

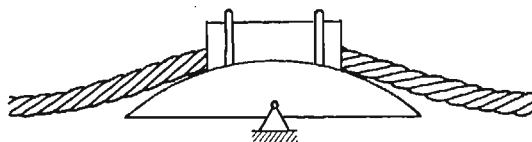
ZASTOSOWANIE TŁUMIKÓW STOCKBRIDGE'A
DO TŁUMIENIA DRGAŃ BELEK I STRUN

JÓZEF NIZIOŁ, ANDRZEJ MARTYNUŠKA (KRAKÓW)

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest przeanalizowanie skuteczności tłumienia tłumików Stockbridge'a stosowanych do tłumienia drgań belek i strun.

Teoretyczne rozwiązanie zagadnienia tłumienia drgań układów o ciągłym rozmieszczeniu masy nastęrcza wiele trudności i często okazuje się niemożliwe bez stosowania wielu uproszczeń. Z problemami takimi spotykamy się przy rozważaniu tłumienia drgań suwnic, rurociągów napowietrznych, przewodów linii wysokiego napięcia itp.



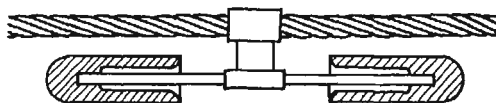
Rys. 1.

W niniejszej pracy zajęto się analizą drgań przewodów linii wysokiego napięcia tłumionych za pomocą tłumików Stockbridge'a. Drgania takich przewodów są zjawiskiem bardzo niebezpiecznym. W polskich warunkach najczęściej spotykanym źródłem drgań są «wiry Kármána». Jest to zjawisko występujące podczas opływania prętów przez płyny polegające na odrywaniu się cząsteczek płynu od pręta z pewną określoną częstotliwością. Powstaje w ten sposób okresowo zmieniająca się siła stanowiąca wymuszenie drgań. Charakterystyczny dla tego rodzaju drgań jest ich poprzeczny, w stosunku do przepływu płynu, kierunek. Wiszące na wolnym powietrzu przewody są narażone na działanie wiatru, który powoduje powstawanie w nich takich właśnie drgań poprzecznych.

W pracy niniejszej nie będziemy zatrzymywać się nad samym mechanizmem powstawania drgań, lecz przyjmiemy, że wymuszenia drgań są znane, a dobierać będziemy skuteczny tłumik dynamiczny.

Na przewody linii wysokiego napięcia stosowane są liny. Ich zamocowanie zrealizowane jest w ten sposób, że spoczywa ona na tak zwanej łódce, do której przymocowana jest nakładka (rys. 1). Tego typu utwierdzenie powoduje, że w pobliżu uchwytów sztywność liny jest największa i maleje ona w kierunku od «uchwyty». W związku z tym w pobliżu łódki występują największe naprężenia. Poszczególne druty wchodzące w skład drgającej liny poddawane są działaniu cyklicznych naprężeń o zmieniającym się znaku. Zjawisko to w połączeniu z dużymi naprężeniami kontaktowymi w obrębie uchwytu powoduje zmęczeniowe zniszczenie liny w tym obszarze.

W związku z tym zachodzi konieczność tłumienia drgań liny, szczególnie w pobliżu uchwytów. Na podstawie badań na liniach rzeczywistych stwierdzono, że najczęściej występujące drgania mieszczą się w zakresie 10–35 Hz i wówczas uzyskiwane są największe amplitudy drgań. Tłumiki dynamiczne powinny być głównie nastrojone na ten zakres częstotliwości.



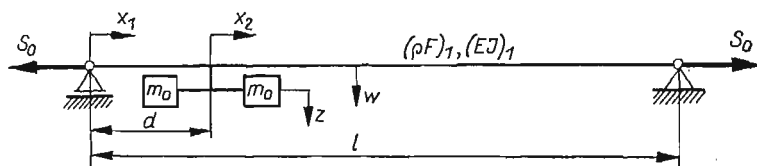
Rys. 2.

Stosowane są dwie metody tłumienia drgań:

- a) tłumienie integralne — tłumiki Stockbridge'a (rys. 2),
- b) tłumienie lokalne w miejscach niebezpiecznych — tłumienie pętlicowe.

1. Drgania własne belki z naciągiem tłumionej tłumikiem Stockbridge'a

Rozważamy drgania belki jednorodnej, zamocowanej przegubowo, poddanej rozciągającej sile osiowej, na której podwieszono tłumik Stockbridge'a (rys. 3).



Rys. 3.

Na rys. 3 przyjęto następujące oznaczenia

- x_1 — współrzędna bieżąca dla belki mierzona od podpory,
- x_2 — współrzędna bieżąca dla tłumika mierzona od punktu podwieszenia tłumika,
- $(\rho F)_1$ — gęstość belki na jednostkę długości,
- $(\rho F)_2$ — gęstość pręta wchodzącego w skład tłumika na jednostkę długości,
- $m_2 = (\rho F)_2 l_2$ — masa pręta tłumika,
- $(EJ)_1$ — sztywność zginania belki,
- $(EJ)_2$ — sztywność zginania pręta wchodzącego w skład tłumika,
- m_0 — masa tłumika,
- d — odległość punktu podwieszenia tłumika od podpory,
- S_0 — naciąg belki,
- l — długość przęsła,
- l_2 — długość pręta wchodzącego w skład tłumika,
- a — odległość środka ciężkości masy m_0 od końca pręta,
- w — przemieszczenie punktów belki,
- z — przemieszczenie względne punktów pręta w stosunku do belki,
- z_0 — przemieszczenie względne środka masy m_0 w stosunku do belki.

