

STATYKA POWŁOKI WALCOWEJ ZAMKNIĘTEJ PRACUJĄCEJ W STANIE ZGIĘCIOWYM

STANISŁAW BIELAK (OPOLE)

1. Wstęp

Przedstawione w tym opracowaniu rozwiązanie, ilustrowane przykładem liczbowym, bazuje na pracy autora [5], podającej całkę równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe. Materiał zawarty w tym artykule nawiązuje do pracy [5] od strony zastosowań do pewnych przykładów obliczeń inżynierskich.

Rozpatrzone powłokę walcową zamkniętą, obciążoną powierzchniowo, dla której siły wewnętrzne i przemieszczenia opisano wyrażeniami ogólnymi zależnymi od sposobu obciążenia i warunków podparcia. Wyrażenia opisujące pracę powłoki są sumami złożonymi z całek szczególnych, odpowiadających pracy błonowej, i całek ogólnych dających pracę zgięciową.

Całki szczególne uzyskuje się w bezpośrednim procesie całkowania funkcji obciążeń powierzchniowych, natomiast całki ogólne posiadają kształt szeregów hipertrygonometrycznych.

2. Ogólny układ równań powłok walcowych

Wszystkie wzory i zależności podane w tym rozdziale będą napisane na podstawie prac autora [1, 2, 3, 4]. Również całka równania różniczkowego rozwiązującego będzie podana w gotowej postaci wziętej z pracy [5].

2.1. Opis i związki geometryczne powłoki. Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej, ich wyróżniki oraz krzywizny — gaussowska i średnia wynoszą:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= g_{21} = 0, & g_{22} &= g = a^2, \\ b_{11} &= 0, & b_{12} &= b_{21} = 0, & b_{22} &= a, & b &= 0, \\ K &= 0, & H &= \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju Γ_{ij}^k dla powierzchni walcowej są równe zeru.

Związki składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego mają postać:

$$(2.2) \quad w_{,1}^1 = \gamma_{11}, \quad a^2 w_{,1}^2 + w_{,2}^1 = 2\gamma_{12}, \quad a^2 w_{,2}^2 - aw^3 = \gamma_{22}.$$

Przecinek użyty w wyrażeniach (2.2) oznacza odpowiednią pochodną wziętą względem zmiennej u^1 lub u^2 .

2.2. Związki fizyczne. Siły i momenty

$$\begin{aligned}
 N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + 6H\hat{M}^{ij}, \\
 M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H\bar{N}^{ij}, \\
 Q^j &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} g^{ij} W_{,i} + \xi h^2 (H\bar{N}^{ij})_{,i},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

gdzie ξ jest parametrem stałym oraz W jest sumą

$$W = g^{ij} w_{,ij}^3.
 \tag{2.4}$$

Związki odkształceń z siłami dla parametryzacji naturalnej

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= \frac{1}{2Eh} [\bar{N}^{11} - \nu a^2 \bar{N}^{22}], \\
 \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \frac{1+\nu}{2Eh} a^2 \bar{N}^{12}, \\
 \gamma_{22} &= \frac{a^2}{2E2} [a^2 \bar{N}^{22} - \nu N^{11}].
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Związki momentów z przemieszczeniami dla parametryzacji naturalnej

$$\begin{aligned}
 \hat{M}^{11} &= -\frac{Eha^2}{2\alpha^4} \left[w_{,11}^3 + \frac{\nu}{a^2} w_{,22}^3 \right], \\
 \hat{M}^{12} &= \hat{M}^{21} = -\frac{(1-\nu)Eh}{2\alpha^4} w_{,12}^3, \\
 \hat{M}^{22} &= -\frac{Eh}{2\alpha^4} \left[\nu w_{,11}^3 + \frac{1}{a^2} w_{,22}^3 \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Występujący w (2.6) parametr α jest równy

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{2h}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}.
 \tag{2.7}$$

2.3. Całka równania rozwiązującego. Całka równania rozwiązującego jest sumą złożoną z całki ogólnej \hat{w}^3 i całki szczególnej \bar{w}^3 , (patrz praca [5])

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.
 \tag{2.8}$$

Całka szczególna \bar{w}^3 będzie rozwiązaniem stanu bezmomentowego, a całka ogólna może być przedstawiona jako suma szeregu hipertrygonometrycznego.

