

WPLYW SZTYWNOŚCI I TŁUMIENIA W UKŁADZIE STEROWANIA STEREM
WYSOKOŚCI NA STATECZNOŚĆ PODŁUŻNĄ SAMOŁOTU I OSCYLACJE STERU*

JERZY MARYNIAK, ZDOBYSLAW GORAJ (WARSZAWA)

1. Wstęp

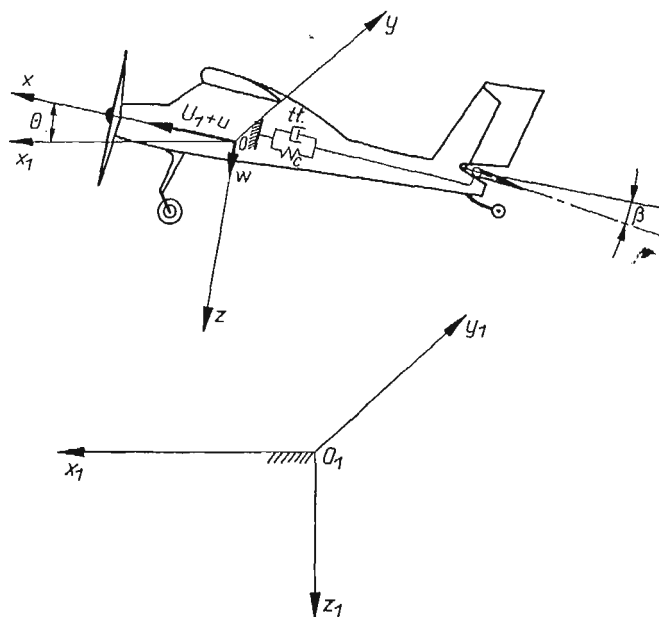
W pracy zbadano wpływ sztywności układu sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu. Rzeczywistą sztywność i tłumienie układu sterowania zastąpiono sztywnością zastępczą c i o tłumieniu wiskotycznym p . Zastosowano teorię małych zakłóceń [1, 2, 6, 7, 8], co pozwoliło uzyskać liniowe równania ruchu [4, 5]. Założono, że występują zakłócenia tylko symetrycznych ruchów samolotu. Powyższe zakłócenia mają wpływ wyłącznie na symetryczne obciążenia samolotu. Pozwala to na rozprzęgnięcie układu różniczkowych równań ruchu [3]. Założono, że konstrukcja samolotu jest doskonale sztywna oraz że ster kierunku i lotki są nieruchome względem samolotu. W oparciu o powyższe założenia, położenie układu: samolot + drgający ster wysokości opisano za pomocą czterech współrzędnych uogólnionych. W celu uzyskania różniczkowych równań ruchu w układzie nieinercyjnym [1, 10] wyprowadzono wyrażenie na bezwzględną energię kinetyczną układu, a następnie zastosowano równania Boltzmanna-Hamela.

W dotychczas opublikowanej literaturze wyprowadzenie równań ruchu samolotu z elementami drgającymi prowadzono w dwóch etapach: wyprowadzono równania ruchu dla samolotu sztywnego, a następnie oddzielnie wyprowadzono równania Lagrange'a II rodzaju dla elementów drgających i łącząc obie metody próbowano wprowadzić sprzężenia do równań ruchu samolotu sztywnego [2, 6, 7, 8]. Taka metoda nie zawsze gwarantowała wprowadzenie wszystkich sprzężeń w równaniach ruchu, co wykazano w niniejszej pracy. Następnie, uzyskane różniczkowe równania ruchu zapisano w postaci macierzowej [5, 9, 11, 12, 14]. Doprowadzono macierzowy układ równań do równania macierzowego I rzędu. Znalezione wartości i wektory własne, co pozwoliło na obliczenie współczynników tłumienia i częstości oscylacji wahań fugoidalnych, oscylacji szybkich oraz drgań steru. Przez porównanie z wynikami otrzymanymi dla samolotu sztywnego oraz dla swobodnego steru drgającego w inercyjnym układzie odniesienia w opływie i bez opływu, zbadano wpływ sztywności układu sterowania na stateczność. Obliczenia przeprowadzono dla samolotu sportowego na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego przy wykorzystaniu standardowych procedur.

* Fragmenty pracy były referowane na IX Międzynarodowej Konferencji «Dynamiki Maszyn» w Smolenicach (CSRS) 1974 r. i na Sympozjum «Drgania w układach fizycznych», Poznań 1974 r.

2. Równania ruchu samolotu

Równania ruchu samolotu wyprowadzono stosując równania Boltzmanha-Hamela dla układów holonomicznych w quasi-współrzędnych, które są uogólnieniem równań Lagrange'a II rodzaju. Należy podkreślić, że dla samolotu, w układzie współrzędnych związanym ze środkiem masy samolotu, nie można napisać klasycznych równań Lagrange'a II rodzaju, gdyż układ współrzędnych związany z samolotem nie jest układem inercjalnym.



Rys. 1. Układ współrzędnych i przemieszczeń kątowych

Wprowadzono układ współrzędnych $Oxyz$ związany ze środkiem masy samolotu i w tym układzie przyjęto następujące quasi-współrzędne i quasi-prędkości:

U — quasi-prędkość w kierunku osi x ,

W — quasi-prędkość w kierunku osi z ,

Q — quasi-prędkość kątowa wokół osi y ,

θ — quasi-współrzędna (kąt obrotu samolotu wokół osi y),

β — quasi-współrzędna (kąt wychylenia steru wysokości z położenia określonego warunkami lotu ustalonego).

Wprowadzono również inercjalny układ odniesienia $O_1x_1y_1z_1$, w którym położenie samolotu wraz z drgającym sterem określono za pomocą czterech współrzędnych uogólnionych:

x_1, z_1 — współrzędne uogólnione określające położenie środka masy samolotu,

θ — kąt obrotu samolotu względem osi y_1 ,

β — kąt wychylenia steru wysokości z położenia określonego warunkami lotu ustalonego.

Równania Boltzmanna-Hamela dla układów holonomicznych mają postać [4]

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{\alpha\mu}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^*,$$

gdzie: $\mu, r, \alpha = 1, 2, \dots, k$.

Zależności pomiędzy prędkościami uogólnionymi i quasi-prędkościami są określone za pomocą związków:

$$(2) \quad \omega_\sigma = \sum_{\alpha=1}^k a_{\sigma\alpha} \dot{q}_\alpha \quad \text{oraz} \quad \dot{q}_\sigma = \sum_{\mu=1}^k b_{\sigma\mu} \omega_\mu,$$

przy czym

$$a_{\sigma\alpha} = a_{\sigma\alpha}(q_1, \dots, q_k), \quad b_{\sigma\mu} = b_{\sigma\mu}(q_1, \dots, q_k)$$

oraz $a_{\sigma\mu}$ są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $b_{\sigma\mu}$, tzn.

$$(3) \quad [a_{\sigma\mu}] = [b_{\sigma\mu}]^{-1}.$$

W powyższych wzorach π_μ oznacza quasi-współrzedną, natomiast ω_μ — quasi-prędkość, przy czym $\dot{\pi}_\mu = \omega_\mu$.

Stan układu: samolot + drgający ster wysokości opisano więc za pomocą wektora współrzędnych uogólnionych: $\text{col}[q_1, q_2, q_3, q_4] = \text{col}[x_1, z_1, \theta, \beta]$ oraz prędkości uogólnionych: $\text{col}[\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4] = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{z}_1, \dot{Q}, \dot{\beta}]$, a także za pomocą wektora quasi-współrzędnych:

$$\text{col}[\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = \text{col}[\pi_u, \pi_w, \theta, \beta]$$

oraz quasi-prędkości:

$$\text{col}[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = \text{col}[U, W, Q, \dot{\beta}].$$

Związki kinematyczne pomiędzy układami $Oxyz$ i $O_1 x_1 y_1 z_1$ są następujące:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= U \cos \theta + W \sin \theta, \\ \dot{z}_1 &= -U \sin \theta + W \cos \theta. \end{aligned}$$

Na podstawie (2), (3), (4) określono macierze: $[a_{\sigma\mu}]$ i $[b_{\sigma\mu}]$:

$$(5) \quad [b_{\sigma\mu}]_{\substack{\sigma=1\dots 4 \\ \mu=1\dots 4}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[a_{\sigma\mu}]_{\substack{\sigma=1\dots 4 \\ \mu=1\dots 4}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po zróżniczkowaniu macierzy $[a_{\sigma\mu}]$ względem θ otrzymano:

$$\left[\frac{\partial a_{\sigma\mu}}{\partial \theta} \right]_{\substack{\sigma=1\dots 4 \\ \mu=1\dots 4}} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ występujące w równaniach (1) obliczono na podstawie definicji [4]

$$(6) \quad \gamma_{\mu\alpha}^r = \sum_{\sigma=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\sigma} \right) b_{\lambda\mu} b_{\rho\alpha}.$$

Ponieważ macierze (5) zależą tylko od współrzędnej uogólnionej θ i mają budowę quasi-diagonalną, wyrażenie (6) upraszcza się do postaci

$$(7) \quad \gamma_{\mu,\alpha}^r = \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial \theta} (b_{3\mu} b_{\sigma\alpha} - b_{3\alpha} b_{\sigma\mu}),$$

gdzie $r = 1, 2$; $\mu, \alpha = 1, 2, 3$.