Układ równań opisujących ruch belki i tłumika ma postać

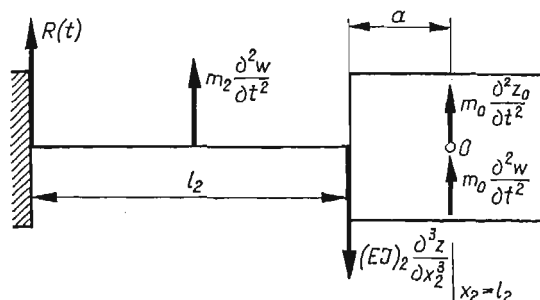
$$(1.1) \quad \begin{aligned} (EJ)_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (\rho F)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \delta_1(x_1 - d)R(t), \\ (EJ)_2 \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie przez $R(t)$ oznaczono siłę określoną następująco:

$$(1.2) \quad R(t) = - (EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} - (m_0 + m_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d},$$

δ jest funkcją Diraca. Jest to siła wzajemnego oddziaływania belki i tłumika. Dla powyższego układu równań warunki brzegowe dla belki mają postać

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w(0, t) &= 0, & w(l, t) &= 0, \\ w''(0, t) &= 0, & w''(l, t) &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 4.

dla tłumika (rys. 4)

$$(1.4) \quad \begin{aligned} z(0, t) &= 0, & m_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} &= (EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=l_2} - B, \\ z'(0, t) &= 0, & J_0 \ddot{\varphi} &= -a(EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=l_2} - (EJ)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=l_2} + M_B. \end{aligned}$$

Przyjęto tu

$$(1.5) \quad B = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d},$$

$$(1.6) \quad M_B = -\frac{l_2}{2} m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d},$$

$$(1.7) \quad m_2 = (\rho F)_2 l_2,$$

$$(1.8) \quad z_0 = z(l_2, t) + a\varphi = z(l_2, t) + a \frac{\partial z(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2},$$

$$(1.9) \quad J_0 = \int_{(m_0)} r^2 dm_0$$

masowy moment bezwładności tłumika względem osi 0.

Rozwiązanie układu (1.1) przyjmujemy w postaci

$$(1.10) \quad \begin{aligned} w(x_1, t) &= X(x_1) \sin(\omega t + \varphi), \\ z(x_2, t) &= Z(x_2) \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

gdzie ω jest nie znaną na razie częstością drgań układu. Po wstawieniu (1.10) do (1.1) i wykorzystaniu (1.2) otrzymamy

$$(1.11) \quad \begin{aligned} (EJ)_1 X^{IV} - (\rho F)_1 \omega^2 X - S_0 X'' &= \delta(x_1 - d) 2[-(EJ)_2 Z'''(0) + (m_0 + m_2) X(d) \omega^2], \\ (EJ)_2 Z^{IV} - (\rho F)_2 \omega^2 Z - (\rho F)_2 X(d) \omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Drugie równanie układu (1.11) zapiszemy w postaci

$$(1.12) \quad Z^{IV}(x_2) - k_2^4 Z(x_2) = k_2^4 X(d),$$

gdzie oznaczono

$$(1.13) \quad k_2^4 = \frac{(\rho F)_2}{(EJ)_2} \omega^2.$$

Rozwiązanie równania (1.12) przyjmuje postać

$$(1.14) \quad Z(x_2) = Z_0(x_2) + Z_s(x_2),$$

gdzie $Z_s(x_2)$ jest całką szczególną równą

$$(1.15) \quad Z_s(x_2) = -X(d).$$

Natomiast $Z_0(x_2)$ to całka ogólna równania jednorodnego

$$(1.16) \quad Z_0(x_2) = A_2^{(1)} \sin k_2 x_2 + B_2^{(1)} \cos k_2 x_2 + G_2^{(1)} \operatorname{sh} k_2 x_2 + D_2^{(1)} \operatorname{ch} k_2 x_2.$$

Na podstawie warunków brzegowych (1.4) otrzymamy następujący układ równań

$$(1.17) \quad \begin{aligned} A_2^{(1)} \varepsilon + B_2^{(1)} \kappa &= \gamma X(d), \\ A_2^{(1)} \mu - B_2^{(1)} \vartheta &= -\eta X(d), \\ G_2^{(1)} &= -A_2^{(1)}, \\ D_2^{(1)} &= X(d) - B_2^{(1)}, \end{aligned}$$

z którego obliczono stałe

$$(1.18) \quad \begin{aligned} A_2^{(1)} &= A_2 X(d), & A_2 &= \frac{\gamma \vartheta - \eta \kappa}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}, \\ B_2^{(1)} &= B_2 X(d), & B_2 &= \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}, \\ G_2^{(1)} &= G_2 X(d), & G_2 &= \frac{\eta \kappa - \gamma \vartheta}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}, \\ D_2^{(1)} &= D_2 X(d), & D_2 &= 1 - \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \kappa}. \end{aligned}$$