Wielkości pomocnicze

Argumenty funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}
 Z_H^k &= \alpha \alpha^k \frac{u^1}{a}, \\
 Z_K^l &= \alpha \left[m^l \frac{u^1}{a} + nu^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Parametr α jest określony przez (2.7), natomiast wielkości α^k i m^l są równe

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \alpha^k &= \varepsilon_k n \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} + 1 \right]}, \\ m^l &= \delta_l n \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} + 1}, \\ \beta_n &= n \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} - 1}, \end{aligned}$$

napişemy

$$(2.10') \quad \begin{aligned} \alpha^k &= \varepsilon_k \alpha_n \\ m^l &= \delta_l \beta_n. \end{aligned}$$

Tensory trygonometryczne

$$(2.11) \quad \begin{aligned} A_n^{ik} &= H^i Z_H^k, & \bar{A}_n^{ik} &= \bar{H}^i Z_H^k, \\ B_n^{jl} &= K^j Z_K^l, & \bar{B}_n^{jl} &= \bar{K}^j Z_K^l. \end{aligned}$$

Wielkości H^i i K^j są symbolami funkcji trygonometrycznych, hiperbolicznych i kołowych, a \bar{H}^i oraz \bar{K}^j symbolami odpowiednich pochodnych,

$$(2.12) \quad \begin{aligned} H^i &= \begin{cases} \text{sh} & \text{dla } i = 1, \\ \text{ch} & \text{dla } i = 2, \end{cases} & \bar{H}^i &= \begin{cases} \text{ch} & \text{dla } i = 1, \\ \text{sh} & \text{dla } i = 2, \end{cases} \\ K^j &= \begin{cases} \sin & \text{dla } j = 1, \\ \cos & \text{dla } j = 2, \end{cases} & \bar{K}^j &= \begin{cases} \cos & \text{dla } j = 1, \\ -\sin & \text{dla } j = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Całka ogólna (rozwiązanie podano w pracy [5])

$$(2.13) \quad \hat{w}^3 = \sum_n C_{klij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}.$$

Przejsie do współrzędnych fizycznych, sprowadzonych do bazy jednostkowej, umożliwią wzory:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} N_{ij}^{\bar{1}} &= \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ii}}} N^{ij}, & Q_i^{\bar{1}} &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ M_{i1}^{\bar{1}} &= -\sqrt{\frac{g g^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, & M_{i2}^{\bar{1}} &= \sqrt{\frac{g g^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ w_i^{\bar{1}} &= \sqrt{g_{ii}} w^i, & w_3^{\bar{1}} &= w^3, \\ P_i^{\bar{1}} &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & P_3^{\bar{1}} &= P^3. \end{aligned}$$

Uwaga: po ij nie sumować.

Symbol „ $\bar{1}$ ” oznacza współrzędną fizyczną.

3. Wyrażenia opisujące pracę powłoki

3.1. Stan błonowy. Stan ten jest całą szczególną rozwiązaniem ogólnego powłok pracujących w stanie zgięciowym. Wyrażenia opisujące wielkości sił, momentów i przemieszczeń będą napisane na podstawie pracy [1].

Siły błonowe

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{22} &= -\frac{1}{a} P^3, \\ \bar{N}^{12} &= \int \left[\frac{1}{a} P_{,2}^3 - P^2 \right] du^1 + C_1(u^2), \\ \bar{N}^{11} &= - \int \left[\int \left(\frac{1}{a} P_{,22}^3 - P_{,2}^2 \right) du^1 + P^1 \right] du^1 - u^1 C_{1,2} + C_2(u^2). \end{aligned}$$

Występujące w (3.1) funkcje C_1 i C_2 zależą tylko od zmiennej u^2 i będą wyznaczone z warunków brzegowych, a wielkości P^1 , P^2 , P^3 są danymi funkcjami obciążeń.