Obliczone na podstawie (7) niezerowe symbole Boltzmanna mają wartość:

$$(8) \quad \gamma_{13}^2 = -\gamma_{31}^2 = -1; \quad \gamma_{23}^1 = -\gamma_{32}^1 = 1.$$

Bezwzględna energia kinetyczna w quasi-prędkościach układu samolot sztywny + drgający ster wysokości jest następująca [1]:

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_i m_i [(U + Qz_i)^2 + (W - Qx_i)^2] + \frac{1}{2} \sum_i m_i \{ [\dot{\beta} \xi_i \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) + U + Qz_i]^2 + [\dot{\beta} \xi_i \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) + W - Qx_i]^2 \}.$$

samolot bez steru ster

Wprowadzając momenty statyczne i bezwładności całego samolotu S_y, J_y oraz steru wysokości $S_{H\eta}, J_{H\eta}$, doprowadzono energię kinetyczną układu do następującej postaci:

$$T^* = \frac{1}{2} m U^2 + \frac{1}{2} m W^2 + \frac{1}{2} J_y Q^2 + \frac{1}{2} J_{H\eta} \dot{\beta}^2 + S_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) \times \\ \times U \dot{\beta} + S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H) W \dot{\beta} + \{ J_{H\eta} + S_{H\eta} [I_H \cos(\alpha_{zH} + \beta_H) - z_H \sin(\alpha_{zH} + \beta_H)] \} \dot{\beta} Q.$$

Po obliczeniu energii kinetycznej układu T^* w quasi-prędkościach i uwzględnieniu (1) i (8) otrzymano układ równań ruchów symetrycznych samolotu w postaci ogólnej:

— równania ruchu samolotu jako ciała sztywnego

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial U} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_u} + \frac{\partial T^*}{\partial W} Q = Q_u^*,$$

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial W} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_w} - \frac{\partial T^*}{\partial U} Q = Q_w^*,$$

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial Q} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_Q} + \frac{\partial T^*}{\partial U} W - \frac{\partial T^*}{\partial W} U = Q_Q^*,$$

— równanie uwzględniające ruchy steru wysokości β

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \beta} = Q_{\dot{\beta}}^*.$$

Po zróżniczkowaniu energii kinetycznej i uwzględnieniu sił działających na samolot otrzymano z (9)–(12) układ równań w postaci (13)–(16).

W równaniach (13)–(16) wprowadzono oznaczenia małych zmian quasi-prędkości oraz quasi-współrzędnych:

u — przyrost prędkości lotu ustalonego U_1 w kierunku osi x ,

w — przyrost prędkości w kierunku osi z ,

q — przyrost prędkości kątowej pochylania, obrót wokół osi y ,

ϑ — zmiana kąta pochylania — obrót wokół osi y .

$$(13) \quad m\dot{u} + S_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \dot{\beta} - X_u u - X_w w - X_q q + mg \cos \theta_1 \vartheta - X_\beta \beta = 0,$$

$$(14) \quad m\dot{w} + S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \ddot{\beta} - Z_u u - Z_w w - (mU_1 + Z_q)q + mg \sin \theta_1 \vartheta - Z_\beta \beta = 0,$$

$$(15) \quad J_y \dot{q} + A\ddot{\beta} - M_w \dot{w} - M_u u - M_w w - M_q q - M_\beta \dot{\beta} - M_\beta \beta = 0,$$

$$(16) \quad S_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \dot{u} + S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) \dot{w} + A\dot{q} + \\ + J_{H\eta} \dot{\beta} - B_u u - B_w w - [B_q + U_1 S_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H)]q + \\ + \left[l_s k_{HP} - \frac{1}{6} \rho U_H l_{SH} a_2 (\xi_1^3 + \xi_2^3) \right] \dot{\beta} + \left(ck_H^2 l_S^2 - \frac{1}{2} \rho U_H^2 S_H l_{SH} b_2 \right) \times \\ \times \beta - S_{H\eta} g \cos(\alpha + \alpha_{ZH} + \beta_H) = 0.$$

W równaniach powyższych zostały wprowadzone siły uogólnione pochodzące od sił i momentów aerodynamicznych, od tłumienia i sztywności układu sterowania oraz sił ciężkości. Przyjęto, że siły i momenty aerodynamiczne są stacjonarne, co pozwoliło na wprowadzenie pochodnych aerodynamicznych. Wzory na pochodne aerodynamiczne dotyczące ruchów steru wyprowadzono zgodnie z [2] i [3].

Układ równań (13)–(16) przy założeniu nieskończone sztywnego układu sterowania sprowadza się do układu opisującego ruchy samolotu sztywnego i jest przedstawiony w pracach [2] i [3].

Powyższa metoda opisu ruchu samolotu może być zastosowana przy uwzględnieniu dowolnie dużej skończonej liczby stopni swobody, zarówno dla ruchów symetrycznych, antysymetrycznych lub też asymetrycznych. Jej zaletą to jednolite podejście bez rozdziału na ruchy samolotu sztywnego i części elastyczne lub drgające oraz pewność, że zostaną uwzględnione sprzężenia w równaniach ruchu.

3. Rozwiązanie równań ruchu i badanie stateczności

Układ równań (13)–(16) przekształcono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho U_1^2 S$, a równania momentów przez $\rho U_1^2 S l_H$. Aby współczynnik przy q równał się 1, oraz w równaniach momentów zawiasowych steru przy $\ddot{\beta}$ również równał się 1, doprowadzono równania momentów do tzw. postaci zmodyfikowanej dzieląc równanie (15) przez j_y/μ oraz (16) przez $j_{H\eta}/\mu$.

Wprowadzono oznaczenia przyjęte w lotnictwie [2, 3, 6, 7, 8]:

$$\hat{t} = \frac{m}{\rho S U_1} \text{ czas aerodynamiczny,}$$

$$\mu = \frac{m}{\rho S l_H} \text{ względna gęstość samolotu,}$$

$\bar{t} = t/\hat{t}$ czas bezwymiarowy,

$j_y = \frac{J_y}{m l_H^2}$, $j_{H\eta} = \frac{J_{H\eta}}{m l_H^2}$, $s_{H\eta} = \frac{S_{H\eta}}{m l_H}$ bezwymiarowe momenty bezwładności i statyczne,

\bar{u} , \bar{w} , \bar{q} , $\bar{\beta}$ bezwymiarowe prędkości liniowe i kątowe,

Otrzymano układ równań w postaci bezwymiarowej zmodyfikowanej, gdzie w celu ujednoczenia zapisu wprowadzono dodatkowe oznaczenia:

$$(17) \quad \dot{\bar{u}} + x_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} - x_u \ddot{\bar{u}} - x_w \ddot{\bar{w}} - \frac{x_q}{\mu} \ddot{\bar{q}} + x_{\vartheta} \ddot{\bar{\vartheta}} - x_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = 0,$$

$$(18) \quad \dot{\bar{w}} + z_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} - z_u \ddot{\bar{u}} - z_w \ddot{\bar{w}} - \left(1 - \frac{z_q}{\mu}\right) \ddot{\bar{q}} + x_{\vartheta} \operatorname{tg} \theta_1 \ddot{\bar{\vartheta}} - z_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = 0,$$

$$(19) \quad \bar{m}_{\dot{w}} \dot{\bar{w}} + \dot{\bar{q}} + \bar{m}_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} + \bar{m}_u \ddot{\bar{u}} + \bar{m}_w \ddot{\bar{w}} + \bar{m}_q \ddot{\bar{q}} + \bar{m}_{\dot{\beta}} \dot{\bar{\beta}} + \bar{m}_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = 0,$$

$$(20) \quad \bar{b}_s \dot{\bar{u}} + \bar{b}_w \dot{\bar{w}} + \bar{b}_q \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{\beta}} + \bar{b}_u \ddot{\bar{u}} + \bar{b}_w \ddot{\bar{w}} + \bar{b}_q \ddot{\bar{q}} + \bar{b}_{\beta} \dot{\bar{\beta}} + \bar{b}_{\beta} \ddot{\bar{\beta}} = \bar{b}_0,$$

przy czym pochodne aerodynamiczne sił w postaci bezwymiarowej mają postać:

$$x_{\beta} = \frac{s_{H\eta} \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H)}{\mu}, \quad z_{\beta} = \frac{s_{H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H)}{\mu},$$

$$x_u = -C_x, \quad z_u = -C_z,$$

$$x_w = \frac{1}{2} C_z, \quad z_q = -\frac{1}{2} \left(\frac{S_H}{S} \right) \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H},$$

$$x_q = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \left(C_{zH} - \frac{\partial C_{xH}}{\partial \alpha_H} \right), \quad z_w = -\frac{1}{2} \left(C_x + \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right),$$

$$x_{\vartheta} = \frac{1}{2} C_z,$$

$$x_{\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \left(\frac{S_H}{S} \right) \frac{\partial C_{xH}}{\partial \beta}, \quad z_{\beta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \left(\frac{S_H}{S} \right) \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta}.$$

