

STATECZNOŚĆ POWŁOK OBROTOWYCH O MAŁEJ KRZYWIŹNIE POŁUDNIKA, PRZY
OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

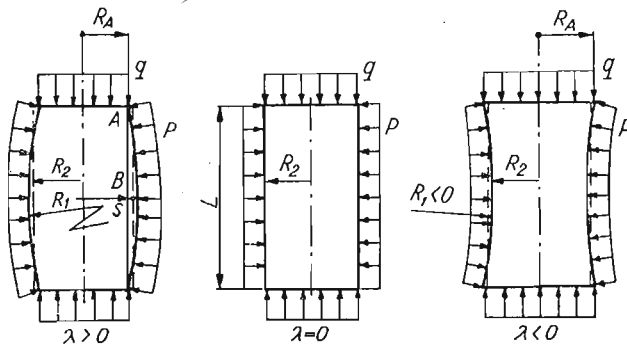
STANISŁAW ŁUKASIEWICZ, ANDRZEJ WAWRZYŃIAK (WARSZAWA)

Tematem pracy jest zagadnienie stateczności powłoki osiowo-symetrycznej o kształcie zbliżonym do walca, poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego i jednocześnie ściskanej osiowo. W niniejszej pracy zbadano, jaki jest wpływ zakrzywienia południka powłoki na stateczność takiej powłoki przy obciążeniu złożonym.

Zagadnienie stateczności powłoki o kształcie zbliżonym do walca rozpatrywane było w przypadku obciążeń niezależnych w pracach [1] i [2]. Jednakże brak dotychczas rozwiązania postawionego zadania w przypadku, gdy oba obciążenia działają jednocześnie. Zadanie rozwiązano opierając się na równaniach udoskonalonej technicznej teorii powłok [3]. Rozpatrywane powłoki przedstawiono na rys. 1. Ich kształt został scharakteryzowany przez współczynnik $\lambda = R_2/R_1$, gdzie R_1 i R_2 są głównymi promieniami krzywizny, R_1 jest promieniem krzywizny południka. Ponieważ $R_2 \ll R_1$, λ jest wielkością małą, która powinna się zawierać w przedziale $-0,1 < \lambda < 0,1$. Przyjęto dalej, że rozpatrywane powłoki są izotropowe i mają stałą grubość oraz że ich promienie krzywizny są stałe i równe swym średnim wartościom. Gdy promień R_1 uznamy za stały, średni promień krzywizny R_2 powłoki przedstawionej na rys. 1, obliczany jako średnia arytmetyczna z promieni w przekroju A i B , wynosi

$$(1) \quad R_{2sr} = R_2 = \frac{1}{2} \left\{ R_A \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{\sqrt{1 - \bar{\mu}^2}} + R_1 (1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}) \right\},$$

gdzie $\bar{\mu} = L/2R_1$ jest parametrem charakteryzującym długość powłoki.



Rys. 1

Związana z zakrzywieniem południka strzałka łuku s nie powinna być większa niż $1/5R_2$, co daje warunek

$$(2) \quad \frac{L}{R_2} < \frac{2s}{R_2} \sqrt{\frac{2R_2}{s|\lambda|} - 1} = 0,4 \sqrt{\frac{10}{|\lambda|} - 1}.$$

Dla $|\lambda| = 0,1$ otrzymujemy $L/R_2 \leq \sim 4,0$ dla $\lambda = 0$, $L \rightarrow \infty$. Z zależności geometrycznych wynika również, że

$$(3) \quad \frac{s}{R_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{\lambda} < \frac{1}{5},$$

wtedy $\bar{\mu}^2 \leq 0,4\lambda$, a więc $\bar{\mu}^2$ jest wielkością małą w stosunku do jedności. Biorąc powyższe pod uwagę możemy zależność (1) uprościć i otrzymamy dla średniego promienia krzywizny i $|\lambda| \ll 1$ następujący wzór przybliżony

$$(4) \quad R_2 = R_A \frac{1 + 0,25 \lambda^2 \mu^2}{1 - 0,5 \lambda \mu^2},$$

gdzie $\mu = \bar{\mu}\lambda = L/2R_2$, $\lambda = R_2/R_1$.

Założenie, że współczynnik λ jest wielkością małą, bliską zeru, pozwala przyjąć, że kształt badanych powłok nie różni się znacznie od kształtu walcowego. Dzięki temu w dalszej części pracy można uznać, że współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni środkowej powłoki są stałe i równe jedności.

