczyniono to w pracach [16, 17] — otrzymamy:

$$(3.17) \quad v_x^{(0)} = \frac{B}{2\mu} \frac{1}{Rh^3} (yh - y^2),$$

$$(3.18) \quad v_\theta^{(0)} = \omega \frac{R}{h} y,$$

$$(3.19) \quad v_y^{(0)} = \frac{B}{2\mu} \frac{h'}{Rh^4} (y^2h - y^3),$$

$$(3.20) \quad p^{(0)} = \frac{[A(x) - A_z]p_w - [A(x) - A_w]p_z}{A_w - A_z},$$

$$(3.21) \quad v_x^{(1)} = \frac{C}{2\mu} \frac{1}{Rh^3} (yh - y^2) - \frac{\varrho\omega^2 RR'}{60\mu h^2} (4yh^3 - 9y^2h^2 + 5y^4) + \\ + \frac{\varrho B^2}{1680\mu^3} \frac{(Rh)'}{R^3 h^7} (-2yh^5 + 9y^2h^4 - 35y^4h^2 + 42y^5h - 14y^6),$$

$$(3.22) \quad v_\theta^{(1)} = -\frac{\varrho B\omega^2}{120\mu^2} \frac{(Rh)'}{Rh^5} (2yh^4 - 5y^4h + 3y^5),$$

$$(3.23) \quad v_y^{(1)} = \left( \frac{C}{2\mu} \frac{h'}{Rh^4} + \frac{\varrho\omega^2 RR'h'}{10\mu h} \right) (y^2h - y^3) + \\ + \frac{\varrho\omega^2}{60\mu} \frac{1}{R} \left( \frac{R^2 R'}{h^2} \right)' (2y^2h^3 - 3y^3h^2 + y^5) + \\ + \frac{\varrho B^2}{1680\mu^3} \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{(Rh)'}{R^2 h^7} \right)' (y^2h^5 - 3y^3h^4 + 7y^5h^2 - 7y^6h + 2y^7) + \right. \\ \left. + \frac{(Rh)'h'}{R^3 h^7} (5y^2h^4 - 12y^3h^3 + 14y^5h - 7y^6) \right],$$

$$(3.24) \quad p^{(1)} = D(x) - \frac{[A(x) - A_z]D_w - [A(x) - A_w]D_z}{A_w - A_z},$$

gdzie dla uproszczenia zapisu oznaczono:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(x) = \int \frac{dx}{R(x)h^3(x)}, \quad A_w = A(x_w), \quad A_z = A(x_z); \\ D(x) = \frac{3}{20} \rho \omega^2 R^2 - \frac{3 \rho B^2}{560 \mu^2} \frac{1}{R^2 h^2}, \quad D_w = D(x_w), \quad D_z = D(x_z); \\ B = \frac{p_w - p_z}{A_z - A_w}, \quad C = \frac{D_z - D_w}{A_z - A_w}. \end{array} \right.$$

Rozwiązanie określonego zagadnienia, zgodnie z wzorami (3.6) - (3.9), stanowią sumy rozwiązań cząstkowych.

#### 4. Dyskusja otrzymanych wyników

Podane w poprzednim punkcie pracy wzory dla składowych prędkości można przedstawić w uproszczonej postaci niezależnie od kształtu powierzchni ograniczających przepływ:

$$(4.1) \quad v_x = F_1 f_1(\eta) + F_2 f_2(\eta) + F_3 f_3(\eta),$$

$$(4.2) \quad v_\theta = F_4 f_4(\eta) + F_5 f_5(\eta),$$

$$(4.3) \quad v_y = F_6 f_6(\eta) + F_7 f_7(\eta) + F_8 f_8(\eta) + F_9 f_9(\eta),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono:

$$f_1(\eta) = \eta - \eta^2, \quad f_2(\eta) = 4\eta - 9\eta^2 + 5\eta^4,$$

$$f_3(\eta) = -2\eta + 9\eta^2 - 35\eta^4 + 42\eta^5 - 14\eta^6,$$

$$f_4(\eta) = \eta, \quad f_5(\eta) = 2\eta - 5\eta^4 + 3\eta^5,$$

$$f_6(\eta) = \eta^2 - \eta^3, \quad f_7(\eta) = 2\eta^2 - 3\eta^3 + \eta^5,$$

$$f_8(\eta) = \eta^2 - 3\eta^3 + 7\eta^5 - 7\eta^6 + 2\eta^7,$$

$$f_9(\eta) = 5\eta^2 - 12\eta^3 + 14\eta^5 - 7\eta^6.$$

$F_i$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny, różnicy ciśnień między wlotem i wylotem ze szczeliny oraz od prędkości kątowej wirującej powierzchni.

Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkości  $v_x$  wynika, że główną jej częścią jest paraboliczny profil płaskiego przepływu Poiseuille'a [funkcja  $f_1(\eta)$  na rys. 2] uwarunkowany istnieniem różnicy ciśnień na wlocie i wylocie ze szczeliny i ruchem wirowym powierzchni zewnętrznej.

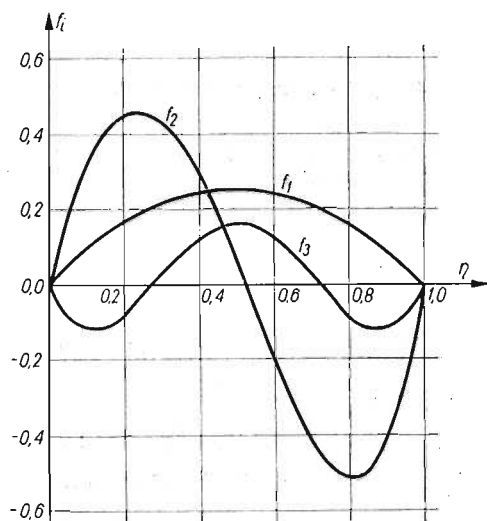
Na główną część składowej prędkości wzdłużnej nakłada się przepływ wtórny, wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni zewnętrznej. Przepływ wtórny opisany jest drugim składnikiem prędkości  $v_x$  i prędkością  $v_y$ ; profile przepływu wtórnego reprezentowane są przez funkcje  $f_2(\eta)$  na rys. 2 oraz  $f_6(\eta)$ , ...  $f_9(\eta)$  na rys. 4.

Profile prędkości obwodowej  $v_\theta$  opisane funkcjami  $f_4(\eta)$  i  $f_5(\eta)$  przedstawione zostały na rys. 3, przy czym główną częścią prędkości jest profil identyczny z profilem przepływu

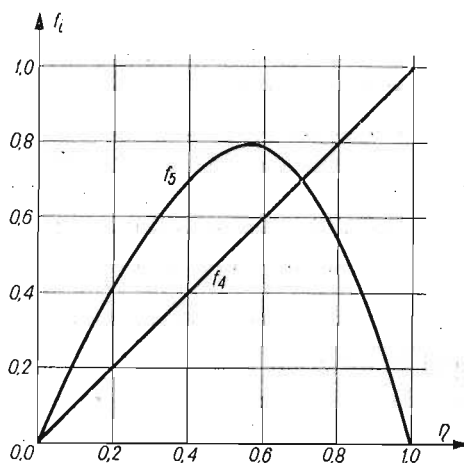
Couette'a między płaszczyznami, z których jedna jest w spoczynku, a druga porusza się z lokalną prędkością równą  $\omega \cdot R(x)$ .

W pracach [16, 17] rozwiązano podobne zagadnienia z częściowym uwzględnieniem sił bezwładności. Porównując otrzymane wyniki z wynikami tych prac można stwierdzić, że siły bezwładności powodują symetryczne względem osi szczeliny zmiany w głównych częściach profilów prędkości wzdłużnej (funkcja  $f_3(\eta)$  na rys. 2) i prędkości obwodowej (funkcja  $f_5(\eta)$  na rys. 3). Ponadto siły bezwładności powodują również stosunkowo duże zmiany w wypadkowym profilu prędkości poprzecznej  $v_y$ .

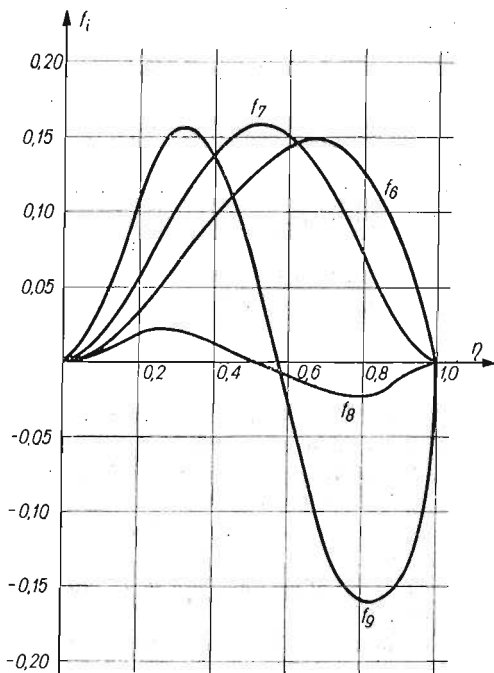
Zmiany wywołane wpływem sił bezwładności są stosunkowo niewielkie dla przepływów powolnych ( $\lambda \ll 1$ ) i mogą być pominięte. Natomiast dla przepływów charakterystycznych



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

dla szybkoobrotowych wzdłużnych łożysk ślizgowych zmiany te mogą osiągać lub nawet przewyższać rząd wielkości głównych profilów prędkości wzdłużnej czy obwodowej.