Zmodyfikowane pochodne aerodynamiczne momentów w postaci bezwymiarowej są następujące:

$$\bar{m}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} a_1 \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \frac{\mu}{j_y},$$

$$\bar{m}_{\beta} = \frac{\rho S \mu}{m^2 l_H j_y} \{ J_{H\eta} + S_{H\eta} [l_H \cos(\alpha_{zH} + \beta_H) - z_H \sin(\alpha_{zH} + \beta_H)] \},$$

$$\bar{m}_u = -\frac{\mu}{j_y} \frac{l_s}{l_H} C_m, \quad \bar{m}_w = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{j_y} \frac{l_s}{l_H} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha},$$

$$\bar{m}_q = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{1}{j_y} \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H}, \quad \bar{m}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{1}{j_y} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \frac{l_{SH}}{l_H} k',$$

$$\bar{m}_{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{j_y} \left(\frac{U_H}{U_1} \right)^2 \frac{S_H}{S} a_2,$$

— pochodne aerodynamiczne równania ruchu steru wysokości:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{\dot{u}} &= \frac{S_{H\eta}}{j_{H\eta}} \mu \sin(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H), & \bar{b}_{\dot{w}} &= \frac{S_{H\eta}}{j_{H\eta}} \mu \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H), \\ \bar{b}_{\dot{q}} &= \frac{\mu \rho S}{l_H j_{H\eta} m^2} \{J_{H\eta} + S_{H\eta} [l_{sH} \cos(\alpha_{zH} + \beta_H) - z_H \sin(\alpha_{zH} + \beta_H)]\}, \\ \bar{b}_u &= -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{\mu}{j_{H\eta}} \frac{l_{sH}}{l_H} \left(\frac{U_H}{U_1}\right)^2 \frac{\partial C_{mzH}}{\partial u}, \\ \bar{b}_w &= -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{\mu}{j_{H\eta}} \frac{l_{sH}}{l_H} b_1 \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right), \\ \bar{b}_q &= -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \left(\frac{U_H}{U_1}\right)^2 \frac{l_{sH}}{l_H} \frac{b_1}{j_{H\eta}} s_{-H\eta} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H), \\ \bar{b}_{\dot{\beta}} &= \frac{\mu}{j_{\eta H}} \left[\frac{l_s k_{HP}}{m U_1 l_H} - \frac{1}{6} \rho \left(\frac{U_H}{U_1}\right) \frac{l_{sH}}{l_H} \frac{a_2}{m} (\xi_1^3 + \xi_2^3) \right], \\ \bar{b}_\beta &= \frac{\mu}{j_{H\eta}} \left[\frac{c k_H^2 l_s^2}{\rho U_1^2 S l_H} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{U_1}\right)^2 \frac{S_H}{S} \frac{l_{sH}}{l_H} b_2 \right], \\ \bar{b}_0 &= \frac{S_{H\eta}}{j_{H\eta}} \frac{g \mu^2 l_H}{U_1^2} \cos(\alpha + \alpha_{zH} + \beta_H). \end{aligned}$$

Układ równań (17)–(20) zapisano w postaci macierzowej:

$$(21) \quad \mathbf{A}\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{B}\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D},$$

gdzie

— macierz współczynników bezwładności:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & z & 0 \\ 0 & \bar{m}_{\dot{w}} & 1 & \bar{m}_{\dot{\beta}} \\ \bar{b}_{\dot{u}} & \bar{b}_{\dot{w}} & \bar{b}_{\dot{q}} & 1 \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników tłumienia:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x_u & -x_w & -\frac{x_q}{\mu} & 0 \\ -z_u & -z_w & -\left(1 - \frac{z_q}{\mu}\right) & 0 \\ \bar{m}_u & \bar{m}_w & \bar{m}_q & \bar{m}_{\dot{\beta}} \\ \bar{b}_u & \bar{b}_w & \bar{b}_q & \bar{b}_{\dot{\beta}} \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników sztywności:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_\beta & -x_\beta \\ 0 & 0 & x_\beta \operatorname{tg} \theta_1 & -z_\beta \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}_\beta \\ 0 & 0 & 0 & \bar{b}_\beta \end{bmatrix},$$

— macierz wyrazów wolnych:

$$\mathbf{D} = \operatorname{col} [0, 0, 0, \bar{b}_0],$$

przy czym

$$\bar{x} = \text{col} [\bar{\pi}_u, \bar{\pi}_w, \bar{\vartheta}, \bar{\beta}].$$

Następnie przekształcono równanie macierzowe (21) II rzędu do równania macierzowego rzędu I [5, 9, 12] wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \bar{x} \end{bmatrix}.$$

Równanie macierzowe I rzędu ma postać (E oznacza macierz jednostkową):

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \dot{\bar{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \bar{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest suma rozwiązań: rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania pełnego. W celu znalezienia częstości i tłumień ruchów samolotu wystarczy rozwiązać równanie jednorodne.

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Równanie macierzowe jednorodne przybierze postać

$$(23) \quad \mathbf{Q} \dot{\bar{q}} + \mathbf{P} \bar{q} = \mathbf{O}.$$

Macierzą fundamentalną powyższego równania jest następująca macierz kwadratowa stopnia 8:

$$[\bar{q}_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad \bar{q}_{20} e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \bar{q}_{80} e^{\lambda_8 t}],$$

gdzie \bar{q}_{i0} — macierz kolumnowa wartości początkowych

$$\bar{q}_{i0} = [\bar{u}_{i0}, \bar{w}_{i0}, \bar{q}_{i0}, \dot{\bar{\beta}}_{i0}, \bar{\pi}_{u_{i0}}, \bar{\pi}_{w_{i0}}, \bar{\vartheta}_{i0}, \bar{\beta}_{i0}].$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest następujące:

$$(24) \quad \bar{q}(t) = \sum_{i=1}^8 C_i \bar{q}_{i0} e^{\lambda_i t}$$

gdzie \bar{q}_{i0} — wektor własny odpowiadający i -tej wartości własnej λ_i ,

C_j — stałe zależne od warunków początkowych.

W celu znalezienia wartości i wektorów własnych podstawiono rozwiązanie szczególne $\bar{q} = \bar{q}_w e^{\lambda t}$ do (23) i po przekształceniu otrzymano:

$$\mathbf{Q} \lambda \bar{q}_w + \mathbf{P} \bar{q}_w = \mathbf{O}.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\mathbf{R} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P},$$

otrzymano

$$[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{R}] \bar{q}_w = \mathbf{O},$$

gdzie

$$\mathbf{R} = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P} = -\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

$$(25) \quad \mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{array} \right].$$

Ostatecznie problem sprowadza się do wyznaczenia wartości i wektorów własnych macierzy \mathbf{R} .

Trzeba podkreślić praktyczną korzyść, jaka wynika z przedstawienia macierzy \mathbf{R} w postaci macierzy blokowej. Otóż zamiast odwracać macierz \mathbf{Q} o wymiarach 8×8 i mnożyć następnie macierze o wymiarach 8×8 , wystarczy odwrócić macierz \mathbf{A} i mnożyć macierz o wymiarach 4×4 . Skraca to znacznie czas obliczeń na maszynie cyfrowej.

Otrzymano wartości własne zespolone sprzężone w postaci:

$$\bar{\lambda}_k = \bar{\xi}_k \pm i\bar{\eta}_k,$$

oraz rzeczywiste

$$\bar{\lambda}_l = \bar{\xi}_l.$$

Dla samolotu statecznego wszystkie części rzeczywiste wartości własnych muszą być ujemne:

$$\bar{\xi}_k < 0, \quad k = 1, \dots, 8.$$

Należy zaznaczyć, że wśród 8 wartości własnych zawsze dwie będą zerowe, gdyż quasi-prędkości U_1 , W_1 odpowiadają quasi-współrzędnym cyklicznym i to wyjaśnia istnienie zerowych wartości własnych i odpowiadających im jednostkowych wektorów własnych [4, 13].