Zastosowane równania udoskonalonej technicznej teorii powłok mają postać (3):

$$(5) \quad D \left(\Delta + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right)^2 w - \Delta_k \Phi = L(w, \Phi) + P_z,$$

$$\frac{1}{Eh} \left(\Delta + \frac{1}{R_1 R_2} \right)^2 \Phi + \Delta_k w = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

gdzie E — oznacza moduł sprężystości, h — grubość powłoki, R_1, R_2 — główne promienie krzywizny powierzchni środkowej, w — ugięcie powłoki, Φ — funkcję naprężeń.

Siły błonowe wyrażone są przez następujące związki

$$(6) \quad N_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_1} \int Q_x dx,$$

$$N_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2} \int Q_y dy,$$

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ (operator Laplace'a),}$$

$$(7) \quad \Delta_k = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

$$L(w, \Phi) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Gdy badamy stan równowagi powłoki w momencie utraty stateczności, możemy uznać, że jej ugięcia są w tym momencie jeszcze bardzo małe, a więc $L(w, w) = 0$. Wtedy jako funkcję naprężeń występującą w operatorze $L(w, \Phi)$ możemy przyjąć funkcję naprężeń dla stanu podstawowego, to jest stanu przed wyboczeniem się powłoki. Wówczas układ równań (5) staje się liniowy i może być sprowadzony do jednego równania

$$(8) \quad \left(\Delta + \frac{1}{R_1 R_2}\right)^2 \left(\Delta + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)^2 w + \frac{Eh}{D} \Delta_k \Delta_k w = \\ = \frac{1}{D} \left(\Delta + \frac{1}{R_1 R_2}\right)^2 [\kappa_{xx} N_{xx} + \kappa_{yy} N_{yy} + 2\kappa_{xy} N_{xy} + P_z],$$

gdzie κ_{ij} są zmianami krzywizn, N_{ij} siłami błonowymi w powłoce przed wyboczeniem.

Przyjmujemy, że brzegi powłoki są swobodne. Na powłokę działa z zewnątrz stałe ciśnienie normalne p oraz obciążenie ściskające osiowo przyłożone do brzegu, o natężeniu q .

Siłę błonową N_{xx} łatwo określimy z równania równowagi części powłoki odciętej płaszczyzną prostopadłą do osi. Otrzymamy

$$(9) \quad N_{xx} = -q \frac{R_2 R_A}{r^2} - p \frac{R_2}{2} \left(1 - \frac{R_A^2}{r^2}\right),$$

gdzie promienie R_A , R_2 , r określone są na rys. 1. Promień R_2 i r jest zmienny i zależy od kąta φ . Gdy współczynnik λ jest wielkością bliską zero $-0,1 < \lambda < 0,1$, promienie te zmieniają się nieznacznie. Zakładając, że w przybliżeniu są one stałe i równe swym średnim wartościom w obszarze powłoki, otrzymamy

$$(10) \quad N_{xx} = -q \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \mu^2\right) - p \frac{R_2}{2} \lambda \mu^2,$$

gdzie μ jest parametrem odniesionym do promienia R_2 i charakteryzującym długość powłoki: $\mu = L/2R_2$.

Jeżeli w dalszej części pracy będziemy stosować oznaczenie $R_2 = R$ wprowadzimy współczynnik charakteryzujący sposób obciążenia powłoki i jej długość

$$(11) \quad \zeta = \frac{q}{pR} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \mu^2\right) + \frac{1}{2} \lambda \mu^2,$$

wtedy $N_{xx} = -\zeta pR$. Wykorzystując równanie rzutów sił na kierunek normalny $\frac{N_{xx}}{R_1} + \frac{N_{yy}}{R_2} = -p$ otrzymamy

$$(12) \quad N_{yy} = pR(-1 + \lambda \zeta).$$

Określimy teraz równowagę powłoki przy obciążeniu krytycznym. Założmy, że ugięcie powłoki określone jest funkcją

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R},$$

gdzie m jest liczbą półfal w kierunku południkowym, n liczbą półfal w kierunku obwodowym.