W zależnościach (1.17) i (1.18) oznaczono

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \sin k_2 l_2 + k_2 a \cos k_2 l_2 - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \cos k_2 l_2 - \operatorname{sh} k_2 l_2 - k_2 a \operatorname{ch} k_2 l_2 - \\
 &\quad - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \operatorname{ch} k_2 l_2, \\
 \varkappa &= \cos k_2 l_2 - k_2 a \sin k_2 l_2 + \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \sin k_2 l_2 - \operatorname{ch} k_2 l_2 - k_2 a \operatorname{sh} k_2 l_2 - \\
 &\quad - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2, \\
 (1.19) \quad \gamma &= -\operatorname{ch} k_2 l_2 - k_2 a \operatorname{sh} k_2 l_2 - \frac{(EJ)_2}{m_0 \omega^2} k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2, \\
 \mu &= J_0 \omega^2 k_2 \cos k_2 l_2 + a(EJ)_2 k_2^3 \cos k_2 l_2 + (EJ)_2 k_2^2 \sin k_2 l_2 - J_0 \omega^2 k_2 \operatorname{ch} k_2 l_2 + \\
 &\quad + a(EJ)_2 k_2^3 \operatorname{ch} k_2 l_2 + (EJ)_2 k_2^2 \operatorname{sh} k_2 l_2, \\
 \vartheta &= J_0 \omega^2 k_2 \sin k_2 l_2 + a(EJ)_2 k_2^3 \sin k_2 l_2 - (EJ)_2 k_2^2 \cos k_2 l_2 + J_0 \omega^2 k_2 \operatorname{sh} k_2 l_2 - \\
 &\quad - a(EJ)_2 k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2 - (EJ)_2 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l_2, \\
 \eta &= \frac{l_2^2}{2} (\varrho F)_2 \omega^2 + J_0 \omega^2 k_2 \operatorname{sh} k_2 l_2 - a(EJ)_2 k_2^3 \operatorname{sh} k_2 l_2 - (EJ)_2 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l_2.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie więc rozwiązanie równania (1.12) można zapisać w formie

$$(1.20) \quad Z(x_2) = X(d) \left[\frac{\gamma \vartheta - \eta \varkappa}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \sin k_2 x_2 + \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \cos k_2 x_2 + \right. \\
 \left. + \frac{\eta \varkappa - \gamma \vartheta}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \operatorname{sh} k_2 x_2 + \left(1 - \frac{\varepsilon \eta + \mu \gamma}{\varepsilon \vartheta + \mu \varkappa} \right) \operatorname{ch} k_2 x_2 - 1 \right].$$

Z drugiego z równań (1.11) można obliczyć

$$(1.21) \quad X(d) \omega^2 = \frac{(EJ)_2}{(\varrho F)_2} Z^{IV}(x_2) - \omega^2 Z(x_2).$$

Wstawiając (1.21) do pierwszego równania (1.11) dostajemy do rozwiązania równanie

$$(1.22) \quad X^{IV}(x_1) - h_1^2 X''(x_1) - k_1^4 X(x_1) = \delta(x_1 - d) 2[-\alpha_g Z'''(0) + \\
 + \alpha_g \alpha_m Z^{IV}(0) - \omega^2 \alpha_{gm} Z(0)],$$

w którym przyjęto oznaczenia

$$(1.23) \quad \begin{aligned}
 h_1^2 &= \frac{S_0}{(EJ)_1}, \\
 k_1^4 &= \omega^2 \frac{(\varrho F)_1}{(EJ)_1}, \\
 \alpha_g &= \frac{(EJ)_2}{(EJ)_1}, \\
 \alpha_m &= \frac{m_0 + m_1}{(\varrho F)_2}, \\
 \alpha_{gm} &= \frac{m_0 + m_2}{(EJ)_1}.
 \end{aligned}$$

Traktując równanie (1.22) jako równanie niejednorodne, jego rozwiązanie przyjmiemy w postaci sumy całki ogólnej wyrażającej się wzorem

$$(1.24) \quad X_0(x_1) = A_1 \sin r_1 x_1 + B_1 \cos r_1 x_1 + G_1 \operatorname{sh} r_2 x_1 + D_1 \operatorname{ch} r_2 x_1$$

oraz całki szczególnej przyjmującej postać

$$(1.25) \quad X_s(x_1) = R_1 \int_0^{x_1} f(u) \sin r_1 (u - x_1) du - R_2 \int_0^{x_1} f(u) \operatorname{sh} r_2 (u - x_1) du,$$

r_1, r_2, R_1, R_2 i $f(u)$ określone są następująco

$$(1.26) \quad r_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4} - h_1^2}{2}},$$

$$(1.27) \quad r_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4} + h_1^2}{2}},$$

$$(1.28) \quad R_1 = \frac{r_1^2 r_2 + r_2^3}{r_1^5 r_2 + 2r_1^3 r_2^3 + r_1 r_2^5},$$

$$(1.29) \quad R_2 = \frac{r_1^3 + r_1 r_2^2}{r_1^5 r_2 + 2r_1^3 r_2^3 + r_1 r_2^5},$$

$$(1.30) \quad f(u) = -\delta(u-d)2[\alpha_g Z'''(0) - \alpha_m \alpha_g Z^{IV}(u-d) + \alpha_{gm} \omega^2 Z(u-d)].$$

Posługując się funkcją Heaviside'a $\sigma_2(x_1 - d)$ całkę szczególną możemy zapisać wzorem

$$(1.31) \quad X_s(x_1) = -\sigma_2(x_1 - d)2[\alpha_g Z'''(0) - \alpha_m \alpha_g Z^{IV}(0) + \omega^2 \alpha_{gm} Z(0)] \times \\ \times [R_1 \sin r_1 (d - x_1) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d - x_1)].$$

Rozwiązanie równania (1.22) przyjmie więc postać

$$(1.32) \quad X(x_1) = A_1 \sin r_2 x_1 + B_1 \cos r_1 x_1 + G_1 \operatorname{sh} r_2 x_1 + D_1 \operatorname{ch} r_2 x_1 + \\ + \sigma_2(x_1 - d)2KX(d)[R_1 \sin r_1 (d - x_1) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d - x_1)].$$