Składowe przemieszczenia wyznaczmy z wyrażeń (2.2) po podstawieniu składowych odkształcenia ze związków (2.5) przy równoczesnym wykorzystaniu sił błonowych opisanych w (3.1):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{w}^1 &= \int \gamma_{11} du^1 + C_3(u^2), \\ \bar{w}^2 &= \frac{1}{a^2} \int \left[2\gamma_{12} - \bar{w}_{,2}^1 \right] du^1 + C_4(u^2), \\ \bar{w}^3 &= -\frac{1}{a} [\gamma_{22} - a^2 \bar{w}_{,2}^2]. \end{aligned}$$

Użyte w (3.2) kreski \bar{w}^i deklarują przynależność do stanu błonowego, a funkcje C_3 , C_4 zmiennej u^2 zależą tylko od warunków brzegowych.

3.2. Stan zgięciowy. Całka równania rozwiązującego jednorodnego podana w pracy [5] umożliwi rozwiązanie ogólnego układu równań powłok walcowych opisujących wszystkie wielkości charakteryzujące pracę zgięciową powłoki. Przeprowadzając odpowiednie operacje matematyczne związane z całkowaniem i różniczkowaniem wyrażeń szeregu hipertrygonometrycznego znajdziemy poszukiwane wielkości sił, momentów i przemieszczeń.

Siły

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \hat{N}^{22} &= -\frac{2Eh}{a^3} \sum_n C_{klij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}, \\ \hat{N}^{12} &= \frac{2Eh}{a^2} \sum_n \frac{n}{\sqrt{4+n^4}} C_{klij}^n [\delta_l \beta_n A_n^{ik} B_n^{jl} + \varepsilon_k \alpha_n \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\ \hat{N}^{11} &= \frac{2Eh}{a} \sum_n \frac{n^4}{4+n^4} C_{klij}^n \left[A_n^{ik} B_n^{jl} - 2 \frac{\varepsilon_k \delta_l}{n^2} \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl} \right], \\ \hat{Q}^1 &= + \frac{Eh}{\alpha a} \sum_n C_{klij}^n [\varepsilon_k \beta_n \bar{A}_n^{ik} B_n^{jl} - \delta_l \alpha_n A_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\ \hat{Q}^2 &= \frac{Eh}{\alpha a^2} \sum_n n \varepsilon_k \delta_l C_{klij}^n \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}. \end{aligned}$$

Momenty

$$\begin{aligned}
 \hat{M}^{11} &= -\frac{Eh}{2\alpha^2} \sum_n C_{klij}^n [(1-\nu)n^2 A_n^{ik} B_n^{jl} + 2\varepsilon_k \delta_l \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\
 \hat{M}^{12} &= \frac{(1-\nu)Eh}{2\alpha^2} \sum_n n C_{klij}^n [\delta_l \beta_n A_n^{ik} B_n^{jl} - \varepsilon_k \alpha_n \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\
 \hat{M}^{22} &= \frac{Eh}{2\alpha^2 a^2} \sum_n C_{klij}^n [(1-\nu)n^2 A_n^{ik} B_n^{jl} - 2\nu\varepsilon_k \delta_l \bar{A}_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}].
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Przemieszczenia

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^1 &= \frac{\nu}{\alpha} \sum_n \frac{1}{\sqrt{4+n^4}} C_{klij}^n [\varepsilon_k \alpha_n \bar{A}_n^{ik} B_n^{jl} - \delta_l \beta_n A_n^{ik} \bar{B}_n^{jl}], \\
 \hat{w}^2 &= \frac{(2+\nu)}{\alpha a} \sum_n \frac{n^3}{4+n^4} C_{klij}^n \left[A_n^{ik} \bar{B}_n^{jl} + 2 \frac{\varepsilon_k \delta_l}{n^2} \bar{A}_n^{ik} B_n^{jl} \right], \\
 \hat{w}^3 &= \sum_n C_{klij}^n A_n^{ik} B_n^{jl}.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

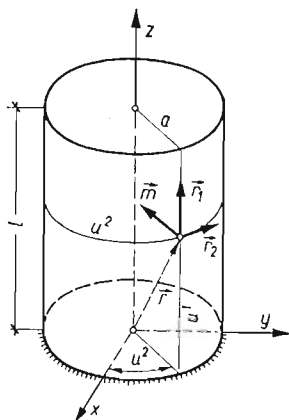
Dla wersji uproszczonej można przyjąć

$$\hat{w}^2 = 0, \quad \hat{N}^{11} = 0,
 \tag{3.6}$$

ponieważ wielkości te są małymi wyższego rzędu w porównaniu z wielkościami wywołanymi stanem błonowym.