Po podstawieniu do równania (8) i wprowadzeniu oznaczeń

$$\hat{p} = \frac{pR(1-\nu^2)}{Eh}, \quad r = \frac{m\pi R}{L}, \quad k = \frac{h^2}{12R^2},$$

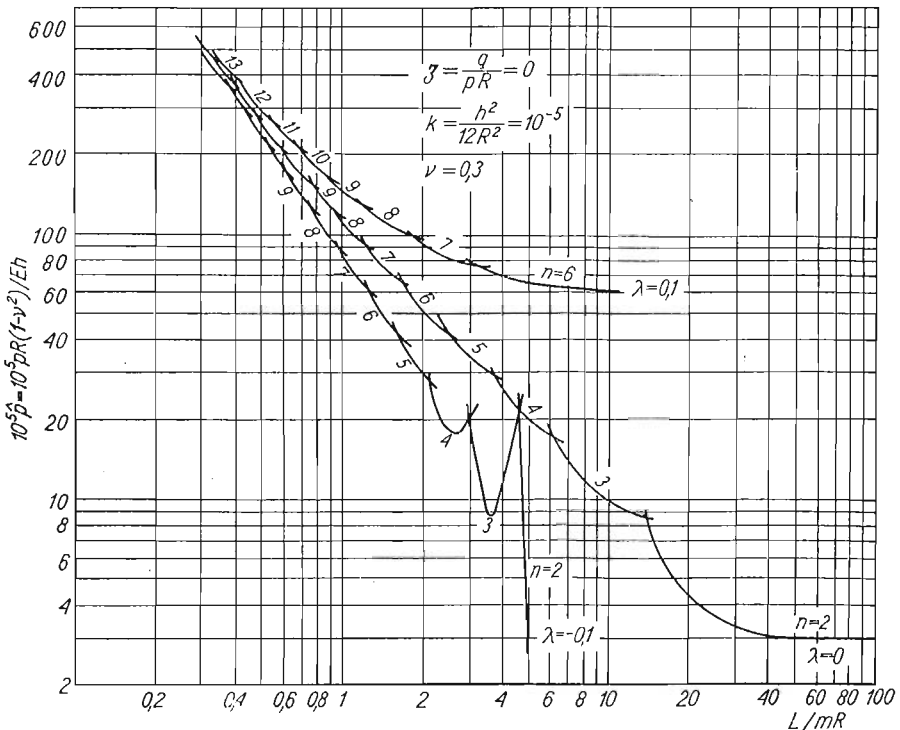
otrzymujemy

$$(13) \quad \hat{p} = k \frac{(r^2 + n^2 - 1 - \lambda^2)^2}{n^2 - 1 + \zeta[r^2 - \lambda n^2 + \lambda - \lambda^2]} + \frac{(1 - \nu^2)[r^2 + \lambda n^2 - \lambda^2 + \lambda]^2}{[r^2 + n^2 - \lambda]\{n^2 - 1 + \zeta[r^2 - \lambda n^2 + \lambda - \lambda^2]\}}.$$

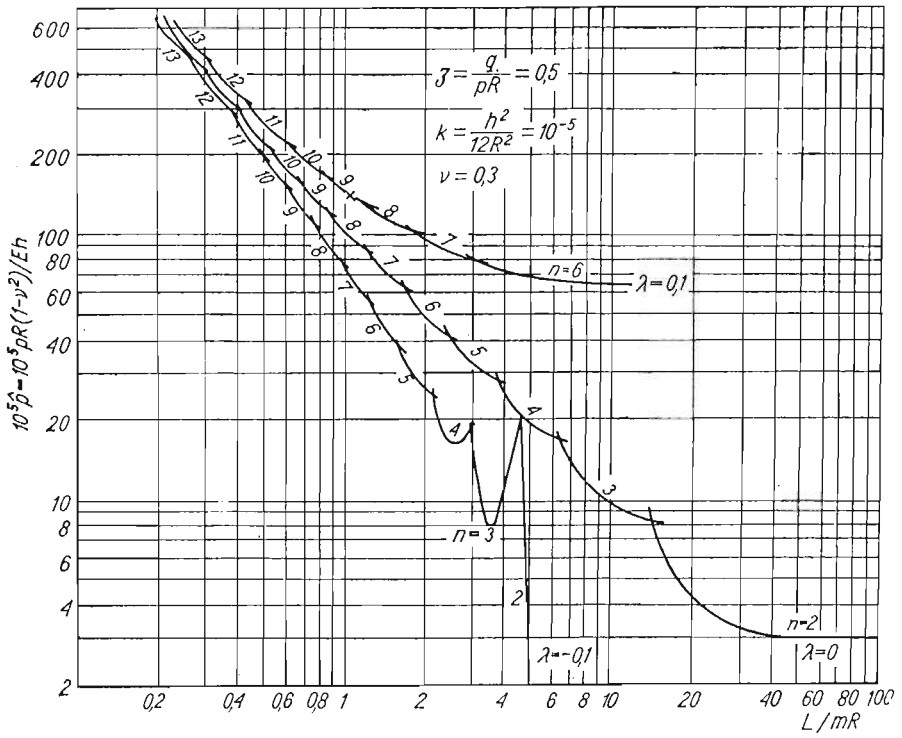
Obciążenie \hat{p} jest funkcją dyskretnych wartości parametrów m i n . Najmniejszą wartość \hat{p} oznaczono przez p_k i przedstawiono na rys. 2, 3 i 4 dla $\nu = 0,3$ i $k = 10^{-5}$ i różnych wielkości parametrów λ i ζ .