Przez K oznaczono

$$(1.33) \quad K = -2k_2^3 \alpha_g \frac{\eta\kappa - \gamma\vartheta}{\varepsilon\vartheta + \mu\kappa} + \omega^2 \alpha_g \alpha_m \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2}.$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych (1.3) dostajemy $B_1 = D_1 = 0$ oraz układ równań postaci

$$(1.34) \quad A_1 \{ \sin r_1 l + 2K \sin r_1 d [R_1 \sin r_1 (d-l) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} + \\ + G_1 \{ \operatorname{sh} r_2 l + 2K \operatorname{sh} r_2 d [R_1 \sin r_1 (d-l) - R_2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} = 0, \\ -A_1 \{ r_1^2 \sin r_1 l + 2K \sin r_1 d [R_1 r_1^2 \sin r_1 (d-l) + R_2 r_2^2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} + \\ + G_1 \{ r_2^2 \operatorname{sh} r_2 l - 2K \operatorname{sh} r_2 d [R_1 r_1^2 \sin r_1 (d-l) + R_2 r_2^2 \operatorname{sh} r_2 (d-l)] \} = 0.$$

Układ ten posiada rozwiązanie nietrywialne wtedy, gdy jego wyznacznik główny jest równy zeru.

Z rozwinięcia tego wyznacznika otrzymano równanie charakterystyczne, z którego można wyznaczyć częstotliwości drgań ω_n układu belka—tłumik. Równanie to ma postać

$$(1.35) \quad \frac{1}{k_1^2 \sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4 + h_1^2}}{h_1^4 + 4k_1^4}} \sin r_1 d \operatorname{sh} r_2 l \sin r_1 (d-l) \right] - \\ - \sqrt{\frac{\sqrt{h_1^4 + 4k_1^4 - h_1^2}}{h_1^4 + 4k_1^4}} \sin r_1 l \operatorname{sh} r_2 d \operatorname{sh} r_2 (d-l) + \frac{\sin r_1 l \operatorname{sh} r_2 l}{2K} = 0.$$

Jeżeli związek (1.35) jest spełniony, to jedną spośród dwóch stałych A_{1n} i G_{1n} można przyjąć dowolnie. Wyznaczono więc

$$(1.36) \quad \frac{A_{1n}}{G_{1n}} = - \frac{\operatorname{sh} r_{2n} l + 2K_n \operatorname{sh} r_{2n} d [R_{1n} \sin r_{1n} (d-l) - R_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} (d-l)]}{\sin r_{1n} l + 2K_n \sin r_{1n} d [R_{1n} \sin r_{1n} (d-l) - R_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} (d-l)]}.$$

Oznaczając dla prostoty zapisu

$$(1.37) \quad \frac{A_{1n}}{G_{1n}} = q_n$$

można ostatecznie rozwiązania równań (1.12) i (1.22) przedstawić wzorami

$$(1.38) \quad X_n(x_1) = G_{1n} \{ q_n \sin r_{1n} x_1 + \operatorname{sh} r_{2n} x_1 + \sigma_2 (x_1 - d) 2K_n [q_n \sin r_{1n} d + \\ + \operatorname{sh} r_{2n} d] [R_{1n} \sin r_{1n} (d - x_1) - R_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} (d - x_1)] \},$$

$$(1.39) \quad Z_n(x_2) = G_{1n} \left\{ [q_n \sin r_{1n} d + \operatorname{sh} r_{2n} d] \left[\frac{\gamma_n \vartheta_n + \eta_n \varkappa_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \sin k_{2n} x_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon_n \eta_n + \mu_n \gamma_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \cos k_{2n} x_2 + \frac{\eta_n \varkappa_n + \gamma_n \vartheta_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \operatorname{sh} k_{2n} x_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\varepsilon_n \eta_n + \mu_n \gamma_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \varkappa_n} \right) \operatorname{ch} k_{2n} x_2 - 1 \right] \right\}.$$

2. Drgania wymuszone belki z naciągami i tłumieniem wewnętrznym

Rozwiązano również problem drgań wymuszonych z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego. Równanie ruchu w tym przypadku przyjmuje postać

$$(2.1) \quad (EJ)_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \tau_1 (EJ)_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x_1^4 \partial t} + (\rho F)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_0 \tau_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} - S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \\ = -\delta(x_1 - d) 2 \left[(EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} + (m_0 + m_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=0} \right] + H(x_1) \sin vt, \\ (EJ)_2 \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4} + \tau_2 (EJ)_2 \frac{\partial^5 z}{\partial x_2^4 \partial t} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\rho F)_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} = 0,$$

gdzie

$H(x_1) \sin vt$ — obciążenie zewnętrzne wymuszające drgania,

τ_1 — współczynnik tłumienia wewnętrznego w belce,

τ_2 — współczynnik tłumienia wewnętrznego w tłumiku Stockbridge'a.

Rozwiązania tego układu równań poszukiwano w formie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w(x_1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_1) T_n^{(1)}(t), \\ z(x_2, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x_2) T_n^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Funkcje $X_n(x_1)$ i $Z_n(x_2)$ są funkcjami własnymi określonymi w poprzednim paragrafie związkami (1.38) i (1.39).

Podstawiając (2.2) do (2.1) otrzymano

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)}(X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') + \tau_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n^{(1)}(X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') + \frac{(\varrho F)_1}{(EJ)_1} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^{(1)} X_n = \\ &= -\delta(x_1 - d) 2 \left[\frac{(EJ)_2}{(EJ)_1} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n'''(0) T_n^{(2)} + \frac{m_0 + m_2}{(EJ)_1} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(d) \dot{T}_n^{(1)} \right] + \frac{H(x_1)}{(EJ)_1} \sin \nu t, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)} Z_n^{IV} + \tau_2 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n^{(2)} Z_n^{IV} + \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^{(2)} Z_n + \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n^{(1)} X_n(d) = 0. \end{aligned}$$

Dla dalszych obliczeń wyprowadzono pewne związki. W celu uproszczenia zapisu wprowadzono operator $\eta[F_i(x)]$. Działanie tym operatorem polega na pomnożeniu przez funkcję $F_i(x)$, a następnie przecałkowaniu po długości drgającej belki w granicach od zera do l .

