

## O WARUNKU PLASTYCZNOŚCI HUBERA-MISESA

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

Warunek, czyli kryterium plastyczności, należy do podstawowych pojęć teorii plastyczności. Rozważania dotyczące warunków plastyczności znajdziemy w każdym bez wyjątku podręczniku poświęconym tej teorii. Jednym z najprostszych kryteriów osiągnięcia stanu uplastycznienia, a równocześnie od wielu lat cieszącym się uznaniem i najpowszechniej wykorzystywanym, jest warunek energii odkształcenia postaciowego. Autorzy podręczników i prac z tej dziedziny nazywają go różnie, np.: warunkiem HUBERA, MISESA, LEVY'EGO, HENCKY'EGO, H—M—H itp. Również w sposób niejednolity traktowane są zasługi uczonych, których prace są fundamentalne dla rozwoju teorii plastyczności. Kryterium energii odkształcenia postaciowego sformułował M. T. HUBER, niestety do obecnej chwili jego zasługi są często pomijane milczeniem, pomniejszane lub przeinaczane.

Dlatego przeanalizujmy, co piszą najwybitniejsi autorzy monografii i podręczników z dziedziny teorii plastyczności, uczeni o światowej sławie, i porównajmy z prawdą historyczną.

W świetnej monografii W. W. SOKOŁOWSKIEGO [27] znajdziemy na ss. 43 i 44 stwierdzenia, że warunek stałej intensywności dewiatora naprężenia został podany przez M. T. HUBERA i R. MISESA, a interesującą, energetyczną interpretację podał H. HENCKY. Zarówno pierwsze, jak i drugie zdanie nie jest ściśle. M. T. HUBER nie podał warunku stałej intensywności dewiatora naprężenia, a interpretacja HENCKY'EGO nie była pierwsza. Tytuł pracy HUBERA został podany w tłumaczeniu niemieckim, wynika z niego zresztą wyraźnie, o jaką hipotezę chodzi (właściwej pracy odkształcenia postaciowego). Również przypisywanie F. SCHLEICHEROWI [26], że wprowadził naprężenia ośmiościenne mija się z prawdą.

W znanym podręczniku L. M. KACZANOWA [17] znajdziemy w omówieniu «warunku stałości intensywności naprężeń stycznych (warunek Misesa)» uwagę następującą: «*okazało się później, że jeszcze w roku 1904 Huber zaproponował warunek, bliski warunkowi (10.1)*». L. M. KACZANOW pisze również, że pewne trudności matematyczne związane z warunkiem TRESCI doprowadziły von MISESA do myśli zastąpienia sześciobocznego graniastosłupa opisanym walcem kołowym (było tak istotnie).

W. S. LENSKIJ [19] kryterium energii odkształcenia postaciowego nazywa warunkiem MISESA-HENCKY'EGO (np. s. 58 część I). Podobną nazwę stosują HOFFMANN i SACKS [11]. Autorzy polscy nazywają kryterium, o którym mowa, na ogół warunkiem HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO (np. [18, 23]). W Encyklopedii Techniki, tom I, s. 270 [24], znajdziemy stwierdzenie, że «*konceptję wykorzystania pojęcia energii odkształcenia postaciowego jako*

*kryterium plastyczności przedstawili później R. von Mises i H. Hencky*». Otóż MISES nie rozpatrywał energii odkształcenia postaciowego. Przy omawianiu hipotezy niezmienników nazwisko MISESA jest natomiast pominięte, mimo że był pierwszy, który wykorzystał niezmiennik dewiatora naprężenia do sformułowania warunku plastyczności. Mijałoby się z celem wyliczanie wszystkich prac i książek, w których z różnych względów pomija się nazwisko HUBERA. W dalszej części tego artykułu postaramy się wyjaśnić, na czym polegają zasługi poszczególnych autorów podstawowych prac, które doprowadziły do sformułowania warunku plastyczności energii odkształcenia postaciowego i innych warunków, matematycznie równoważnych.