Rysunek 2 przedstawia wykres dla $\zeta = 0$ i dla $\lambda = -0,1; 0$ i $0,1$. Dotyczy więc powłoki obciążonej tylko ciśnieniem zewnętrznym p .

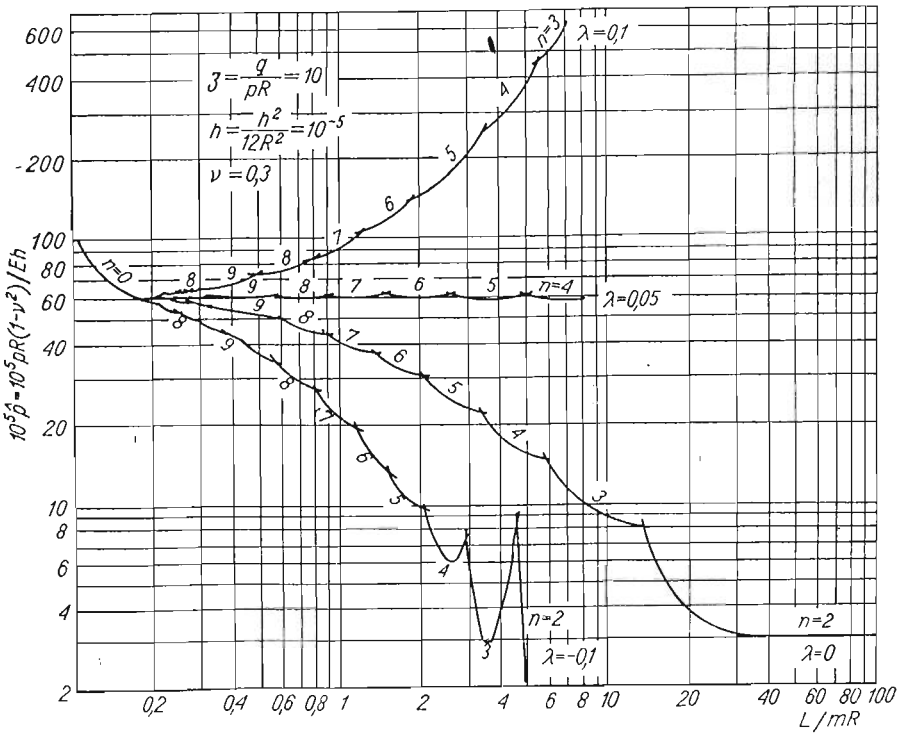
Ponieważ krzywa girlandowa zawsze maleje wraz ze wzrostem L/mR , liczba półfal m w kierunku tworzącej, odpowiadająca najmniejszej wartości obciążenia krytycznego p_k , jest zawsze równa jedności. Obciążenie krytyczne zmniejsza się wraz z L/R , osiągając przy $n = 2$ najmniejszą wartość $\hat{p}_k = 3k$. Okazuje się, że powłoka o dodatniej krzywiznie ($\lambda = 0,1$) ma wyższe obciążenie krytyczne niż powłoka walcowa, zaś powłoka o ujemnej krzywiznie ($\lambda = -0,1$) znacznie niższe (szczególnie przy małych n). Dotyczy to przede wszystkim powłok o większej długości $L/mR > 1$.