Ilościowe określenie wielkości tych zmian jest możliwe tylko dla określonych kształtów powierzchni ograniczających przepływ, różnicy ciśnień na wlocie i wylocie ze szczeliny oraz prędkości kątowej wirującej powierzchni.

Rozważone w pracy przybliżenie liniowe zachowuje swoją ważność dla małych wartości  $\lambda$ ; dla wartości  $\lambda$  bliskich jedności należy uwzględnić dalsze wyrazy szeregów (3.6) - (3.9).

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. KAHLERT, *Der Einfluss der Tragheitskräfte bei der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie*, *Ingenr — Arch.*, **16** (1948), 321 - 342.
2. T. VANNERUS, *Rotierende Scheiben für Luftvorwärmer mit geblasen — wirkung*, *Ang. Wärmetechn.*, **6** (1955), 251 - 262.
3. W. RICE, *An analytical and experimental investigation of multiple disk pumps and compressors*, *J. Eng. for Power*, *Trans. ASME, Ser. A*, **3**, **85** (1963), 191 - 200.
4. W. RICE, *An analytical and experimental investigation of multiple disk turbines*, *J. Eng. for Power*, *Trans. ASME, Ser. A*, **1**, **87** (1965), 29 - 36.
5. J. -L. PEUBE, F. KREITH, *Écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques parallèles en rotation*, *J. Mécanique*, **2**, **5** (1966), 260 - 281.
6. F. KREITH, H. VIVIAND, *Laminar source flow between two parallel coaxial disks rotating at different speeds*, *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME, Ser. E*, **3**, **34** (1967), 541 - 547.

7. L. MATSCH, W. RICE, *An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1, 35 (1968), 155 - 159.
8. K. E. BOYD, W. RICE, *Laminar inward flow of an incompressible fluid between corotating disks with full peripheral admission*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 2, 35 (1968), 229 - 237.
9. H. J. SNECK, *The eccentric face seal with a tangentially varying film thickness*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 4, 91 (1969), 748 - 755.
10. R. G. ADAMS, W. RICE, *Experimental investigation of the flow between corotating disks*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E, 3, 37 (1970), 844 - 849.
11. W. RICE, K. W. MCALISTER, *Laminar throughflow of Newtonian fluid between coaxial rotating cones*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1, 37 (1970), 210 - 212.
12. A. SZANIAWSKI, *Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego*, Prace IPPT PAN, 15 (1970).
13. K. W. MCALISTER, W. RICE, *Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similarity solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 4, 37 (1970), 924 - 930.
14. L. L. TING, J. E. MAYER, Jr., *The effects of temperature and inertia on hydrostatic thrust bearing performance*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 2, 93 (1971), 307 - 312.
15. E. MAKAY, P. R. TRUMPLER, *Inertia effects in fully developed axisymmetric laminar flow*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 3, 93 (1971), 408 - 414.
16. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 12 (1974), 7 - 16.
17. E. WALICKI, *Viscous fluid flow in a slot of the curvilinear thrust bearing*, Méc. Appliquée, Rev. Roum. Sci. Tech., 4, 20 (1975), 483 - 493.
18. E. REINHARDT, J. W. LUND, *The influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings*, J. Lubric. Technol., Trans. ASME, Ser. F, 2, 97 (1975), 159 - 167.

#### Р е з ю м е

#### ВЛИЯНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ МЕЖДУ НЕПОДВИЖНОЙ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

В работе рассмотрено стационарное, ламинарное течение вязкой жидкости в щели между поверхностями вращения с общей осью симметрии: неподвижной и вращающейся. Для решения задачи применяются уравнения пограничного слоя для осесимметрического течения в системе криволинейных координат  $x, \theta, y$ , связанных с одной из этих поверхностей. Уравнения пограничного слоя решаются методом малого параметра. Получены формулы, определяющие такие параметры течения, как компоненты скорости  $v_x, v_\theta, v_y$  и давление  $p$ .

#### S u m m a r y

#### INERTIA EFFECT IN THE FLOW OF VISCOUS FLUID THROUGH A SLOT BETWEEN FIXED AND ROTATING SURFACES OF REVOLUTION

In this paper is considered the steady laminar flow of viscous fluid through a slot between the fixed and rotating surfaces of revolution having a common axis of symmetry. The boundary layer equations are expressed in terms of the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system  $x, \theta, y$  linked with one of these surfaces. The method of perturbation is used to solve the boundary layer equations. As a result, the formulae defining such parameters of the flow as the velocity components  $v_x, v_\theta, v_y$ , and pressure  $p$  are obtained.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
W BYDGOSZCZY

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 sierpnia 1976 r.