Przekształcając (1.22) i działając operatorem $\eta[X_k(x_1)]$ otrzymano

$$(2.4) \quad \int_0^l (X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') X_k dx_1 = k_{1n}^4 \int_0^l X_n X_k dx_1 + 2K_n X_k(d).$$

Warunki brzegowe (1.3) powodują, że

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \int_0^l X_n^{IV} X_k dx_1 &= \int_0^l X_n X_k^{IV} dx_1, \\ \int_0^l X_n'' X_k dx_1 &= \int_0^l X_n X_k'' dx_1. \end{aligned}$$

Stąd można obliczyć

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \int_0^l X_n X_k dx_1 &= -(1 - \delta_{nk}) \frac{2[K_k X_n(d) - K_n X_k(d)]}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \delta_{nk} \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1, \\ \int_0^l (X_n^{IV} - h_1^2 X_n'') X_k dx_1 &= -(1 - \delta_{nk}) \frac{2k_{1n}^4 [K_k X_n(d) - K_n X_k(d)]}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \\ &+ \delta_{nk} k_{1k} \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1 + 2K_n X_k(d). \end{aligned}$$

Przez δ_{nk} oznaczono deltę Kronekera.

Przekształcono (1.12) jak powyżej i zadziałano operatorem $\eta[Z_i(x_2)]$ otrzymując

$$(2.7) \quad \int_0^{l_2} Z_n^{IV} Z_i dx_2 = k_{2n}^4 \int_0^{l_2} Z_n(x_2) Z_i(x_2) dx_2 + k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2.$$

Tym razem warunki brzegowe (1.4) sprawiają, że

$$(2.8) \quad \int_0^{l_2} Z_n^{IV}(x_2) Z_i(x_2) dx_2 = M_{ni} + \int_0^{l_2} Z_i^{IV}(x_2) Z_n(x_2) dx_2,$$

gdzie

$$(2.9) \quad M_{ni} = Z_n'''(l_2) Z_i(l_2) - Z_n''(l_2) Z_i'(l_2) + Z_n'(l_2) Z_i''(l_2) - Z_n(l_2) Z_i'''(l_2).$$

Korzystając z (2.8) i (2.9) obliczono

$$(2.10) \quad \int_0^{l_2} Z_n Z_i dx_2 = (1 - \delta_{ni}) \frac{1}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - \right. \\ \left. - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \delta_{ni} \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2, \\ \int_0^{l_2} Z_n^{IV} Z_i dx_2 = (1 - \delta_{ni}) \frac{k_{2n}^4}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + M_{ni} \right] + \delta_{ni} k_{2i}^4 \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2 + k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2.$$

Po zadziałaniu na pierwsze z równań (2.3) operatorem $\eta[X_k(x_1)]$, a na drugie operatorem $\eta[Z_i(x_2)]$ i uwzględnieniu (2.6) oraz (2.10) otrzymano układ równań różniczkowych wiążących funkcje czasu

$$(2.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \ddot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \dot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} T_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{kn} T_n^{(2)} = \Theta_k \sin \nu t, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{in} \ddot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{in} \dot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{in} T_n^{(2)} + \Pi_{in} \ddot{T}_n^{(1)} = 0.$$

W (2.11) przyjęto oznaczenia

$$(2.12) \quad \alpha_{kn} = -(1 - \delta_{kn}) 2 \frac{(\partial F)_1}{(EJ)_1} \frac{K_k X_n(d) - K_n X_k(d)}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \delta_{kn} \frac{(\partial F)_1}{(EJ)_1} \int_0^l X_k^2 dx_1 + \\ + 2\alpha_{gm} X_n(d) X_k(d), \\ \Gamma_{kn} = -(1 - \delta_{kn}) 2\tau_1 k_{1n}^4 \frac{K_k X_n(d) - K_n X_k(d)}{k_{1n}^4 - k_{1k}^4} + \delta_{kn} \tau_1 k_{1n}^4 \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1 + \\ + 2\tau_1 X_k(d) K_n,$$

(2.12)

[c.d.]

$$\beta_{kn} = \frac{\Gamma_{kn}}{\tau_1},$$

$$\Lambda_{kn} = -2\alpha_g Z_n''''(0) X_k(d),$$

$$\Omega_{in} = (1 - \delta_{in}) \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2 (k_{1n}^4 - k_{1i}^4)} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - \right. \\ \left. - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \delta_{ni} \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2,$$

$$\Lambda_{in} = (1 - \delta_{in}) \frac{\tau_2 k_{2n}^4}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \\ + \delta_{ni} \tau_2 k_{2i}^4 \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2 + \tau_2 k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2,$$

$$E_{in} = \frac{\Lambda_{in}}{\tau_2},$$

$$\Pi_{in} = \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2,$$

$$\Theta_k = \int_0^l H(x_1) X_k(x_1) dx_1.$$

Rozwiązanie równań (2.1) ma postać (2.2), gdzie $T_n^{(1)}(t)$ i $T_n^{(2)}(t)$ podlegają wyznaczeniu z (2.11).