4. Zbadanie wpływu ruchu drgającego steru na ruch samolotu sztywnego oraz zbadanie wpływu ruchu samolotu na ruch steru w opływie stacjonarnym i bez opływu

W celu porównania współczynników tłumienia i częstości drgań wahań fugoidalnych i oscylacji szybkich rozwiązano równania ruchu samolotu sztywnego z nieskończenie sztywnym układem sterowania. Wyniki przedstawiono wykreślnie i przeprowadzono analizę.

Aby zbadać wpływ ruchów samolotu na drgania steru wyprowadzono równanie ruchów drgających steru w inercjalnym układzie odniesienia. Rozważono 2 przypadki:

A. Ster swobodny w opływie stacjonarnym. Równanie ruchu otrzymano w następującej postaci z równania (20) układu równań (17)–(20) przy założeniu, że $u = w = q = 0$

$$(26) \quad \ddot{\bar{\beta}} + \bar{b}_{\beta} \dot{\bar{\beta}} + \bar{b}_0 \bar{\beta} = \bar{b}_0,$$

gdzie pochodne aerodynamiczne \bar{b}_{β} , \bar{b}_0 i \bar{b}_0 przedstawiono wyżej.

B. Ster swobodny bez opływu. Równanie ruchu otrzymano z równania (26) opisującego ruchy steru z opływem aerodynamicznym, przy założeniu, że $u = w = q = 0$, oraz po odrzuceniu członów reprezentujących wpływ opływu $U_H = 0$ w bezwymiarowych pochodnych aerodynamicznych $\bar{b}_{\dot{\beta}}$ i \bar{b}_{β} .

W obu przypadkach otrzymano równania różniczkowe zwyczajne II rzędu opisujące drgania tłumione. Znaleziono współczynniki tłumienia drgań $\bar{\xi}_k$ i częstości oscylacji $\bar{\eta}_k$ przez rozwiązanie równania charakterystycznego, które jest w tym przypadku równaniem kwadratowym. Otrzymane wyniki porównano z wartością własną $\bar{\lambda}_{5,6} = \bar{\xi}_{5,6} \pm i\bar{\eta}_{5,6}$, która opisuje ruchy steru w nieinercyjnym układzie związanym z samolotem i uwzględnia wpływ ruchów samolotu na ruchy steru wysokości.

5. Przykład liczbowy i wnioski

Obliczenia przykładowe wykonano dla lekkiego samolotu turystycznego klasy «Wilga». Rozwiązano pełny układ równań (17)–(20) wyznaczając wektory własne \bar{q}_{iw} i odpowiadające im wartości własne $\bar{\lambda}_{iw}$ macierzy stanu \mathbf{R} (25).

Wszystkie obliczenia wykonano według własnych programów na EMC GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

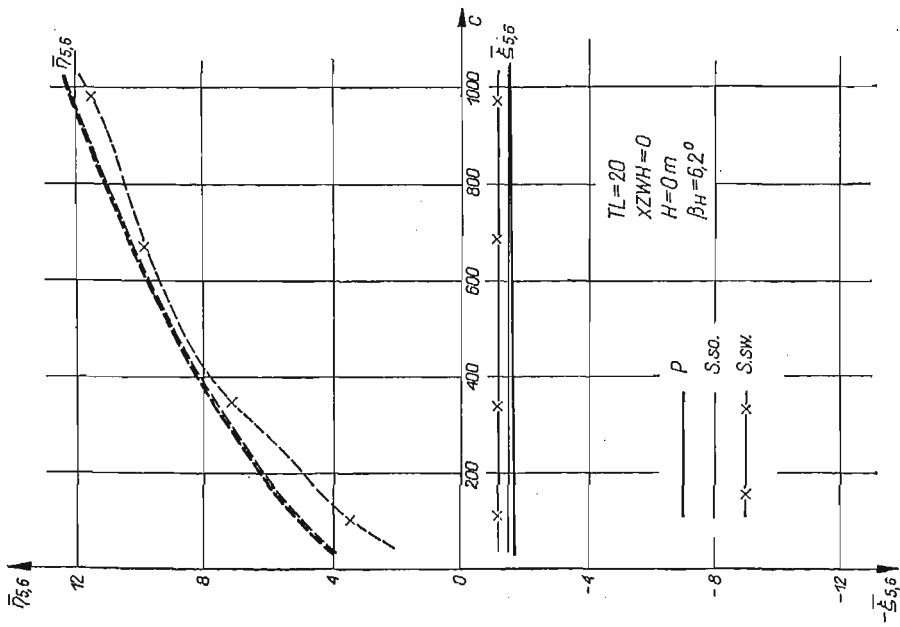
Jako parametry zmienne traktowano:

- C — sztywność układu sterowania sterem wysokości,
- TL — tłumienie w układzie sterowania sterem wysokości,
- $XZWH$ — wyważenie steru wysokości mierzone w odniesieniu do cięciwy steru,
- V — prędkość lotu samolotu,
- \bar{h}_1 — zapas stateczności statycznej samolotu z trzymanym sterem,
- H — wysokość lotu samolotu nad poziomem morza.

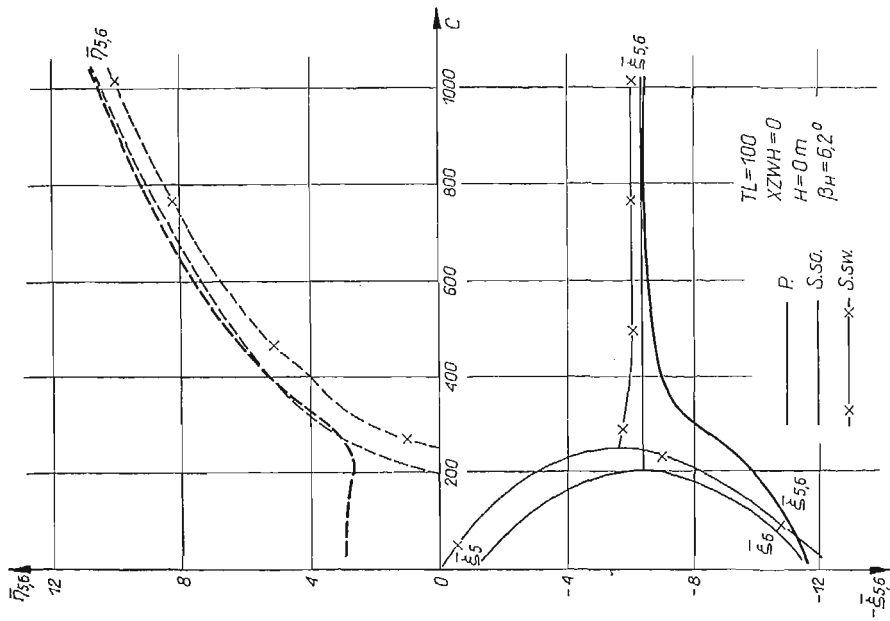
Wyniki przedstawiono w postaci wykresów, na których linią ciągłą naniesiono zmiany współczynników tłumienia $\bar{\xi}_{iw}$, a przerywaną częstości oscylacji $\bar{\eta}_{iw}$. Jednakowymi indeksami oznaczono na wszystkich wykresach odpowiadające sobie wartości własne, charakteryzujące te same ruchy samolotu i steru wysokości:

- $\bar{\lambda}_{1,2} = \bar{\xi}_{1,2} \pm i\bar{\eta}_{1,2}$ — szybkie oscylacje lub ruchy aperiodyczne samolotu odpowiadające pochylaniu wokół środka ciężkości $\bar{\vartheta}$ i \bar{q} ,
- lub $\bar{\lambda}_1 = \bar{\xi}_1$
- $\bar{\lambda}_2 = \bar{\xi}_2$
- $\bar{\lambda}_{3,4} = \bar{\xi}_{3,4} \pm i\bar{\eta}_{3,4}$ — wahania fugoidalne lub ruchy aperiodyczne odpowiadające przemieszczeniom poziomym i pionowym samolotu \bar{u} i \bar{w} ,
- lub $\bar{\lambda}_3 = \bar{\xi}_3$
- $\bar{\lambda}_4 = \bar{\xi}_4$
- $\bar{\lambda}_{5,6} = \bar{\xi}_{5,6} \pm i\bar{\eta}_{5,6}$ — drgania periodyczne lub ruchy aperiodyczne steru wysokości samolotu wokół osi zawieszenia $\bar{\beta}$.
- lub $\bar{\lambda}_5 = \bar{\xi}_5$
- $\bar{\lambda}_6 = \bar{\xi}_6$

Na wykresach przedstawiono wyniki charakteryzujące drgania steru otrzymane przy uwzględnieniu trzech stopni swobody samolotu: pochylenia $\bar{\vartheta}$, zmian prędkości poziomej u i pionowej w — linia gruba oznaczona literą P (pełne równania). Natomiast wyniki dotyczące drgań steru izolowanego pokazano liniami cienkimi z oznaczeniami: $S.so$ — drgania steru z uwzględnieniem opływu powietrza i $S.sw$ — drgania swobodne steru bez uwzględnienia sił i momentów aerodynamicznych.