Rys. 2



Rys. 3



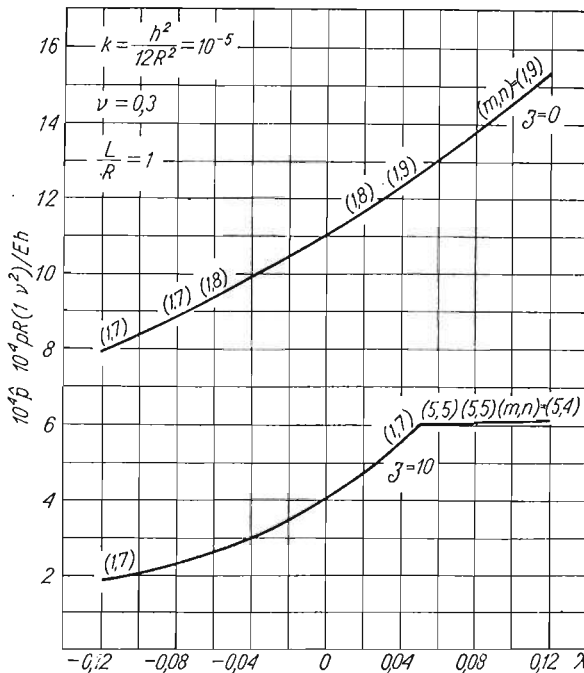
Rys. 4

Rysunek 3 przedstawia wykres \hat{p} w zależności od L/mR dla $\zeta = 0,5$ i trzech wielkości $\lambda = -0,1; 0; 0,1$. Przypadek $\zeta = 0,5$ odpowiada w przybliżeniu przypadkowi zamkniętego naczynia poddanego działaniu ciśnienia zewnętrznego. Krzywe nie odbiegają znacznie od wykresów dla przypadku $\zeta = 0$. A więc obciążenie osiowe o natężeniu $q = 0,5 pR$ ma niewielki wpływ na ciśnienie krytyczne \hat{p}_k . W przypadku powłoki walcowej wpływ takiego ciśnienia osiowego jest znikomy. Dla powłok o dodatniej krzywiznie i $\lambda = 0,1$ obserwujemy nieco większe niż poprzednio obciążenie krytyczne. Dla powłok o ujemnej krzywiznie $\lambda = -0,1$ obciążenie krytyczne jest mniejsze. Związane jest to z faktem, że obciążenie osiowe wywołuje w powłoce o podwójnej krzywiznie naprężenia obwodowe, które w powłoce o dodatniej krzywiznie są naprężeniami rozciągającymi, a dla $\lambda < 0$ stają się ściskającymi.

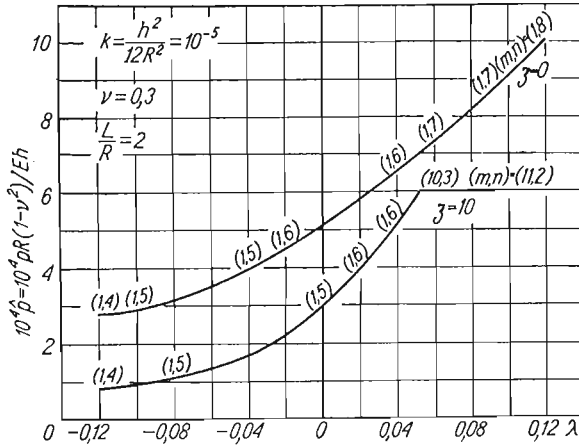
Rysunek 4 przedstawia zależność \hat{p} od L/mR przy znacznym ściskaniu osiowym ($\zeta = 10$) dla czterech wartości współczynnika $\lambda = -0,1; 0,0; 0,05$ i $0,1$.

Dla długich powłok cylindrycznych ($\lambda = 0$) wpływ ten jest znikomy. Dla krótszych obserwujemy jednak pewne obniżenie obciążeń krytycznych. Krzywa girlandowa maleje, a więc zawsze $m = 1$. Krzywa ta zmienia jednak swój charakter, ma punkt przegięcia. Duże zmiany obserwujemy w przypadku $\lambda \neq 0$. Z rys. 4 wynika, że powłoki o dodatniej krzywiznie wykazują dużo większą odporność na wyboczenie niż powłoki o ujemnej krzywiznie. Dla $\lambda = 0,1$ zmienia się sposób wyboczenia powłoki, liczba półfal m jest na ogół większa od jedności. Dla $\lambda = -0,1$ mamy $m = 1$.