4. Przykład

Dana jest powłoka walcowa zamknięta o promieniu a i wysokości l , rys. 1, zamocowana tylko u swej podstawy i obciążona parciem wiatru W .



Rys. 1

Obciążenie przyjęto następujące:

$$P^1 = 0, \quad P^2 = 0, \quad P^3 = W \sin u^2.
 \tag{4.1}$$

4.1. Stan błonowy. Wyrażenia (3.1) i (3.2) po podstawieniu (4.1) i uwzględnieniu warunków podparcia (zamocowany dolny brzeg), dadzą:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}^{11} &= \frac{Wl^2}{2a} \left(1 - \frac{u^1}{l}\right)^2 \sin u^2, \\
 \bar{N}^{12} &= -\frac{Wl}{a} \left(1 - \frac{u^1}{l}\right) \cos u^2, \\
 \bar{N}^{22} &= -\frac{W}{a} \sin u^2, \\
 \bar{w}^1 &= \frac{Wau^1}{3Eh} \left(\frac{l}{2a}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{u^1}{l}\right) \left(2 - \frac{u^1}{l}\right) + \frac{3\nu}{2} \left(\frac{2a}{l}\right)^2 + 1 \right] \sin u^2, \\
 \bar{w}^2 &= \frac{Wa}{Eh} \left(\frac{l}{2a}\right)^2 \left[\nu \left(1 - \frac{u^1}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{l}\right)^2 - F \right] \cos u^2, \\
 \bar{w}^3 &= \frac{Wa^2}{Eh} \left(\frac{l}{2a}\right)^2 F \sin u^2,
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

gdzie

$$F = \frac{1}{3} \left\{ \left[\left(2 + \left(2 - \frac{u^1}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{l}{2a} \right)^2 + 3\nu \right] \frac{u^1}{l} + 3(2+\nu) \left(2 - \frac{u^1}{l} \right) \right\} \frac{u^1}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{l} \right)^2 + \nu.$$

4.2. Stan zgięciowy. Wyrażenia (3.3)-(3.5) dla rozpatrywanego przykładu znacznie się uproszczą, a sumowanie tensorowo-nieskończone przejdzie w sumowanie tensorowe i to tylko ze względu na wskaźniki j, l

$$\begin{aligned}
 \hat{N}^{11} &= \frac{4Eh}{\alpha^2 a} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_i \bar{B}^{jl}, \\
 \hat{N}^{12} &= \frac{Eh}{\alpha a^2} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [\delta_i B^{jl} - \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{N}^{22} &= -\frac{2Eh}{a^3} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} B^{jl}, \\
 \hat{Q}^1 &= -\frac{Eh}{\alpha a} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [B^{jl} + \delta_i \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{Q}^2 &= -\frac{Eh}{(\alpha a)^2} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_i B^{jl}, \\
 \hat{M}^{11} &= \frac{Eh}{\alpha^2} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_i \bar{B}^{jl}, \\
 \hat{M}^{12} &= \frac{(1-\nu)Eh}{2\alpha a^3} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [\delta_i B^{jl} + \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{M}^{22} &= \frac{\nu}{\alpha^2} \hat{M}^{11}, \\
 \hat{w}^1 &= -\frac{\nu}{2\alpha} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} [B^{jl} + \delta_i \bar{B}^{jl}], \\
 \hat{w}^2 &= -\frac{2+\nu}{2\alpha^2 a} (A^{11} - A^{21}) C_{111j} \delta_i B^{jl}, \\
 \hat{w}^3 &= (A^{11} - A^{21}) C_{111j} B^{jl}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Występujące w wyrażeniach (4.3) stałe C_{11ij} wyznaczmy z odpowiednich warunków brzegowych, np. dla $u^1 = 0$ jest

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3 = 0.$$

4.3. Zestawienie wyników.

4.3.1. Wielkości tensorowe

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + \hat{N}^{ij} + \frac{3}{a} \hat{M}^{ij}, \\ Q^i &= \hat{Q}^i, \\ M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \frac{\xi h^2}{2a} \bar{N}^{ij}, \\ w^i &= \bar{w}^i + \hat{w}^i. \end{aligned}$$