Przy obliczeniach praktycznych wystarczy ograniczyć się do kilku wyrazów sumy, np.

$$(2.13) \quad w(x_1, t) \cong X_{k-1}(x_1) T_{k-1}^{(1)}(t) + X_k(x_1) T_k^{(1)}(t) + X_{k+1}(x_1) T_{k+1}^{(1)}(t),$$

gdzie k jest numerem wyrazu sumy (2.2), dla którego

$$(2.14) \quad \omega_k \cong 2\pi\nu.$$

3. Drgania wymuszone struny z tłumieniem wewnętrznym tłumionej tłumikiem Stockbridge'a

Równania różniczkowe opisujące ruch drgający struny z tłumieniem wewnętrznym tłumionej tłumikiem Stockbridge'a mają postać

$$(3.1) \quad S_0 \tau_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - (\varrho F)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x_1 - d) 2 \left[(EJ)_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} + \right. \\ \left. + (m_0 + m_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} \right] - H(x_1) \sin \nu t,$$

$$(EJ)_2 \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4} + \tau_2 (EJ)_2 \frac{\partial^5 z}{\partial x_2^4 \partial t} + (\varrho F)_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\varrho F)_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x_1=d} = 0.$$

Rozwiązanie przyjęto w postaci

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w(x_1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_1) T_n^{(1)}(t), \\ z(x_2, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x_2) T_n^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Funkcje $X_n(x_1)$ i $Z_n(x_2)$ są funkcjami własnymi zagadnienia drgań swobodnych takiego układu

$$(3.3) \quad X_n(x_1) = \sin \lambda_n x_1 + \sigma_2(x_1 - d) \frac{2K_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n d \sin \lambda_n(d-l),$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} K_n &= -2k_{2n}^3 \frac{(EJ)_2}{S_0} \frac{\eta_n \alpha_n - \gamma_n \vartheta_n}{\varepsilon_n \vartheta_n + \mu_n \alpha_n} - \frac{m_0 + m_2}{S_0} \frac{(EJ)_2}{(\varrho F)_2} k_{2n}^4, \\ \lambda_n &= \omega_n^2 \frac{(\varrho F)_1}{S_0}. \end{aligned}$$

Funkcja $Z_n(x_2)$ jest określona w (1.20). Częstości drgań własnych ω_n są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(3.5) \quad \frac{\lambda}{2K} \sin \lambda l + \sin \lambda d \cdot \sin \lambda(d-l) = 0.$$

Rozwiązanie układu (3.1) sprowadza się więc do określenia funkcji $T_n^{(1)}(t)$ i $T_n^{(2)}(t)$. Są one rozwiązaniem układu równań

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \ddot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{kn} \dot{T}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} T_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{kn} T_n^{(2)} &= \Theta_k \sin \nu t \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{in} \ddot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{in} \dot{T}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_{in} T_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{in} \ddot{T}_n^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

który otrzymano z (3.1) przez odpowiednie przekształcenie. W (3.6) przyjęto oznaczenia

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \alpha_{kn} &= (1 - \delta_{kn}) 2 \frac{(\varrho F)_1}{S_0} \frac{K_n X_k(d) - K_k X_n(d)}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} - \delta_{kn} \frac{(\varrho F)_1}{S_0} \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1 - \\ &\quad - 2 \frac{m_0 + m_2}{S_0} X_n(d) X_k(d), \\ \beta_{kn} &= -2K_n X_k(d) + (1 - \delta_{kn}) 2\lambda_n^2 \frac{K_n X_k(d) - K_k X_n(d)}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} - \delta_{kn} \lambda_k^2 \int_0^l X_k^2(x_1) dx_1, \\ \Gamma_{kn} &= \tau_1 \beta_{kn}, \\ \Lambda_{kn} &= 2 \frac{(EJ)_2}{S_0} Z_n'''(0) X_k(d), \\ \Pi_{in} &= \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} X_n(d) \int_0^l Z_i(x_2) dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_k &= -\frac{1}{S_0} \int_0^l H(x_1) X_k(x_1) dx_1, \\
 \text{[c.d.]} \quad \Omega_{in} &= (1 - \delta_{in}) \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \frac{1}{k_{2n}^4 - k_{2k}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + \right. \\
 &\quad \left. + M_{ni} \right] + \delta_{in} \frac{(\varrho F)_2}{(EJ)_2} \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2, \\
 \Delta_{in} &= \tau_2 \Xi_{in}, \\
 \Xi_{in} &= (1 - \delta_{in}) \frac{k_{2n}^4}{k_{2n}^4 - k_{2i}^4} \left[k_{2i}^4 X_i(d) \int_0^{l_2} Z_n(x_2) dx_2 - k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2 + M_{ni} \right] + \\
 &\quad + \delta_{in} k_{2i}^4 \int_0^{l_2} Z_i^2(x_2) dx_2 + k_{2n}^4 X_n(d) \int_0^{l_2} Z_i(x_2) dx_2.
 \end{aligned}$$

Analityczne wyznaczenie wszystkich częstości i form własnych drgań belek czy strun sprzężonych z tłumikiem Stockbridge'a jest niemożliwe ze względu na przestępny charakter równań (1.35) czy (3.5). Pociąga to za sobą dalsze komplikacje przy wyznaczaniu współczynników w równaniach (2.11) dla belek (3.6) w przypadku strun. To z kolei wiąże się z zagadnieniem znalezienia drgań wymuszonych. W bardzo wielu zagadnieniach praktycznych, w oparciu o przedstawione powyżej rozważania, można uzyskać zadowalające wyniki i stwierdzić w jakim stopniu tłumik Stockbridge'a jest skuteczny. Otóż jeżeli w układzie możliwe są tylko drgania z wysokimi częstościami bez względu na ich charakter, czy to będą drgania wymuszone czy samowzbudne, to wówczas wzory (1.35) i (3.5) ulegają znacznemu uproszczeniu. Ponieważ występujące w (3.5) wyrażenie K [określone w (1.33)] spełnia warunek