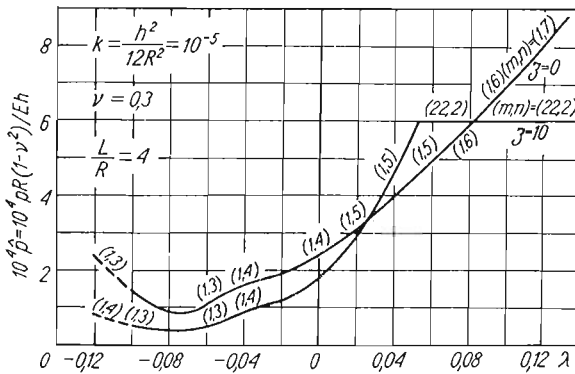
W celu dokładniejszego zbadania wpływu krzywizny południka na obciążenie krytyczne \hat{p}_k wykonano, na podstawie wzoru (13), wykresy (rys. 5, 6, 7) $\hat{p}_k = f(\lambda)$ dla trzech



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

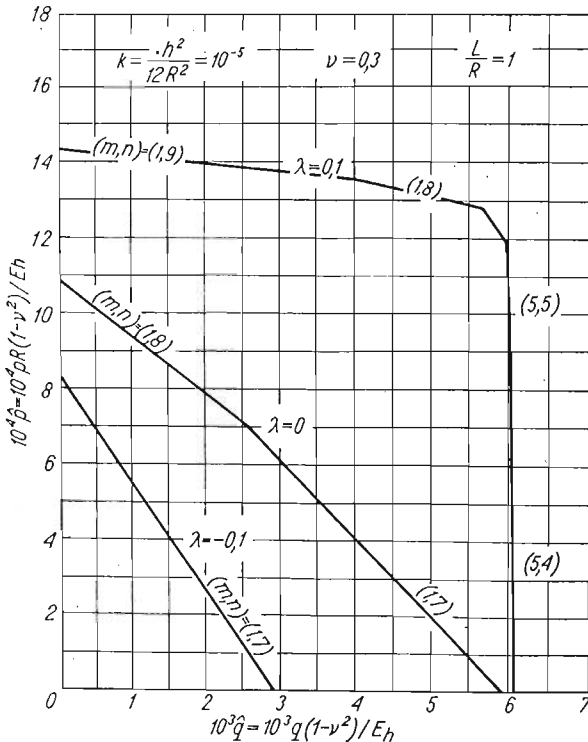
długości powłoki $L/R = 1; 2; 4$ i dla dwu wartości parametru $\zeta = 0$ i 10 przy $\nu = 0,3$ i $k = n^2/12 R^2 = 10^{-5}$. Obserwujemy, że dla powłok krótszych ($L/R = 1$ i 2) i przypadku $\zeta = 0$ obciążenie krytyczne w badanym zakresie rośnie wraz ze współczynnikiem λ . Liczba fal obwodowych zwiększa się, a m pozostaje stałe i równe jest jedności. Obciążenie ściskające o natężeniu $\zeta = 10$, działając na krótsze powłoki $L/R = 1$ i 2 powoduje obniżenie obciążenia krytycznego p_k dla każdego λ . Interesujące jest, że dla $\zeta = 10$ i gdy $\lambda > 0,05$, zależność $p_k = f(\lambda)$ zmienia gwałtownie swój charakter. Powyżej $\lambda = 0,05$ ciśnienie krytyczne staje się praktycznie niezależne od wypukłości południka. Liczba półfal w tym zakresie rośnie gdy n się zmniejsza. Dla powłoki dłuższej $L/R = 4$ istnieje taki przedział wartości λ , w którym obciążenie osiowe ($\zeta = 10$) zwiększa odporność na wyobczenie pod wpływem ciśnienia p .

Aby przeanalizować współzależność obciążeń krytycznych, to jest ciśnienia osiowego i normalnego, wykreślono krzywe we współrzędnych q i p . W tym celu sprowadzono wzór (13) do postaci