Rys. 2. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C przy tłumieniu układu $TL = 20$



Rys. 3. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C przy tłumieniu układu $TL = 100$

A. Wpływ sztywności układu sterowania na drgania steru wysokości. Z rys. 2–4 wynika, że dla idealnie wyważonego steru wysokości $XZWH = 0$, tzn. gdy środek ciężkości znajduje się na osi obrotu steru, uwzględnienie stopni swobody samolotu sztywnego ma istotny wpływ przy większym tłumieniu w układzie sterowania $TL = 200$ (rys. 4). Natomiast praktycznie nie wpływa ono na charakter rozwiązań przy tłumieniu małym $TL = 20$ (rys. 2). Wniosek ten dotyczy zarówno częstości drgań steru $\bar{\eta}_{5,6}$, jak i tłumienia drgań $\bar{\xi}_{5,6}$ (rys. 2).

Dla ściśle określonego tłumienia w układzie sterowania TL , w zależności od sztywności układu C , ruchy steru z aperiodycznych silnie tłumionych $\bar{\xi}_5 < 0$ i $\bar{\xi}_6 < 0$, przechodzą w oscylacje periodyczne tłumione $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ o częstości $\bar{\eta}_{5,6}$ (rys. 3 i 4).

Sztywność układu sterowania C przy małym tłumieniu TL nie ma istotnego wpływu na tłumienie drgań $\bar{\xi}_{5,6}$, natomiast ma istotny wpływ na częstość drgań $\bar{\eta}_{5,6}$ (rys. 2).

Przy większym tłumieniu w układzie sterowania można określić ściśle sztywność krytyczną, przy której wystąpi przejście z ruchów aperiodycznych na oscylacje periodyczne (rys. 4 i 5), niekorzystne dla samolotu.

Na rys. 5 przedstawiono wyniki dla tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ i częstości $\bar{\eta}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności C przy różnych tłumieniach w układzie sterowania TL dla przypadku pełnego. Jak wynika z analizy, tłumienie w istotny sposób wpływa na częstość oscylacji i ich tłumienie, natomiast sztywność, przy określonym tłumieniu, na charakter drgań steru (rys. 5 i 4).

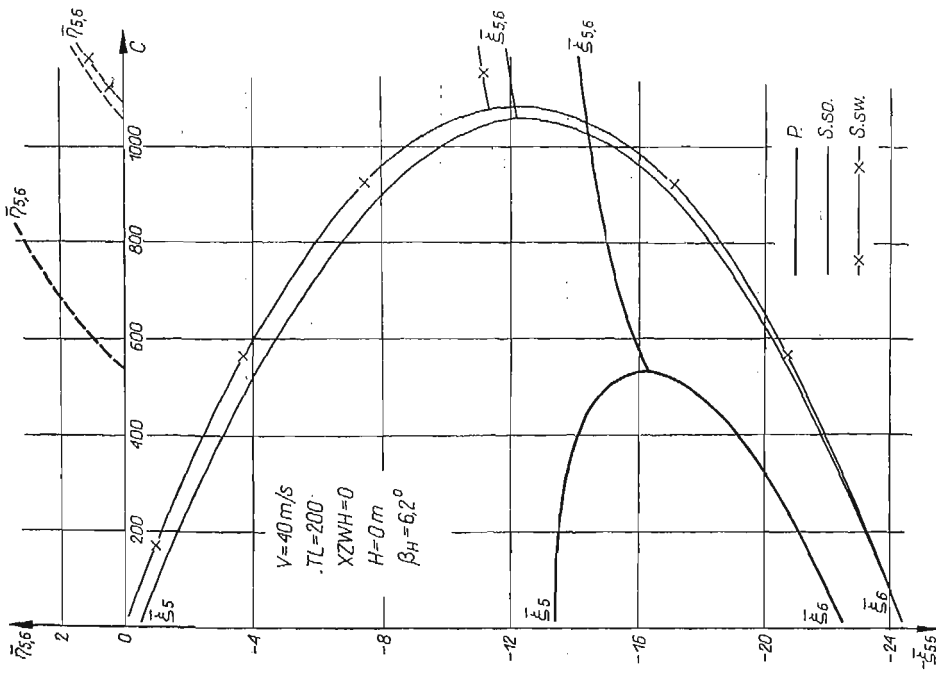
Należy stwierdzić, na podstawie rys. 3–5, że przy badaniu drgań steru należy uwzględnić stopnie swobody wynikające z przemieszczeń samolotu jako układu sztywnego, a nie ograniczać się wyłącznie do badań steru izolowanego.

B. Wpływ tłumienia w układzie sterowania na drgania steru wysokości. Uwzględnienie stopni swobody samolotu sztywnego ma istotny wpływ na określenie wielkości tłumienia krytycznego w układzie sterowania (rys. 6–8). Szczególnie silnie wpływa to przy mniejszej sztywności układu sterowania (rys. 6). Charakter drgań steru wysokości w funkcji tłumienia nie zmienia się bez względu na sztywność układu (rys. 8). Dotyczy to również uwzględnienia tłumienia aerodynamicznego i dodatkowych stopni swobody (rys. 6 i 7).

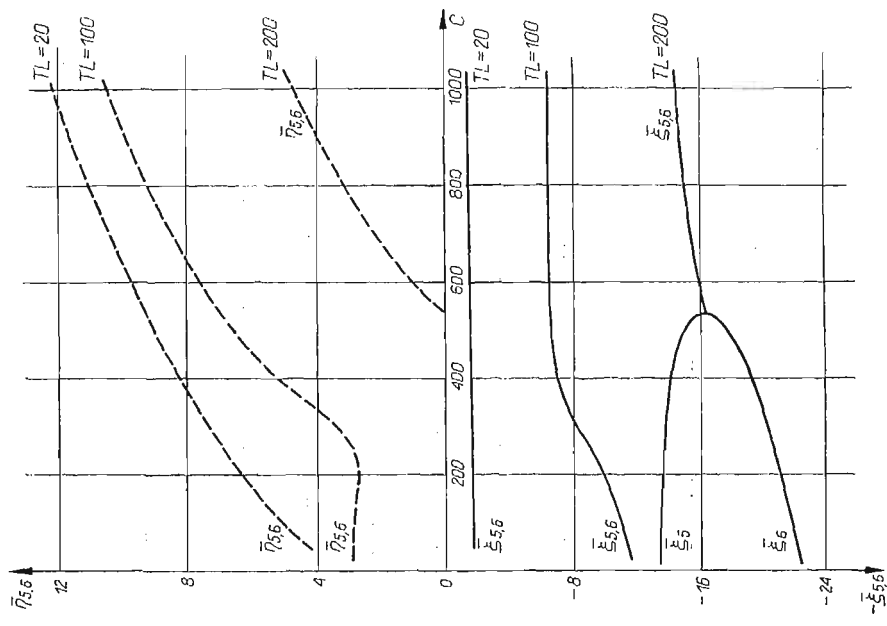
Przy małym tłumieniu w układzie sterowania TL występują drgania okresowe steru o częstości $\bar{\eta}_{5,6}$, zawsze tłumione, $\bar{\xi}_{5,6} < 0$. Ze wzrostem tłumienia częstość oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ maleje do zera przy równoczesnym wzroście tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru. Przy krytycznym tłumieniu TL drgania okresowe przechodzą w silnie tłumione ruchy aperiodyczne $\bar{\xi}_5 < 0$ i $\bar{\xi}_6 < 0$.

Siły i momenty aerodynamiczne wpływają tłumiąco na ruchy steru (rys. 6–8), $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ nawet przy $TL = 0$.