4.3.2. Wielkości fizyczne. Znając wielkości tensorowe (4.4) możemy wzorami (2.14) przetransformować je do współrzędnych fizycznych związanych z bazą jednostkową

$$(4.5) \quad \begin{aligned} N_{11}^{\bar{}} &= N^{11}, & N_{12}^{\bar{}} &= aN^{12}, & N_{22}^{\bar{}} &= a^2N^{22}, \\ Q_1^{\bar{}} &= Q^1, & Q_2^{\bar{}} &= aQ^2, \\ M_{11}^{\bar{}} &= -aM^{12}, & M_{21}^{\bar{}} &= -a^2M^{22}, \\ M_{12}^{\bar{}} &= M^{11}, & M_{22}^{\bar{}} &= aM^{21}, \\ w_1^{\bar{}} &= w^1, & w_2^{\bar{}} &= aw^2, & w_3^{\bar{}} &= w^3. \end{aligned}$$

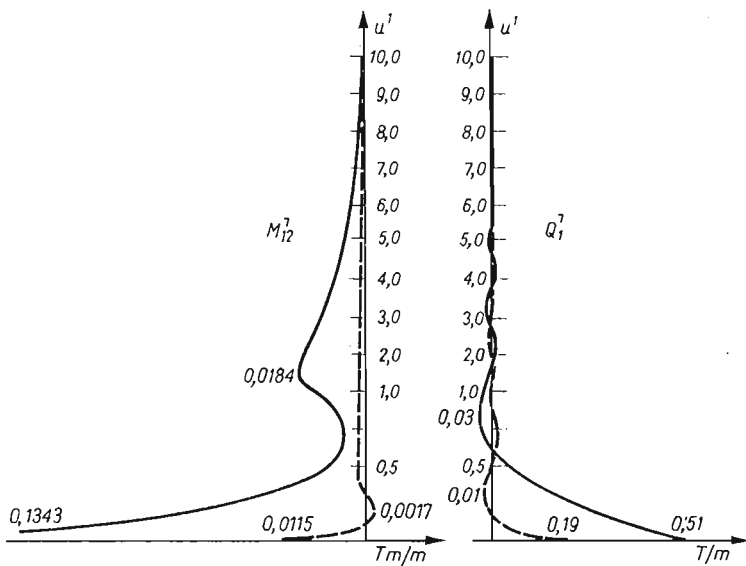
5. Przykład liczbowy

W przykładach szczegółowych przyjęto następujące dane wyjściowe dla stali i żelbetu:

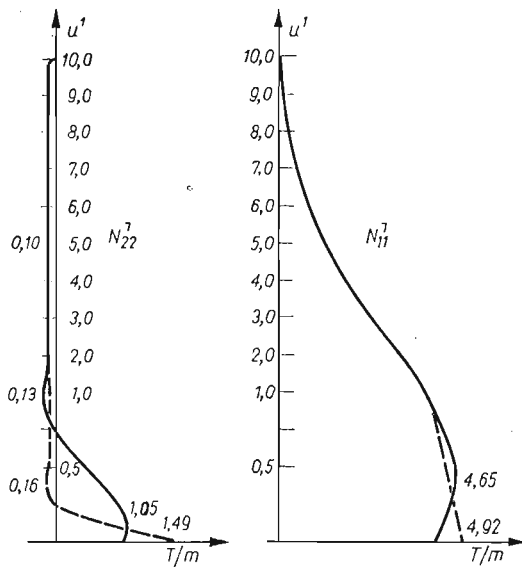
Stal:	$h = 1,0 \text{ cm},$ $a = 1,0 \text{ m},$ $l = 10,0 \text{ m},$ $\nu = 0,3,$ $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2,$ $W = 100 \text{ kG/m}^2.$
Żelbet:	$h = 10,0 \text{ cm},$ $a = 1,0 \text{ m},$ $l = 10,0 \text{ m},$ $\nu = 0,2,$ $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2,$ $W = 100 \text{ kG/m}^2.$

Wyniki obliczeń niektórych wielkości charakterystycznych przedstawiono na rys. 2a, b, c, d, przy czym linie przerywane obrazują powłokę stalową, a linie ciągłe odpowiadają powłoce żelbetowej.