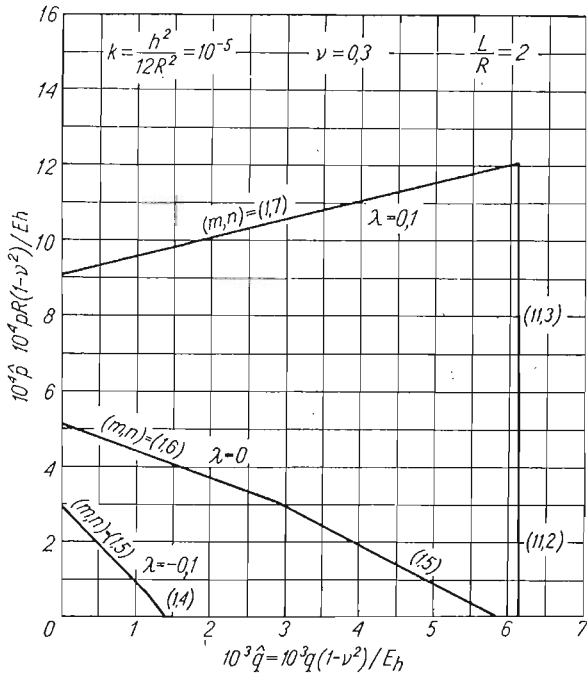
$$(14) \quad \hat{p} \left\{ n^2 - 1 + \frac{1}{2} \lambda \mu^2 [r^2 - \lambda n^2 + \lambda(1 - \lambda)] \right\} + \hat{q} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \mu^2 \right) [r^2 - \lambda n^2 + \lambda(1 - \lambda)] = \\ = k (r^2 + n^2 - 1 - \lambda^2)^2 + (1 - \nu^2) \frac{[r^2 + n^2 + \lambda(1 + \lambda)]^2}{[r^2 + n^2 - \lambda]^2},$$

$$\text{gdzie } \hat{p} = \frac{pR}{Eh} (1 - \nu^2); \quad \hat{q} = \frac{q}{Eh} (1 - \nu^2).$$

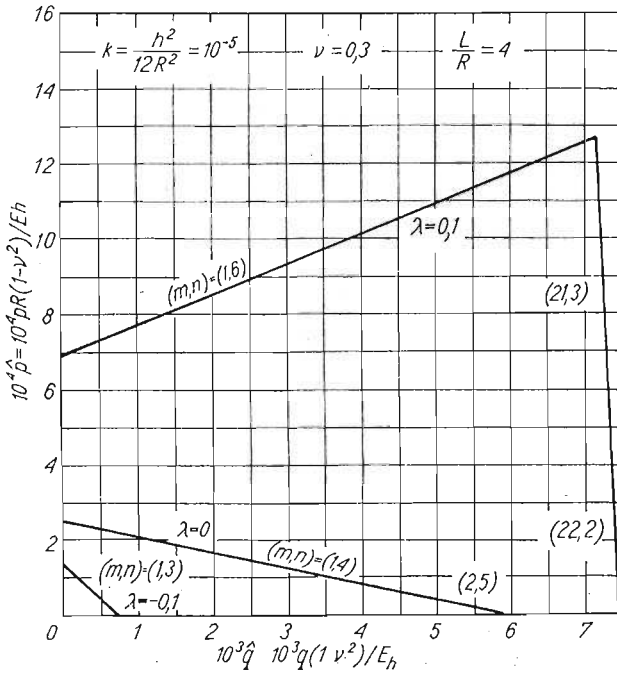
Równanie (14) określa we współrzędnych \hat{q} i \hat{p} , dla każdej pary liczb m i n , linię prostą. Obszar stateczności jest zawarty w najmniejszym z możliwych wieloboków składających się z odcinków linii prostych odpowiadających różnym m i n . Na rys. 8, 9, 10 przedstawiono takie linie dla $k = 10^{-5}$; $L/R = 1, 2, 4$; $\lambda = -0,1; 0; 0,1$. Obserwujemy, że obszary stateczności zmniejszają się ze wzrostem długości powłok. Wzrastają w miarę zwiększania się wypukłości południka. Dla przypadków $\lambda = 0$ i $\lambda = -0,1$ wzrost natężenia \hat{q} ściskania osiowego powoduje spadek obciążenia krytycznego \hat{p} i odwrotnie. W przypadku $\lambda = 0,1$ obserwujemy zachowania przeciwne. Powyższe efekty związane są pojawieniem się w powłoce o dodatniej krzywiznie naprężeń rozciągających wywołanych ściskaniem osiowym.