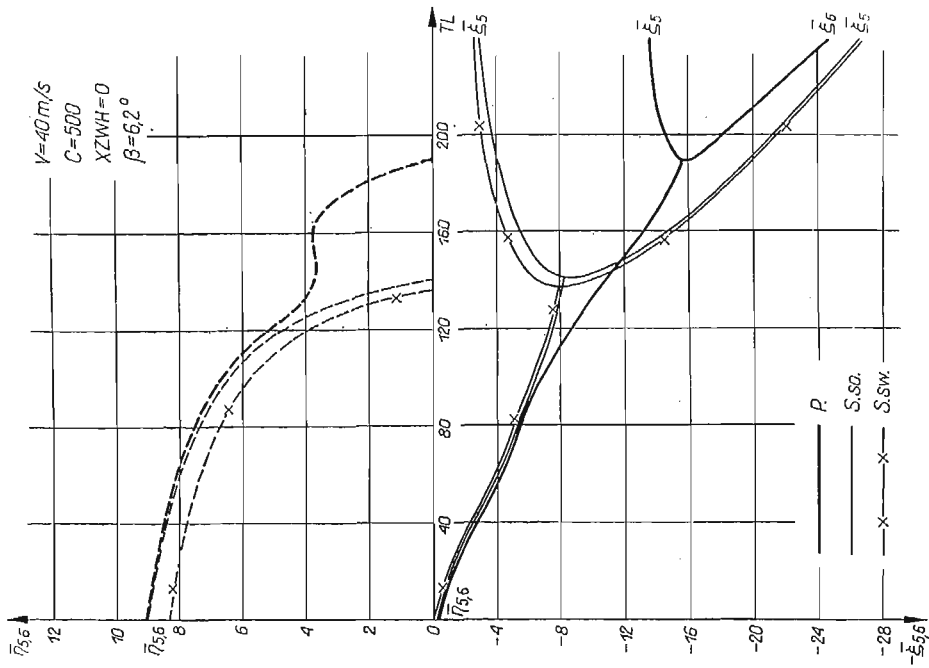
C. Wpływ wyważenia steru wysokości na jego drgania. Wyważenie steru wysokości silnie wpływa na charakter ruchów steru w zależności od tłumienia w układzie sterowania (rys. 12). Przy małym tłumieniu $TL = 20$ –100 występują drgania okresowe, których tłumienie wzrasta wraz z wyważeniem steru, tzn. $XZWH \rightarrow 0$. Przy wzroście tłumienia $TL > 100$ pojawiają się ruchy aperiodyczne steru wysokości silnie tłumione w zakresie wyważenia $-0,27 \leq XZWH \leq 0,24$ (rys. 12). Natomiast dla steru z niewyważeniem



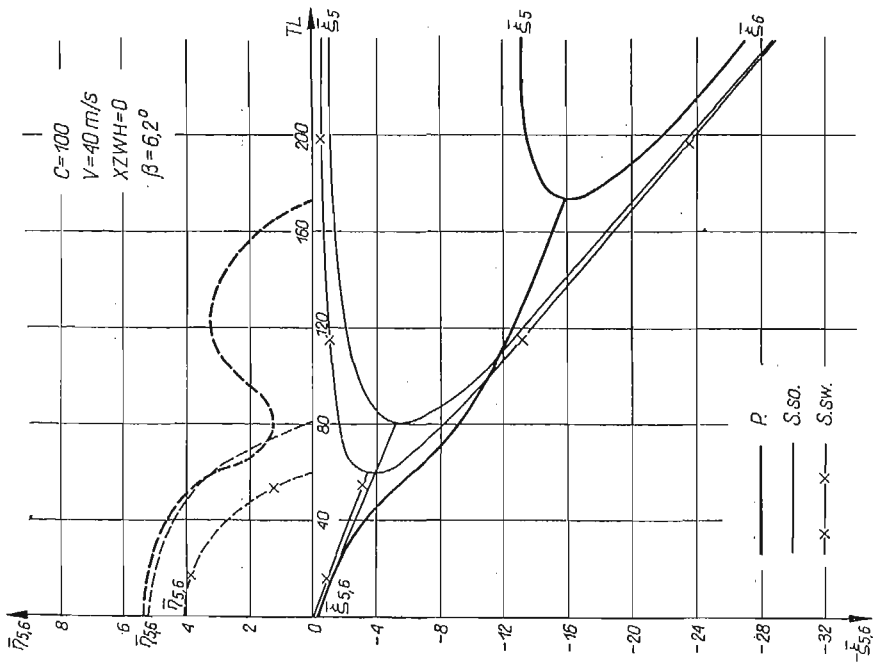
Rys. 4. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C przy tłumieniu układu $TL = 200$



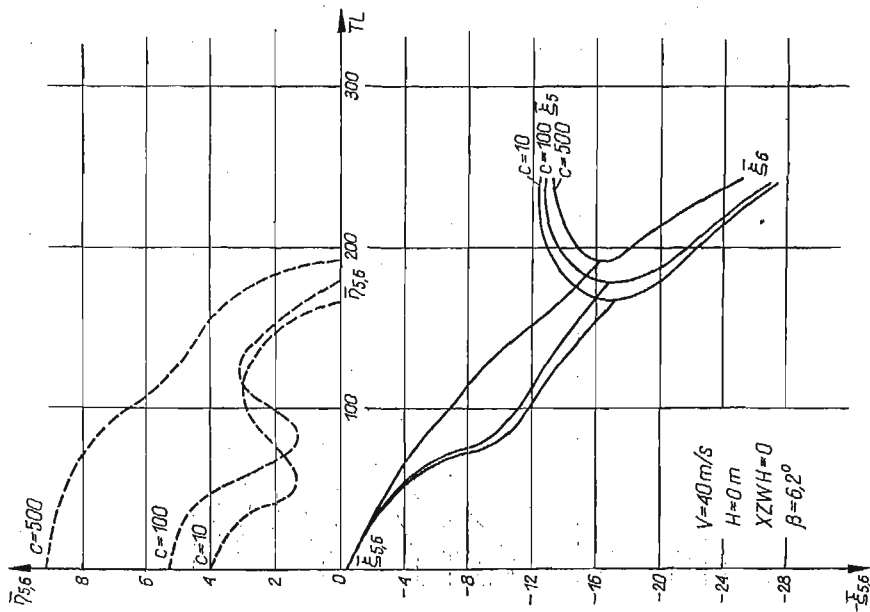
Rys. 5. Porównanie zmian częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania C dla trzech parametrów tłumienia układu



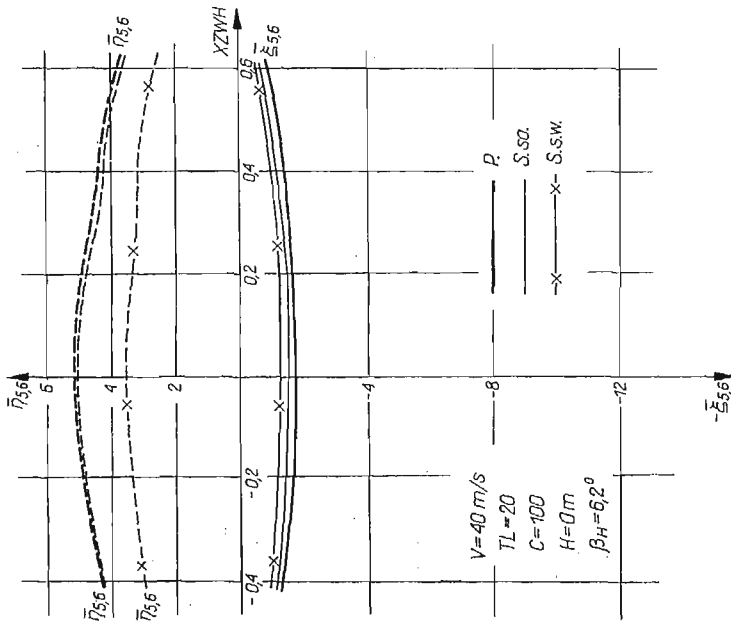
Rys. 7. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji tłumienia w układzie sterowania TL przy sztywności układu $C = 500$



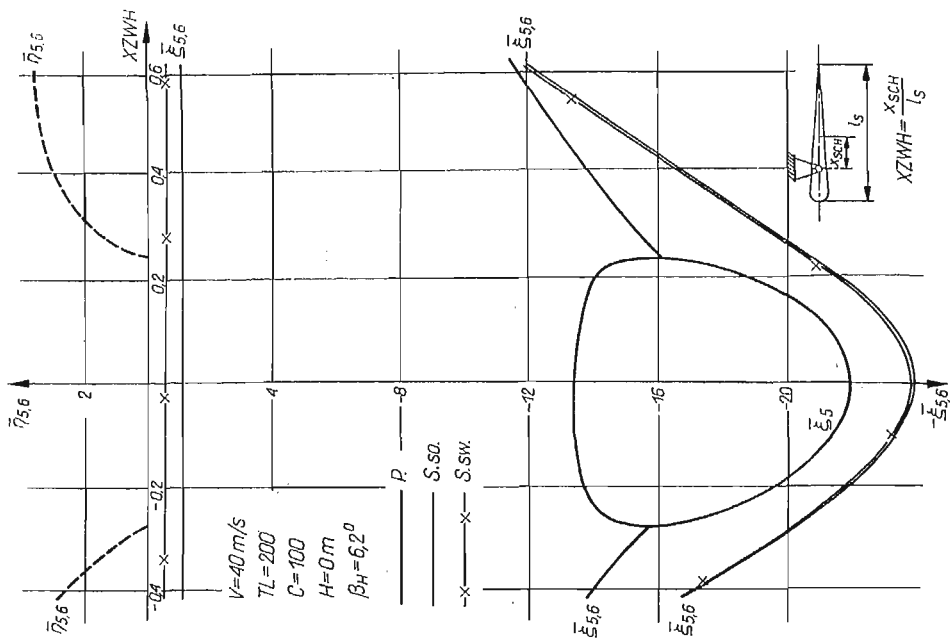
Rys. 6. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji tłumienia w układzie sterowania TL przy sztywności układu $C = 100$