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} K = \infty,$$

z dostatecznie dużą więc dokładnością można w miejsce (3.5) przyjąć

$$(3.8) \quad \sin \left[\omega \sqrt{\frac{(\varrho F)_1}{S_0}} d \right] \sin \left[\omega \sqrt{\frac{(\varrho F)_1}{S_0}} (l-d) \right] = 0,$$

co daje bardzo proste ciągi wartości własnych i funkcji własnych. Dla krajowych linii elektroenergetycznych najwyższych napięć najczęściej występujące drgania zawierają się w granicach 10–30 Hz, co odpowiada zakresowi form własnych między 50 a 200. Drgania z tego zakresu stwarzają zagrożenie zmęczeniowe i należy je wytłumiać. Dla realnych linii elektroenergetycznych przyjęcie (3.8) jest więc w pełni uzasadnione. Wzór (3.8) można również uzyskać bezpośrednio z (1.35) dokonując w tym ostatnim przejścia granicznego przy $(EJ)_1$ zdążającym do zera i przyjęciu dużych ω_n .

4. Przykład

W celu szacunkowej oceny przeprowadzonych rozważań policzono przykład liczbowy. Policzono 3 przypadki:

- 1) drgania struny bez tłumika,
- 2) drgania struny z tłumikiem Stockbridge'a I,
- 3) drgania struny z tłumikiem Stockbridge'a II.

Dla prostoty obliczeń wzięto tylko po jednym wyrazie szeregu (3.2)

$$w(x_1, t) \cong X_k(x_1) T_k^{(1)}(t),$$

$$z(x_2, t) \cong Z_k(x_2) T_k^{(2)}(t),$$

a rozwiązań poszukiwano w postaci

$$T_k^{(1)}(t) = A_k \sin \nu t + B_k \cos \nu t,$$

$$T_k^{(2)}(t) = C_k \sin \nu t + D_k \cos \nu t.$$

Jako uzasadnienie takiego podejścia można przyjąć, że rozważa się przypadek rezonansowy i składniki szeregu (3.2) odpowiadające formie rezonansowej będą zdecydowanie przeważać nad pozostałymi. Takie podejście upraszcza znacznie żmudne obliczenia i pozwala oszacować rząd skuteczności tłumienia.

Przy doborze danych starano się zachować, o ile to było możliwe, rzeczywiste parametry przęsła linii wysokiego napięcia i tłumika, z wyjątkiem $(\varrho F)_2$, τ_2 i $(EJ)_2$, których nie udało się uzyskać na podstawie dostępnych materiałów. Wobec czego przyjęto

- a) $\tau_1 = \tau_2$,
- b) $(\varrho F)_1 = (\varrho F)_2$ — dla tłumika I,
 $(\varrho F)_1 = 2(\varrho F)_2$ — dla tłumika II,
- c) $(EJ)_2 = 13 \text{ [kG m}^2\text{]}$ — co odpowiada rzeczywistej sztywności liny.

Odległość punktu podwieszenia tłumika od podpory ustalono wykorzystując fakt, że powinien on być umocowany w brzuscu fali stojącej, która powstanie w strunie.

Dla częstości $\nu = 20 \text{ Hz}$ powstanie 113 półfal, co daje $d = 1,7 \text{ m}$. Wielkość ta pokrywa się z doświadczalnymi danymi BSİPE «Energoprojekt» O/Kraków, który podaje, że optymalna wartość d wynosi $d = 1,5\text{--}2,0 \text{ [m]}$.

Częstość drgań ω_k wyznaczono z równania charakterystycznego (3.5) wykorzystując zależność jaką musi ona spełniać

$$\omega_k \cong 2\pi\nu.$$

Dane wyjściowe oraz wyniki zestawiono w tabl. 1 i 2.

Przez a_k oznaczono

$$a_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

ponieważ

$$T_k^{(1)} = A_k \sin \nu t + B_k \cos \nu t = a_k \sin(\nu t + \varphi),$$

więc przyjęte

$$b_k = a_k \sin \lambda_k d$$

jest amplitudą drgań w punkcie $x = d$, a jej wielkość zależy od skuteczności tłumienia.

Obliczeń dokonano z dokładnością do H , gdzie H oznacza amplitudę wymuszenia.

Tablica 1. Dane wyjściowe

Wielkość	Wymiar	Struna	Tłumik I	Tłumik II
ν	Hz	20	—	—
l	m	400	—	—
S_0	kG	3900	—	—
$(\rho F)_1$	kG m ⁻¹	0,1967	—	—
d	m	1,7	—	—
τ_1	s	0,3782	—	—
J_0	kg m ²	—	0,00231	0,00053
m_0	kg	—	0,780	0,139
l_2	m	—	0,26	0,26
a	m	—	0,02	-0,03
$(\rho F)_2$	kg m ⁻¹	—	0,1967	0,0983
$(EJ)_2$	kG m ²	—	13	13
τ_2	s	—	0,3782	0,3782
ω_k	radian s ⁻¹	126,06	126,03	126,06