R. von MISES wprowadził warunek plastyczności, starając się zastąpić «dokładny» warunek TRESCI warunkiem przybliżonym i nie wykazującym niedogodności wynikających z nieciągłości pierwszej pochodnej w wierzchołkach sześcioboku TRESCI. Największa różnica przybliżenia sześcioboku TRESCI elipsą MISESA nie przekracza 15%. Dopiero wyniki doświadczeń utwierdziły MISESA w przekonaniu, że jego «przybliżony» warunek może być bliższy danym eksperymentalnym i może być traktowany jako samodzielne kryterium. R. von MISES sformułował warunek plastyczności w postaci równania  $J_2 = k^2$ , gdzie  $J_2$  jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia. Jak pisze W. PRAGER i Ph. G. HODGE [25], wydawało się wtedy, że warunek ten ma charakter abstrakcyjny i starano się odkryć fizyczne znaczenie niezmiennika. Ponieważ drugi niezmiennik dewiatora naprężenia ma wymiar kwadratu naprężenia, A. NADAI [22] założył, że fizyczne znaczenie musi mieć pierwiastek kwadratowy drugiego niezmiennika. Wychodząc z tego założenia, A. NADAI znalazł taką płaszczyznę i takie naprężenia w ośrodku poddanym działaniu naprężeń, że z dokładnością do stałej, pierwiastek kwadratowy drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia jest równy tym naprężeniom. Okazało się, że płaszczyzna taka jest symetrycznie nachylona do kierunków głównych, a ponieważ płaszczyzn takich jest osiem, powstaje symetryczny ośmiościan złożony z trójkątów równobocznych. Kwadrat całkowitego naprężenia działającego na powierzchnię ośmiościanu, czyli naprężenia ośmiościennego<sup>\*)</sup>, jest równy kwadratowi średniej wartości naprężeń głównych, kwadrat ośmiościennego naprężenia stycznego natomiast równa się 4/9 sumy kwadratów głównych naprężeń stycznych. Ponadto naprężenia normalne na płaszczyźnie ośmiościanu są średnią wartością naprężeń głównych, a styczne naprężenia ośmiościenne są dokładnie równe intensywności dewiatora naprężenia, gdzie pod tym terminem rozumie się kwadratowy pierwiastek średniej wartości kwadratów składowych głównych dewiatora naprężenia

$$\tau_{\text{ośm}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}.$$

H. HENCKY, nie znając prac M. T. HUBERA [12] i [13], podał inną interpretację fizyczną [9], stwierdzając, że praca powodująca zmianę postaci, czyli energia odkształcenia postaciowego, jest proporcjonalna do drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia pomnożonego przez odwrotność podwojonego modułu odkształcenia postaciowego (inaczej mo-

<sup>\*)</sup> Pod wpływem, zapewne, dosłownego tłumaczenia z literatury rosyjskiej przeniknęła ostatnio do piśmiennictwa polskiego nazwa «oktaedr», zamiast ustalonego terminu ośmiościan i «naprężenia oktaedryczne», zamiast naprężenia ośmiościenne.

dułu KIRCHHOFFA). Interpretacja HENCKY'EGO pochodzi z 1924 r., a praca A. NADAI'EGO z 1937 r.