Rys. 8



Rys. 9



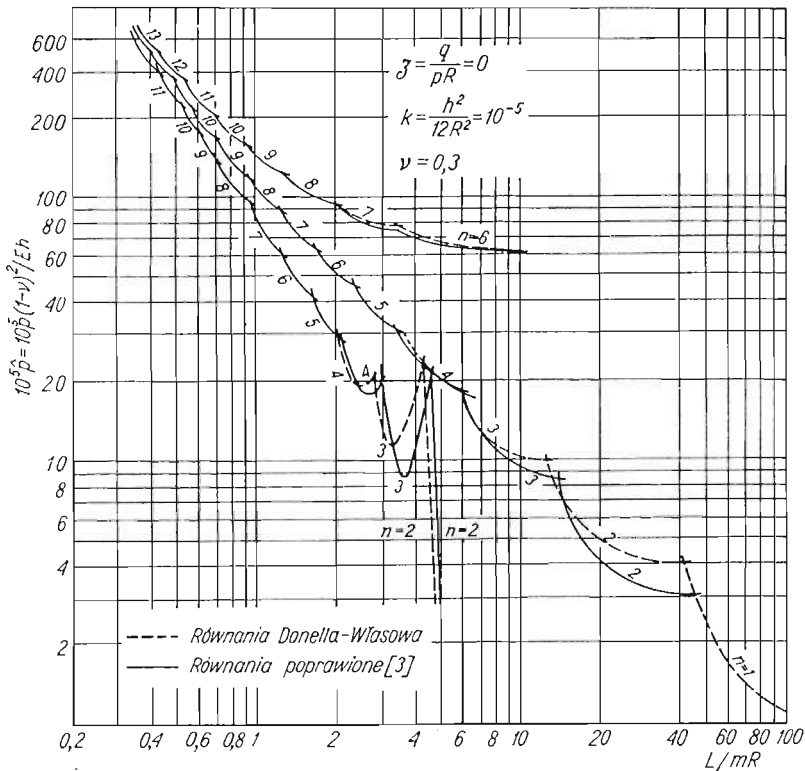
Rys. 10

Wyżej opisane wyniki otrzymano w oparciu o równania (5) udoskonalonej teorii technicznej [3]. Można się łatwo przekonać, że odbiegają one od wyników uzyskiwanych na podstawie teorii DONNELLA-WŁASOWA jedynie dla powłok dłuższych i dla niższych wielkości m i n .

Opierając się na równaniach DONNELLA-WŁASOWA otrzymalibyśmy wyrażenie

$$(15) \quad \hat{p} = k \frac{(r^2 + n^2)^2}{n^2 + \zeta(r^2 - \lambda n^2)} + (1 - \nu^2) \frac{(r^2 + \lambda n^2)^2}{(r^2 + n^2)^2 [n^2 + \zeta(r^2 - \lambda n^2)]}.$$

W przypadku powłok długich $L \rightarrow \infty$ i obciążonych tylko ciśnieniem p ze wzoru (13) otrzymujemy $\hat{p}_k = 3k$, gdy z wzoru (15) mamy $\hat{p}_k = 4k$, co daje błąd 33%.



Rys. 11

W zakończeniu pracy chcielibyśmy podkreślić, że przedstawione tu postępowanie jest jedynie przybliżone. Założenie o stałości sił błonowych w powłoce jest spełnione w przybliżeniu jedynie dla małych wartości parametru λ . Dla większych λ oraz większych długości powłok może prowadzić do dużych błędów. Jednak wydaje się, że przedstawione tu rozwiązanie, dzięki swej prostocie, dostarcza dużo informacji o zachowaniu się badanych powłok o kształcie mało odbiegających od walca.

Literatura cytowana w tekście

1. P. A. COOPER, *Buckling of nearly cylindrical shells under lateral pressure*, AIAA, Journ., **10** (1973).
2. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *On the stability and the postbuckling equilibrium of shells of revolution*, ZAMM, **51** (1971) 63 - 639.
3. S. ŁUKASIEWICZ, *Uzupełnienie równań technicznej teorii powłok*, Rozpr. Inżyn., **11** (1963).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ МАЛОЙ КРИВИЗНЕ
МЕРИДИАНА И КОМБИНИРОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

В работе решена задача об устойчивости оболочек вращения при малой кривизне меридиана под внешней поперечной нагрузкой в сочетании с осевым сжатием. Результаты расчетов представлены на графиках. Определено влияние кривизны меридиана и взаимозависимость критических нагрузок.

Summary

STABILITY OF SHELLS OF REVOLUTION WITH A SLIGHTLY CURVED GENERATOR
UNDER COMPLEX LOAD

The stability of nearly cylindrical shells of revolution under action of axial load and external pressure is considered. The effects of the curvature of the generator and influence of simultaneous action of the both loads is examined in particular. The results are presented in numerous diagrams.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ
I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1975 r.