Tablica 2. Wyniki

Stała	Wymiar	Struna bez tłumika	Struna z tłumikiem	
			tłumik I	tłumik II
k_{2k}	m ⁻¹	×	3,9612	3,2898
ε_k	l	×	-0,5861	-0,5644
κ_k	l	×	-1,2523	-0,6845
γ_k	l	×	-1,7553	-1,4951
μ_k	kg m s ⁻²	×	457,9541	213,2848
ϑ_k	kg m s ⁻²	×	-418,2535	-284,7983
η_k	kg m s ⁻²	×	-340,9878	-129,8952
A_{2k}	l	×	-0,9353	22,8450
B_{2k}	l	×	1,8394	-16,6524
G_{2k}	l	×	0,9353	-22,8450
D_{2k}	l	×	-0,8394	17,6524
K_k	m ⁻¹	×	-0,3834	5,3683
λ_k	m ⁻¹	0,8838	0,8912	0,8912
α_{kk}	m ⁻¹ s ²	0,0207	-0,0035	1,4575
β_{kk}	m ⁻¹	177,50	55,6028	-22951
Γ_{kk}	m ⁻¹ s ³	67,1305	21,0289	-8675,4780
Ω_{kk}	m ⁻³ s ²	×	-0,0446	-2,0373
Ξ_{kk}	m ⁻³	×	-726,6404	-315,5993 · 10 ²
Δ_{kk}	m ⁻³ s	×	-274,8153	-119,3596 · 10 ²
Π_{kk}	m ⁻³ s ²	×	0,0050	0,0077
Θ_k	m ⁻¹	0,5778 · 10 ⁻³ H	0,1808 · 10 ⁻³ H	6,6414 · 10 ⁻³ H
Λ_{kk}	m ⁻¹	×	0,7739	-10,82888
A_k	l	0,5954 · 10 ⁻⁷ H	0,0286 · 10 ⁻⁷ H	0,0256 · 10 ⁻⁷ H
B_k	l	4,3031 · 10 ⁻⁷ H	0,6825 · 10 ⁻⁷ H	0,0608 · 10 ⁻⁷ H
a_k	l	4,3440 · 10 ⁻⁷ H	0,6827 · 10 ⁻⁷ H	0,0650 · 10 ⁻⁷ H
b_k	l	4,3440 · 10 ⁻⁷ H	0,6816 · 10 ⁻⁷ H	0,0649 · 10 ⁻⁷ H

5. Zakończenie

Skuteczne tłumienie drgań, zwłaszcza w liniach elektroenergetycznych, jest zagadnieniem bardzo ważnym szczególnie dla linii krajowych, gdzie intensywność drgań jest stosunkowo duża i może spowodować zagrożenie zmęczeniowe przewodów.

Z przeprowadzonych rozważań otrzymuje się zależności analityczne między parametrami linii, tłumika, amplitudą i częstotliwością drgań wymuszonych a amplitudą drgań w linii. Z zależności tych, przynajmniej w tej formie w jakiej je uzyskano, nie można, jeżeli chodzi o konkretne rozwiązanie inżynierskie, dobrać optymalnych parametrów tłumika zapewniających eliminację drgań.

Zależności te są bardzo złożone i wyznaczenie w sposób ogólny odpowiednich parametrów zapewniających minimum amplitudy wiąże się z dużymi trudnościami rachunkowymi. Niemniej jednak można w sposób stosunkowo prosty sprawdzić skuteczność danego tłumika. Uczyniono tak w przykładzie liczbowym, gdzie obydwa tłumiki wykazały bardzo dobrą skuteczność tłumienia drgań przy częstotliwości 20 Hz.

Podana metoda jest ogólna i może być stosowana przy dowolnej liczbie tłumików na przeszle.

Literatura cytowana w tekście

1. R. CLAREN, S. DIANA, *Mathematical analysis of transmission line vibration*, Transmissions papers 1967.
2. А. П. Филиппов, *Колебания механических систем*, «Наукова Думка», Киев 1955.
3. F. SALVI, *Opracowanie na temat drgań polskich przewodów i tłumików drgań*, Kraków 1970, skr-53/70 X — 37 654.
4. *Колебания и устойчивость машин*, «Наука», Москва 1968.
5. A. BAR, J. NIZIOŁ, *Wyznaczenie sztywności na zginanie przewodu AFL-8-525*, Mech. Teoret. i Stos., 12 (1974).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕМПФЕРОВ СТОКБРИДЖА ДЛЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И СТРУН

В работе рассматриваются вынужденные колебания свободнолежащей балки растягиваемой с помощью осевой силы S . На балке подвешен демпфер Стокбриджа. Демпфер рассматривается в качестве массы закрепленной на конце упругой балки. Путем применения метода Фурье получена система сопряженных дифференциальных уравнений, из которой определяются собственные функции и собственные значения.

Получено также решение для колебаний струны. Предельный переход в решении для балки приводит к тем же результатам, что и для струны с демпфером. Выведены формулы на амплитуду вынужденных колебаний балки с учетом внутреннего демпфирования для случаев балок с демпфером и без демпфера.

На основе полученных формул можно подобрать параметры демпфера и место его расположения на балке обеспечивающие наилучшее демпфирование колебаний балки.

Полученные результаты иллюстрируются с помощью численного примера с конкретными данными для электроэнергетических линий высокого напряжения.

S u m m a r y

APPLICATION OF STOCKBRIDGE DAMPERS TO THE DAMPING OF STRING
AND BEAM VIBRATIONS

Forced vibrations of a simply supported beam extended by an axial force S are considered. A Stockbridge damper suspended at the beam is considered as a mass attached to its end. Application of the Fourier method leads to a system of coupled differential equations yielding the corresponding eigenfunctions and eigenvalues. Vibrations of a string with a Stockbridge damper are also considered and the result is equivalent to that obtained from the solution for a beam by means of a limiting procedure. The formulae are derived which give the forced vibration amplitude of a beam with internal damping with or without the damper. The results obtained enable us to select the parameters of the damper and its location ensuring its most effective action. The results are illustrated by a numerical example concerning high-tension electric transmission lines.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lipca 1974 r.