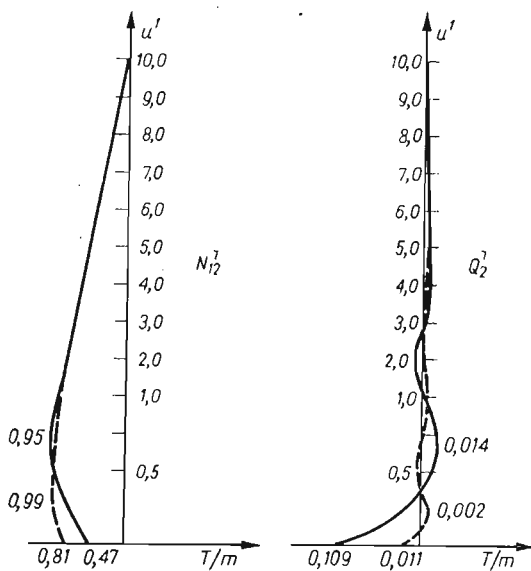
Wykresy $M_{12}^{\bar{}}$, $Q_1^{\bar{}}$, $N_{11}^{\bar{}}$, $N_{22}^{\bar{}}$, $w_1^{\bar{}}$, $w_3^{\bar{}}$ sporządzono dla $u^2 = \pi/2$, natomiast $N_{12}^{\bar{}}$ i $Q_2^{\bar{}}$ dla $u^2 = 0$.



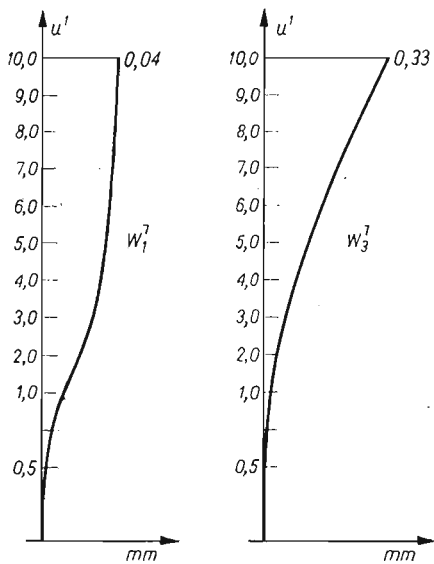
Rys. 2a



Rys. 2b



Rys. 2c



Rys. 2d

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym*, Politechnika Śląska, Budownictwo, 33, (1973) 1 - 109.
2. St. BIELAK, *A general scheme of equations covering rectilinearly drawn shell structures*, Zastosowania Matematyki 2, 14, (1974) 313 - 326.
3. St. BIELAK, *Solution of a general system of equations of rectilinear evolvable shells in the bending state*, Bull. Ac. Pol. Sci., Sér., Sci. techn., 2, 22, (1974) 63 - 69.
4. St. BIELAK, *Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 12, (1974), 265 - 278.
5. St. BIELAK, *Calka równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego powłoki walcowe*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 14, (1976) (w druku).

Резюме

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПРИ РАБОТЕ НА ИЗГИБ

В работе представлен расчет замкнутой цилиндрической оболочки, работающей на изгиб. Внутренние силы и перемещения описаны общими выражениями, которые представляют собой суммы частных интегралов, отвечающих безмоментному состоянию, и общих интегралов, определяющих работу оболочки при изгибе. Общие интегралы представляют собой гипертригонометрические ряды.

В конце работы приведен численный пример, поясняемый графиками некоторых характерных величин.

Summary

STATICS OF A CLOSED CYLINDRICAL SHELL IN THE MOMENT STATE

The paper presents the solution of closed cylindrical shell structures working in the moment state. Internal forces and deformations were described by general expressions which are sums composed of particular integrals representing the momentless state and of a general integral representing the moment state. The general integrals have a form of hypertrigonometric series. An example given in the latter part of the paper is illustrated by diagrams of some characteristic quantities.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA W OPOLU

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 października 1975 r.