R. HILL, w swojej monografii [10], podaje chyba najprecyzyjniejsze omówienie historii kryterium, pisząc: «fizyczną interpretację warunku Misesa podał Hencky (1924), wykazując, że płynięcie zaczyna się wtedy, gdy energia odkształcenia postaciowego osiąga wartość krytyczną». I dalej: «kryterium Misesa zostało w pewnym stopniu poprzedzone przez Hubera (1904 r.) w Polsce, w pracy, która nie wzbudziła zainteresowania przez prawie dwadzieścia lat po jej opublikowaniu. Huber rozróżniał dwa przypadki w zależności od tego czy hydrostatyczna składowa naprężenia jest rozciągająca, czy też ściskająca. W drugim przypadku przyjmował, że płynięcie określone jest sprężystą energią odkształcenia postaciowego; w pierwszym natomiast, że zależy od całkowitej energii sprężystej (tak, jak to przyjmowali E. Beltrami [1] i B. G. Haigh [7]). «Nie jest jasne czy Huber myślał o plastycznym płynięciu, czy o kruchym pękaniu» (koniec cytatu). Powyższy cytat z monografii R. HILLA należy skomentować następująco: otóż pomysł polegający na rozróżnieniu dwóch przypadków w zależności od znaku hydrostatycznej składowej naprężenia rzeczywiście pochodzi od M. T. HUBERA, nie był jednak przez niego opublikowany. W oryginalnych pracach z lat 1903 i 1904 jest mowa tylko o hipotezie energii odkształcenia postaciowego ([12, 13]). Modyfikacja kryterium, o której pisze R. HILL, została prawdopodobnie zaczerpnięta z książki A. FÖPPLA [5], który opublikował ją, jak wspomina HUBER, pod tytułem „Die Annahme von Huber”, na podstawie korespondencji prywatnej z HUBEREM. Z kolei o tym, czy HUBER myślał o plastycznym płynięciu czy o kruchym pękaniu jasno wynika z opublikowanych prac.

F. SCHLEICHER w pracy [26], cytowanej przez wielu autorów, rozróżnia wyraźnie (w 1926 r.), w punkcie 8 pracy, warunek HUBERA (i tak go nazywa) od hipotezy BELTRAMIEGO i pewnej wersji podanej przez B. P. HAIGHA.

Warunek R. von MISESA niektórzy autorzy, np. H. GEIRINGER [4], nazywają warunkiem «kwadratowym», w odróżnieniu od «liniowego» warunku TRESCI. Jak wspomnieliśmy powyżej, celem MISESA było znalezienie takiego warunku, który aproksymowałby warunek TRESCI, usuwając zarazem nieciągłości pochodnej. Podobny sposób myślenia MISES zademonstrował jeszcze raz, wiele lat później w pracy z 1948 r. Okazało się bowiem w przypadku dwuwymiarowym, że w zależności od położenia punktu na krzywej przedstawiającej «kwadratowy» warunek plastyczności zagadnienie sprowadza się do hiperbolicznego, parabolicznego bądź też eliptycznego. Ponieważ powoduje to trudności matematyczne, R. von MISES zaproponował po raz drugi przybliżenie warunku TRESCI, tym razem dwoma parabolami, z których każda przechodzi przez dwa wierzchołki sześcioboku TRESCI leżące na osiach naprężeń głównych. Zaletą tak ustawionego kryterium plastyczności dla przypadku dwuwymiarowego jest hiperboliczność rozwiązania we wszystkich punktach krzywej.

M. T. HUBER zajmuje się, w swoich podstawowych pracach [12] i [13], wytyczeniem materiału i hipotezami pozwalającymi określić jego osiągnięcie. Autor utożsamia wytyczenie materiału z niebezpieczeństwem pęknięcia i stwierdza: «wytyczenie materiału mierzy się właściwą pracą odkształcenia». Rozpatrując następnie potencjał sprężystości M. T. HUBER pisze wyraźnie w p. 7 swojej pracy z 1904 r.: «w praktyce technicznej nie dopuszczamy z reguły odkształceń poza granicą sprężystości, chodzi nam przeto nie tyle o niebezpie-

*czeństwo pęknięcia, ile o niebezpieczeństwo przekroczenia granicy sprężystości, które według wszelkiego prawdopodobieństwa mierzy również właściwa praca odkształcenia», i dalej: «Używając wyrażenia granica sprężystości, mam obecnie i w dalszym ciągu na myśli granicę stanu napięcia, przy którym rozpoczyna się płynięcie ciał ciągliwych (plastycznych), a więc to, co Niemcy nazywają «Streckgrenze».*

Przegląd prac źródłowych pozwala stwierdzić zatem co następuje:

1. Pomysł zastosowania potencjału sprężystego jako miary wyężenia pochodzi od E. BELTRAMIEGO [1].

Okazało się później z listów do W. THOMSONA, że J. C. MAXWELL [30] zasugerował w nich wykorzystanie wyrażenia na energię sprężystą przy wyznaczaniu krytycznej wartości naprężeń złożonych. Wykazał on (patrz [29]), że energię sprężystą można rozłożyć na energię objętościową i energię odkształcenia postaciowego i stwierdził: *«mam poważne podstawy do przekonania, że gdy (energia odkształcenia postaciowego) osiągnie pewną granicę to element ulegnie zniszczeniu. Jestem pierwszym, który pisze na ten temat, nigdy nie widziałem żadnych badań dotyczących następującego problemu: znamy odkształcenia mechaniczne elementu w trzech kierunkach, kiedy ulegnie on zniszczeniu?»*. Do zagadnienia tego MAXWELL już nie powrócił, a jego idee stały się znane dopiero po opublikowaniu listów. Fakt ten przypomniał mi p. doc. dr Stanisław STANISŁAWSKI z Politechniki Poznańskiej na zebraniu naukowym PTMTS.

2. H. von HELMHOLTZ [8] wydzielił pracę odkształcenia objętościowego ze wzoru na potencjał sprężysty.

3. M. T. HUBER pierwszy sformułował kryterium odkształcenia postaciowego jako miarę wyężenia, utożsamiając je (w zależności od badanego materiału) z osiągnięciem granicy plastyczności. Nie odpowiada więc prawdzie, że jest niejasne, czy HUBER myślał o plastycznym płynięciu, czy też nie. Priorytet HUBERA był znany jeszcze w latach dwudziestych, zwłaszcza w Niemczech, a prawdopodobnie znacznie wcześniej kilku wybitnym uczonym, z którymi M. T. HUBER utrzymywał kontakt korespondencyjny.

Według świadectwa M. T. HUBERA również praca R. von MISESA z 1913 r. została zapomniana aż do prac H. HENCKY'EGO z 1924 r. i I Kongresu Mechaniki Technicznej w Delft, również w 1924 r. Zarówno na I, jak i II Kongresie (w Zurychu, 12 - 17 IX 1926) odbyła się dyskusja na temat hipotez wyężenia z udziałem M. T. HUBERA. Na III Kongresie w Sztokholmie (24 - 29 VIII 1930) R. von MISES wygłosił referat generalny, w którym stwierdził, że jego warunek plastyczności różni się od warunku HUBERA. Nieporozumienie polegało znowu na tym, że MISES oparł się na wspomnianej powyżej książce A. FÖPPLA [5], nie znając tekstu prac Hubera w języku polskim. Wypowiedź MISESA została sprostowana przez M. T. HUBERA, gdyż liczbowo i w postaci wzoru warunki się nie różnią.

4. R. von MISES, wychodząc z przesłanek natury matematycznej, nie znał interpretacji fizycznej, a może po prostu o nią się nie troszczył. Zauważył ją dopiero H. HENCKY [9]. Interesujące jest, że M. T. HUBER wyszedł właśnie z przesłanek natury fizycznej pokrywających się dokładnie z późniejszą o 21 lat interpretacją H. HENCKY'EGO. Oryginalnym osiągnięciem MISESA jest wprowadzenie do rozważań dotyczących warunku plastyczności drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia. Zarówno R. von MISES, jak i H. HENCKY wywarli duży wpływ na rozwój teorii plastyczności, podając rozwiązania szeregu zagadnień szczegółowych. M. T. HUBER reprezentował powszechny wtedy pogląd, że osiągnięcie

granicy plastyczności jest, poza wyjątkowymi przypadkami, tak samo niedopuszczalne, jak popełkanie części konstrukcyjnej. Fakt ten zaważył zapewne na braku prac, jego autorstwa, z dziedziny teorii plastyczności i częstym pomijaniu jego priorytetu.

5. Mimo że wzór matematyczny wyrażający warunek plastyczności jest taki sam, jego interpretacja fizyczna może być różna. Jeżeli go nazwać kryterium energii odkształcenia postaciowego, to zarówno priorytet, jak i interpretacja fizyczna należą do M. T. HUBERA. Kryterium drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia należy do R. von MISESA. Warto tu wspomnieć, że W. BURZYŃSKI [2] rozwinął w Polsce podejście MISESA w swojej hipotezie niezmienników.