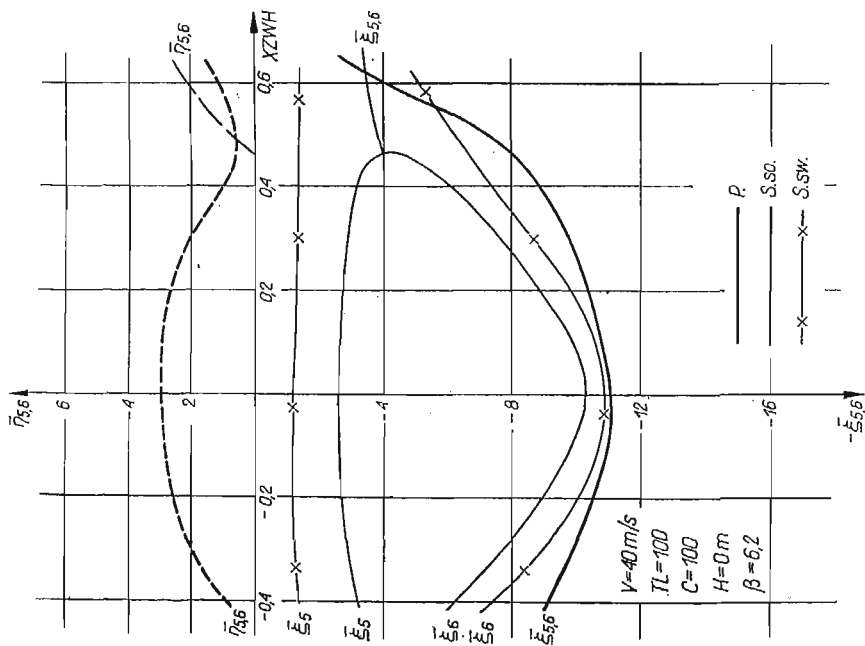
Rys. 8. Porównanie zmian częstości oscylacji $\eta_{5,6}$ i tłumienia $\xi_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji tłumienia w układzie sterowania TL dla trzech parametrów sztywności układu



Rys. 9. Zmiany częstości oscylacji $\eta_{5,6}$ i tłumienia $\xi_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C=100$ i tłumieniu $TL=20$



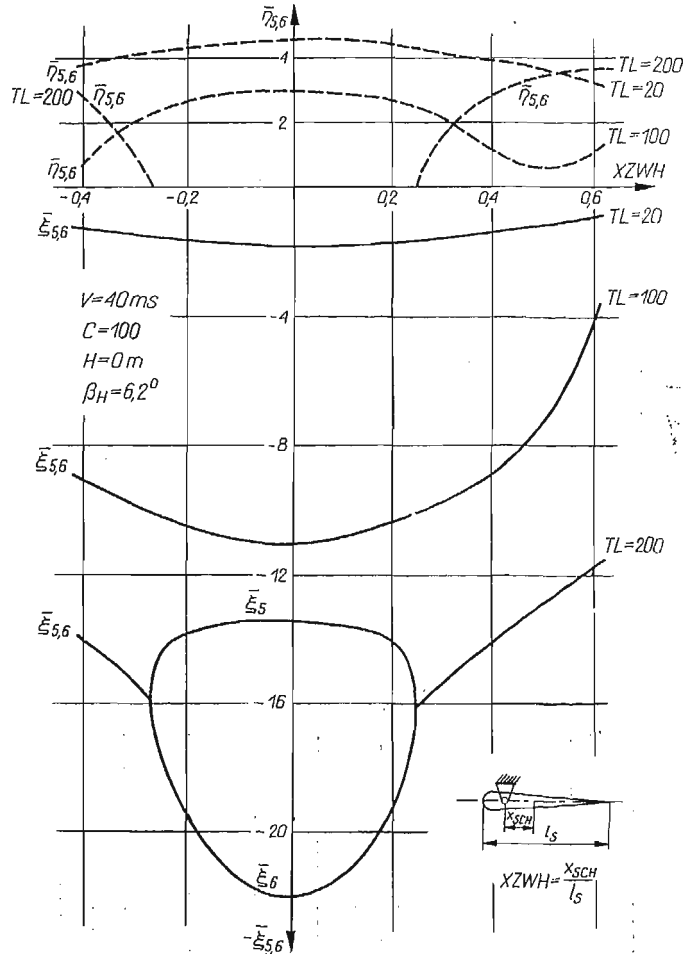
Rys. 11. Zmiany częstości oscylacji $\eta_{5,6}$ i tłumienia $\xi_{5,6}$, drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i tłumieniu $TL = 200$



Rys. 10. Zmiany częstości oscylacji $\eta_{5,6}$ i tłumienia $\xi_{5,6}$, drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i tłumieniu $TL = 100$

przednim $XZWH < -0,27$ i tylnym $XZWH > 0,24$ występują drgania okresowe z tłumieniem malejącym.

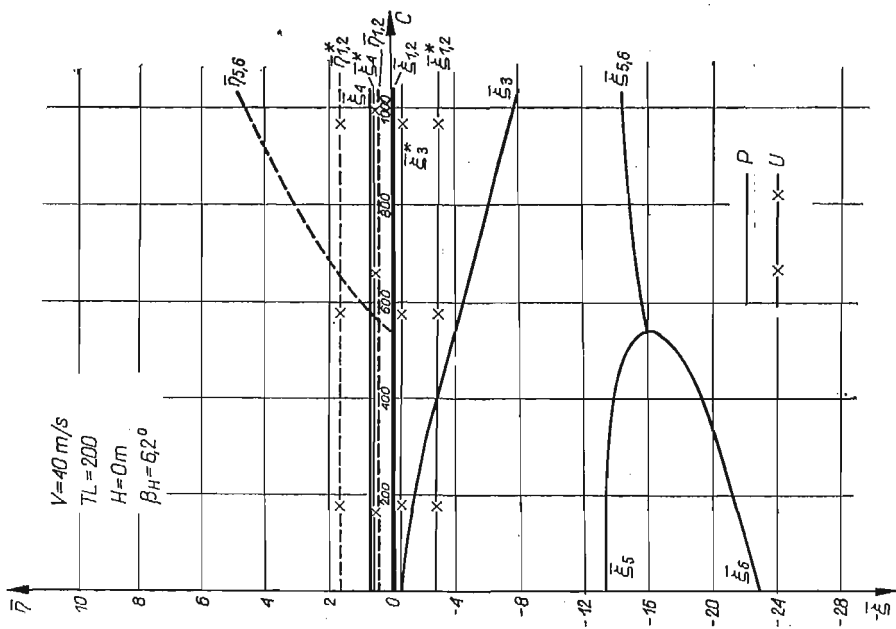
Uwzględnienie stopni swobody samolotu sztywnego ma istotny wpływ na miarodajność wyników określających charakter ruchów steru przy większych wartościach tłumienia i sztywności, co ma miejsce w układach sterowania z urządzeniami wspomagającymi



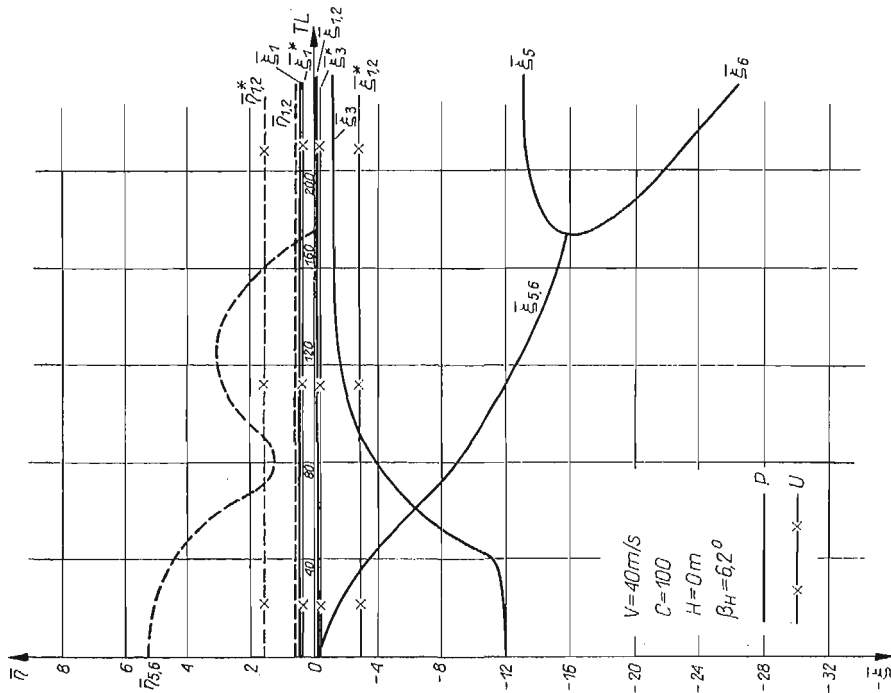
Rys. 12. Porównanie zmian częstości oscylacji $\bar{\eta}_{5,6}$ i tłumienia $\bar{\xi}_{5,6}$ drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości $XZWH$ przy sztywności układu sterowania $C = 100$ i trzech wartościach parametrów tłumienia

(boosterami) (rys. 10 i 11). Natomiast przy układach sterowania sprężystych o małym tłumieniu wyniki otrzymane dla steru izolowanego i w rzeczywistym układzie samolotu są tego samego rzędu i wskazują na identyczny charakter oscylacji steru wysokości (rys. 9).

