MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 13 (1975)

W SPRAWIE MACIERZY SZTYWNOŚCI I WEKTORA OBCIĄŻEŃ SUPERELEMENTU*)

BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

Artykuł J. WRANIKA [4] omawiający wymienione w tytule zagadnienie zawiera pewne nieścisłości. Ze względu na wagę tematu, dotyczącego jednej z metod rozwiązywania dużych konstrukcji metodą elementów skończonych na maszynach o małych pamięciach, zamierzam zabrać głos w tej sprawie.

1. Cytując monografię ZIENKIEWICZA, WRANIK pisze: *W pracy* [6] *wykazano możliwość eliminacji węzłów wewnętrznych przy zastosowaniu minimalizacji funkcjonału* χ. ZIENKIEWICZ wykorzystuje warunki minimalizacji funkcjonału energii χ jedynie do zbudowania układu równań dla superelementu. Niewiadome odpowiadające węzłom wewnętrznym (węzły grupy b według określeń WRANIKA) eliminowane są przez podział układu równań na bloki i formalne wykorzystanie algebry macierzy, w identyczny sposób, jak czyni to WRANIK przy wyprowadzaniu zależności (4) i (5) [1]. Jest to szczególnie widoczne w pierwszym angielskim wydaniu pracy ZIENKIEWICZA [5] (por. również prace DEMSA [1] i PRZEMIENIECKIEGO [2]).

2. W pracy [4] zamieszczone jest następujące określenie macierzy sztywności i wektora obciążeń superelementu (str. 405): *Macierz sztywności* $\mathbf{K}$ *jest zbiorem sił występujących w węzłach grupy a w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych* $x_a = 1$, *wektor* $\vec{\mathbf{k}}_p$ *zaś zbiorem sił występujących w węzłach superelementu wywolanych siłami zewnętrznymi.* Moim zdaniem, powyższe określenie jest niewystarczające. Jak wiadomo, równania metody elementów skończonych napisane dla dowolnego elementu traktować można jako wzory transformacyjne metody przemieszczeń [3]. Superelementy są szczególnymi przypadkami elementów [5, 6]. Stąd poszczególne wyrazy macierzy superelementu są siłami występującymi w węzłach superelementu[2] w układzie geometrycznie wyznaczalnym w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych tych węzłów. Wyrazy wektora obciążeń superelementu interpretować należy jako siły występujące w węzłach superelementu w układzie geometrycznie wyznaczalnym w wyniku działania obciążenia zewnętrznego. Układem geometrycznie wyznaczalnym dla superelementu jest superelement z zamocowanymi węzłami grupy a.

Zwracam jeszcze uwagę, że bez zamocowania węzłów superelementu nie można obliczyć sił w tych węzłach wywołanych wymuszonymi przemieszczeniami.

3. Z określeń macierzy i wektora obciążeń superelementu zawartych w [4] wynika natychmiast, że macierz $\mathbf{A}_{aa}$ w zależności (8) i wektor $\vec{\mathbf{b}}_a$ w zależności (10) są odpowied-

*) Artykul jest wypowiedzią autora w związku z pracą J. Wranika opublikowaną w MTiS, 3 (1974) s. 401.

1) Numery wzorów i oznaczenia podawane są według pracy Wranika [4].

2) Węzły superelementu, to węzły grupy a (określenia tego używa także Wranik).

nio macierzą sztywności i wektorem obciążeń superelementu[3]. Z czego wynika dalej, że formuły (9) i (13), a więc także wzory (4) i (5) są nieprawdziwe. Z drugiej strony wiemy, że zależności (4) i (5) są słuszne, powstały bowiem na drodze formalnych przekształceń układu równań (1). Wynika stąd wniosek, że przedstawione przez WRANIKA rozumowanie zmierzające do fizycznego zinterpretowania zależności (4) i (5) nie jest poprawne.

4. Można wykazać, że korzystając z uściślonych tutaj określeń macierzy i wektora obciążeń superelementu uzyskuje się w sposób bezpośredni wzory na obliczanie tych wielkości. Wzory te okazują się identyczne z wzorami (4) i (5) otrzymanymi w [4] drogą formalnych przekształceń. Tok postępowania jest następujący:

— Należy zamocować węzły grupy a i obciążyć superelement obciążeniem zewnętrznym a następnie obliczyć siły występujące w tych węzłach. Wektor tych sił jest wektorem obciążeń superelementu.

— Należy uwalniać poszczególne węzły grupy a, wymuszać jednostkowe przemieszczenia tych węzłów i obliczać siły jakie wystąpią w węzłach grupy a. Wartości tych sił są odpowiednimi wyrazami macierzy sztywności superelementu.

Wykonajmy w sposób ogólny opisane powyżej czynności dla superelementu wyodrębnionego z dowolnej konstrukcji. Równania metody elementów skończonych dla tego superelementu mają postać [5]

$$(1)^{4)} \qquad \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{F}}_a \\ \vec{\mathbf{F}}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{x}}_a \\ \vec{\mathbf{x}}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{b}}_a \\ \vec{\mathbf{b}}_b \end{Bmatrix},$$

gdzie przez $\vec{\mathbf{F}}_a$ i $\vec{\mathbf{F}}_b$ oznaczono odpowiednio siły występujące w węzłach grupy a i b. Z uwagi na zrównoważenie węzłów grupy b mamy $\vec{\mathbf{F}}_b \equiv \mathbf{0}$, węzły grupy a zrównoważone zostaną dopiero przy rozpatrywaniu całej konstrukcji [5]. Nadajmy przemieszczeniom x_a wartości równe zeru, co oznacza zamocowanie węzłów grupy a. Rozwiązując układ równań (1) przy przemieszczeniach $x_a = 0$, wyznaczymy przemieszczenia węzłów superelementu wywołane obciążeniem zewnętrznym. W tym celu należy zmodyfikować odpowiednio wektor obciążeń i macierz współczynników przy niewiadomych. Zasady takiej modyfikacji opisane są szczegółowo w pracach [3] i [6]. Tutaj zauważymy tylko, że wprowadzając przemieszczenia i-tego węzła równe $x_i = \alpha$ należy:

— do poszczególnych wyrazów wektora obciążeń dodać pomnożone przez α wyrazy i-tej kolumny, a i-ty wyraz wektora obciążeń należy zastąpić wartością α;

— i-ty wiersz i i-tą kolumnę macierzy współczynników przy niewiadomych należy wyzerować, a na głównej przekątnej postawić liczbę 1. Po wykonaniu takiej modyfikacji dla poszczególnych $x_a = 0$ otrzymamy układ równań

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{x}}_a \\ \vec{\mathbf{x}}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \vec{\mathbf{b}}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{I} \text{ — macierz jednostkowa}),$$

którego rozwiązaniem są wektory:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_b &= -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b, \\ \vec{\mathbf{x}}_a &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

---

[3] Np. dla macierzy $\mathbf{A}_{aa}$ mamy w [4] takie określenie: *macierz kwadratowa utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy a kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy a.*

[4] Numeracja wzorów dotyczy teraz artykułu autora.

Po podstawieniu rozwiązań (3) do równań (1) otrzymamy siły, które występują w poszczególnych węzłach superelementu

$$\left\{\begin{matrix}\vec{\mathbf{F}}_a\\ \vec{\mathbf{F}}_b\end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab}\\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb}\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\mathbf{b}}_a\\ \vec{\mathbf{b}}_b\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{\mathbf{b}}_a - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b\\ \mathbf{0}\end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Stąd wektor obciążeń superelementu, który składa się z sił wywołanych w poszczególnych węzłach grupy a ma postać

$$\vec{\mathbf{k}}_p = \vec{\mathbf{b}}_a - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b. \tag{5}$$

W podobny sposób otrzymamy macierz sztywności superelementu. Należy teraz wyznaczyć siły w węzłach grupy a przy kolejno wymuszanych przemieszczeniach jednostkowych tych węzłów, lecz tym razem bez obciążenia zewnętrznego. Jeżeli mamy s węzłów grupy a, zagadnienie to prowadzi do rozwiązania s układów równań. Zauważmy, że we wszystkich przypadkach zmodyfikowana macierz współczynników przy niewiadomych będzie identyczna, jak w zależności (2). Wynika to z faktu, że wszystkie węzły grupy a mają określone przemieszczenia. Układy równań różnić się będą tylko wektorem wyrazów wolnych. Korzystając z możliwości algebry macierzy układy te rozwiążemy jednocześnie. Po modyfikacji mamy

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{aa}\\ \mathbf{x}_{ba}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{A}_{ba}\end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

W zależności powyższej kolejne kolumny macierzy $\mathbf{x}_{aa}$ i $\mathbf{x}_{ba}$ są przemieszczeniami poszczególnych węzłów superelementu przy wymuszonych jednostkowych przemieszczeniach węzłów grupy a. Poszczególne elementy wektora wyrazów wolnych powstały przez modyfikację tego wektora dla poszczególnych wymuszeń $x_a = 1$ ($\vec{\mathbf{b}}_a = \vec{\mathbf{b}}_b = 0$). Rozwiązując układy równań (6), otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{aa} &= \mathbf{I},\\ \mathbf{x}_{ba} &= -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}.\end{aligned} \tag{7}$$

Podstawiając zależności (7) do (1) otrzymamy siły w poszczególnych węzłach superelementu od wymuszonych przemieszczeń ($\vec{\mathbf{b}}_a = \vec{\mathbf{b}}_b = \mathbf{0}$):

$$\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{aa}\\ \mathbf{F}_{ba}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab}\\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Ostatecznie macierz sztywności superelementu ma postać

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}. \tag{9}$$

Wyprowadzone w ten sposób wzory (5) oraz (9) są identyczne z wzorami otrzymanymi drogą formalnych przekształceń [4, 5, 6]. Przedstawione powyżej postępowanie stanowi zatem fizyczną interpretację tych przekształceń. Wskazuje jednocześnie na praktyczny sposób wykonywania obliczeń macierzy i wektora obciążeń superelementu bezpośrednio z definicji.

Literatura cytowana w tekście

1. K. DEMS, *Wielostopniowa synteza macierzy sztywności*, Mech. Teor. Stos., 4, **11** (1973), 407–415.
2. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, New York 1968.
3. G. RAKOWSKI, *Metoda elementów skończonych w mechanice budowli*, Inż. Bud., 4–6, **28** (1971).
4. J. WRANIK, *Macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu*, Mech. Teoret. Stos., 3, **12** (1974), 401–405.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, London 1967.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Warszawa 1972.

Резюме

К ВОПРОСУ О МАТРИЦЕ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРЕ НАГРУЗОК СВЕРХЭЛЕМЕНТА

В работе обращается внимание на неточности содержащиеся в работе [4]. Непосредственно из определения выводятся формулы на матрицу жесткости и вектор нагрузок сверхэлемента.

Summary

TO THE PROBLEMS OF STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTOR OF A SUPERELEMENT

Certain incorrect results occurring in paper [4] are pointed out. The formulae for stiffness matrices and load vectors of a superelement are derived directly from their definitions.

AKADEMIA ROLNICZA W POZNANIU

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 grudnia 1974 r.