Interpretacja A. NADAI'EGO upoważnia do nazwania warunku — kryterium intensywności naprężeń stycznych lub kryterium stycznego naprężenia ośmiościennego.

Ponieważ dwa najważniejsze i różne podejścia przy sformułowaniu warunku należały do M. T. HUBERA i R. von MISESA, wybraliśmy nazwę w tytule niniejszej pracy: warunek HUBERA-MISESA.

Fakt, że wszystkie powyżej wymienione interpretacje prowadzą do tego samego wzoru matematycznego świadczy o bogactwie teorii i jej pięknie.

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. BELTRAMI, *Rend. Inst. Lomb.*, **18** (1885), 704.
2. W. BURZYŃSKI, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Lwów 1928.
3. A. C. ERINGEN, *Nonlinear theory of continuum media*, McGraw-Hill, 1962.
4. A. M. FREUDENTHAL, H. GEIRINGER, *The mathematical theories of the inelastic continuum*, Handbuch der Physik, tom VI, Springer-Verlag, 1958; także Moskwa 1962.
5. A. FÖPPL, *Vorlesungen über Technische Mechanik*.
6. Y. C. FUNG, *Foundations of solid mechanics*, Prentice Hall Inc. 1965; PWN, Warszawa 1969.
7. B. P. HAIGH, *Brit. Ass. Reports, Section G*. 1919.
8. H. von HELMHOLTZ, *Dynamik kontinuierlich verbreiteten Massen*, Lipsk 1902.
9. H. HENCKY, *Zeits. ang. Math. u. Mech.*, **4** (1924), 323.
10. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, 1950; Techizdat, Moskwa 1956.
11. O. HOFFMANN, G. SACKS, *Introduction to the theory of plasticity for engineers*, McGraw-Hill, 1953; Maszgiz, Moskwa 1957.
12. M. T. HUBER, *O podstawach teorii wytrzymałości*, Prace matematyczno-fizyczne, tom XV, Warszawa 1903.
13. M. T. HUBER, *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1904; także Pisma, tom II, PWN, Warszawa 1956.
14. M. T. HUBER, III Kongres Międzynarodowy Mechaniki Technicznej w Sztokholmie 24—29 VIII 1930, Przegląd Techniczny, Warszawa 1931.
15. M. T. HUBER, *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, SIMP, Warszawa 1948.
16. A. A. ИЛЮШИН, *Пластичность*, Гостехиздат 1948.
17. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Наука, Москва 1969.
18. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność, wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
19. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Введение в теорию пластичности*, т. I, 1968, т. II, 1969, Изд. Моск. Ун. М. В. Ломоносова.
20. H. LIPPMANN, *Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens*, Acta Mechanica, **8** (1969), 255—284.
21. R. von MISES, *Göttinger Nachrichten, Math-Phys. Klasse*, 582 - 592, 1913.
22. A. NADAI, *Journ. Applied Physics*, **8** (1937), 205 - 213.

23. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, *Teoria Plastyczności*, praca zbiorowa, PWN, Warszawa. 1965
24. *Podstawy Techniki*, tom I z serii Encyklopedia Techniki, WNT, Warszawa 1974.
25. W. PRAGER, Ph. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley & Sons, 1951; także I. L. Moskwa 1956.
26. F. SCHLEICHER, *Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung)*, VDI Verlag, ZaMM, 6 (1926), 199 - 216.
27. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Москва 1968.
28. T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, 1961; także Mir, Moskwa 1964.
29. S. P. TIMOSHENKO, *Historia wytrzymałości materiałów* (tłum. z ang. Z. i H. OLESIAKOWIE), Arkady, 1966, s. 389 i 390.
30. Proceedings of Cambridge Phil. Soc., część 5, tom 32, listy J. C. Maxwella do W. Thomsona.

UNIwersytet Warszawski  
Instytut Mechaniki

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 maja 1975 r.*

---