D. Wpływ sztywności i tłumienia układu sterowania sterem wysokości i stopnia wyważenia steru na stateczność podłużną samolotu. Na rys. 13, 14 porównano zmiany współczynników oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ otrzymanych dla samolotu sztywnego z nieruchomym sterem wysokości



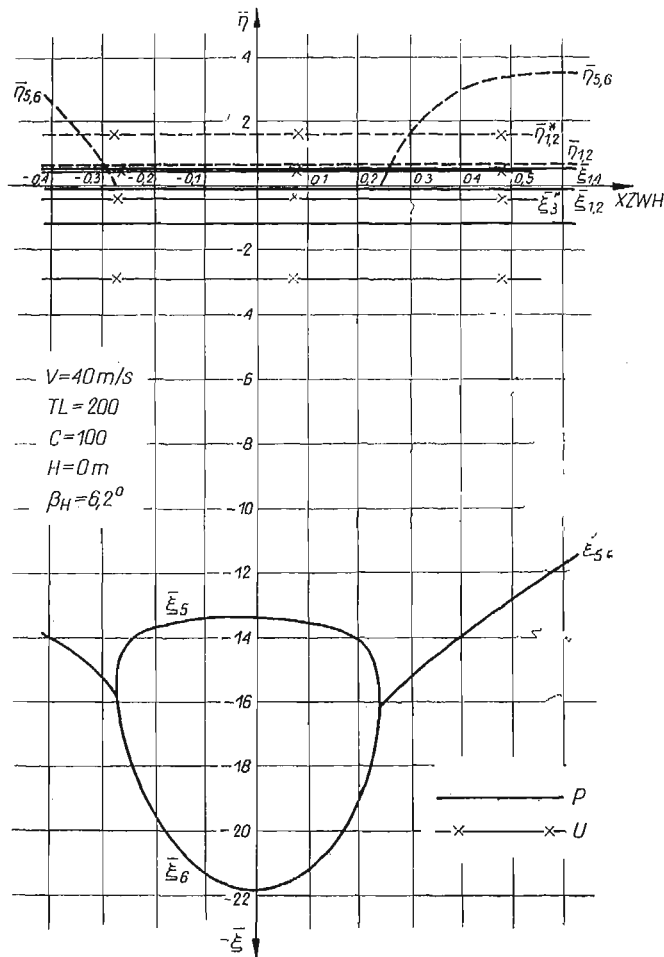
Rys. 13. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ ruchów symetrycznych samolotu i drgań steru wysokości w funkcji sztywności układu sterowania sterem wysokości



Rys. 14. Zmiany częstości oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ ruchów symetrycznych samolotu i drgań steru wysokości w funkcji tłumienia układu sterowania sterem wysokości

«U» z wynikami otrzymanymi przy uwzględnieniu sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości oraz wpływu stopnia wyważenia steru wysokości «P».

Zmiany sztywności (rys. 13) i tłumienia (rys. 14) w układzie sterowania sterem wysokości wpływają zarówno na oscylacje szybkie, zmieniając współczynniki tłumienia $\bar{\xi}_{1,2}$ i częstotliwości oscylacji $\bar{\eta}_{1,2}$, jak i na tłumienie przemieszczeń fugalnych $\bar{\xi}_3$.



Rys. 15. Zmiany częstotliwości oscylacji $\bar{\eta}$ i tłumienia $\bar{\xi}$ ruchów symetrycznych samolotu i drgań steru wysokości w funkcji wyważenia steru wysokości

Stopień statycznego wyważenia steru wysokości tzn. względna odległość położenia środka masy od osi obrotu nie ma istotnego wpływu jakościowego na ruchy samolotu, natomiast silnie wpływa na drgania steru (rys. 15).

Drgania steru wysokości w rozpatrywanym przypadku są zawsze silnie tłumione $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ (rys. 13–15), a charakter drgań steru zależy jest od sztywności i tłumienia w układzie sterowania (rys. 13 i 14) oraz od stopnia wyważenia steru (rys. 15).

6. Wnioski ogólne

Zastosowanie równań Boltzmana–Hamel'a przy wyprowadzaniu w quasi-współrzędnych równań ruchu obiektów swobodnych, tzn. obiektów latających jak i pojazdów, umożliwia w stosunkowo prosty sposób uwzględnienie wahań elementów ruchomych i drgań sprężystych konstrukcji.

Przy badaniu drgań powierzchni sterowych należy uwzględniać stopnie swobody samolotu sztywnego, które poprzez sprzężenie ruchów mają ilościowy i jakościowy wpływ na charakter rozwiązań (rys. 2–12).

W rozpatrywanym przypadku oscylacje steru lub ruchy aperiodyczne są silnie tłumione i nie wykazują silnego wpływu jakościowego na stateczność samolotu. Jednak nie należy tego uogólniać i odnosić do innych obiektów latających.

W przedstawionych rozważaniach przyjęto aerodynamikę stacjonarną, co może mieć niekorzystny wpływ na rezultaty obliczeń w zakresie większych częstości drgań steru.

Literatura cytowana w tekście

1. И. АППЕЛЬ, *Теоретическая механика*, Изд. Физ.-Мат., Москва 1960.
2. В. ЕТКИН, *Dynamics of Flight Stability and Control*, New York 1959.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Łódź—Warszawa 1961.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. J. MARYNIAK, *Uproszczona stateczność podłużna szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret. i Stos., 1 (1967).
7. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, Mech. Teoret. i Stos., 3 (1967).
8. J. MARYNIAK, M. LOSTAN, *Wpływ odkształcalności giętej skrzydła na stateczność podłużną szybowca*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1970).
9. К. ОГАТА, *Методы пространства станбв в теории стерования*, WNT, Warszawa 1974.
10. Л. А. ПАРС, *Аналитическая динамика*, Изд. Наука, Москва 1971.
11. T. TRAJDOS-WRÓBEL, *Matematyka dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1966.
12. J. I. НЕЙМАК, N. A. ФУРАЛЕВ, *Динамика уклатдбв неholономичных*, PWN, Warszawa 1971.
13. К. А. АБГАРЯН, *Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем*, Изд. Наука, Москва 1973.
14. И. В. СТРАЖЕВА, В. С. МЕЛКУМОВ, *Векторно-матричные методы в механике полета*, Машиностроение, Москва 1973.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ
РУЛЕМ ВЫСОТЫ НА ПРОДОЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ САМОЛЕТА
И НА ОСЦИЛЛЯЦИИ РУЛЯ

В работе рассматривается влияние жесткости и демпфирования в системе управления рулем высоты а также уравновешенности руля на устойчивость самолета и на колебания руля высоты.

Уравнения движения самолета с осциллирующим рулем были выведены с применением уравнения Больцмана–Хамеля для голономных систем.

Решение сведено к определению собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы состояния. Проведены вычислительные расчеты для спортивного самолета, полученные результаты сопоставляются с результатами расчетов для жесткого самолета.

S u m m a r y

INFLUENCE OF STIFFNESS AND DAMPING IN THE ELEVATOR CONTROL SYSTEM ON LONGITUDINAL STABILITY OF AN AIRCRAFT AND VIBRATIONS OF AN ELEVATOR

In the paper, the titled problem, including the analysis of elevator mass balance, is presented. The equations of motion of an aircraft with oscillating elevator are derived by application of Boltzmann-Hamel's equations for holonomic systems. The solution is obtained by the method of eigen-values and eigenvectors of the state matrix. The numerical calculations performed for the light aircraft are compared with results for the same aircraft with blocked elevator.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1974 r.
