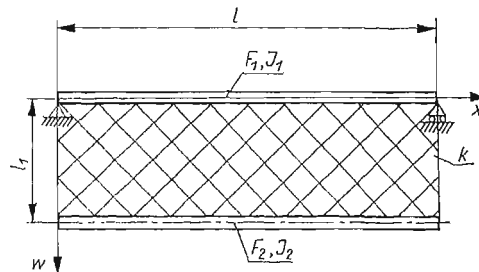


DRGANIA POPRZECZNE UKŁADU DWÓCH BELEK POŁĄCZONYCH
ELEMENTEM SPRĘŻYSTYM

ZBIGNIEW ONISZCZUK (KRAKÓW)

W pracy rozpatrzono poprzeczne drgania układu złożonego z dwóch belek pryzmatycznych połączonych elementem sprężystym. Górna belka oparta jest końcami na sztywnych podporach, dolna zaś jest podwieszona na pierwszej za pomocą sprężystego elementu na całej długości belki (rys. 1).



Rys. 1. Model układu drgającego

W przybliżeniu model ten odpowiada niektórym typom suwnic względnie mostów, ponieważ w takich konstrukcjach dość rzadko spotyka się przypadek, aby dźwigary nośne miały stałe przekroje poprzeczne, a takie zostały przyjęte w modelu. Kratowe (lub inne) połączenie dźwigarów zostało zastąpione liniowym elementem sprężystym.

Dla tak zbudowanego modelu rozpatrzimy drgania swobodne belek oraz drgania wymuszone, wywołane harmonicznymi zmiennymi siłami skupionymi, przemieszczającymi się ze stałą prędkością po belce dolnej.

Pracę należy traktować jako wstępny krok do szerszej analizy postawionego problemu. Analiza ta będzie przeprowadzona dla różnych sposobów podparcia belki górnej i różnych rodzajów obciążeń.

1. Drgania swobodne

Przyjmujemy następujące założenia: a) układ nie jest tłumiony, b) belki mają stałe przekroje poprzeczne i stałe momenty bezwładności.

Oznaczenia:

- l całkowita długość belki,
 F_1, F_2, J_1, J_2 przekroje poprzeczne i momenty bezwładności belek,
 $w_1 = w_1(x, t)$ przemieszczenie przekrojów górnej belki,
 $w_2 = w_2(x, t)$ przemieszczenie przekrojów dolnej belki,
 x współrzędna określająca położenie danego przekroju,
 t czas,
 k współczynnik sprężystości elementu sprężystego,
 ρ gęstość materiału belek,
 E moduł Younga,
 l_1 rozstaw belek.

Równania ruchu układu (rys. 1) mają następującą postać:

$$(1) \quad EJ_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k(w_2 - w_1) = 0,$$

$$(2) \quad EJ_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \rho F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k(w_2 - w_1) = 0.$$

Warunki brzegowe:

$$(3) \quad \begin{aligned} w_1(0, t) = w_1(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \Big|_{(0, t)} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \Big|_{(l, t)} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \Big|_{(0, t)} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \Big|_{(l, t)} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \Big|_{(0, t)} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \Big|_{(l, t)} = 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe:

$$(4) \quad \begin{aligned} w_1(x, 0) = f_1(x), \quad w_2(x, 0) = f_2(x), \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} \Big|_{(x, 0)} = g_1(x), \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} \Big|_{(x, 0)} = g_2(x). \end{aligned}$$

Układ równań (1), (2) sprowadzamy do postaci:

$$(5) \quad a_1^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - b_1(w_2 - w_1) = 0,$$

$$(6) \quad a_2^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + b_2(w_2 - w_1) = 0,$$

gdzie

$$(7) \quad a_i^2 = \frac{EJ_i}{\rho F_i}, \quad b_i = \frac{k}{\rho F_i}, \quad i = 1, 2.$$

Układ równań (5), (6) rozwiązujemy metodą Fouriera, przewidując rozwiązania w postaci:

$$(8) \quad w_i(x, t) = X_i(x)T(t), \quad i = 1, 2.$$

Podstawiając (8) do (5), (6) otrzymujemy

$$\frac{X_1^{(IV)}}{X_1} + \frac{b_1}{a_1^2} - \frac{b_1 X_2}{a_1^2 X_1} = -\frac{T''}{a_1^2 T} = \lambda_1^4,$$

$$\frac{X_2^{(IV)}}{X_2} + \frac{b_2}{a_2^2} - \frac{b_2 X_1}{a_2^2 X_2} = -\frac{T''}{a_2^2 T} = \lambda_2^4,$$

gdzie λ_1^4, λ_2^4 oznaczają stałe rozdzielania zmiennych.

Ostatecznie po rozdzielaniu równań mamy

$$(9) \quad T'' + a_1^2 \lambda_1^4 T = 0, \quad T'' + a_2^2 \lambda_2^4 T = 0$$

oraz

$$(10) \quad a_1^2 X_1^{(IV)} + (b_1 - a_1^2 \lambda_1^4) X_1 - b_1 X_2 = 0,$$

$$a_2^2 X_2^{(IV)} + (b_2 - a_2^2 \lambda_2^4) X_2 - b_2 X_1 = 0.$$

Funkcja czasu (całka ogólna równań (9)) ma postać

$$(11) \quad T = C \cos \omega t + D \sin \omega t,$$

gdzie $\omega = a_1 \lambda_1^2 = a_2 \lambda_2^2$ oznacza częstość drgań własnych układu.

Rozwiązania układu równań (10) poszukujemy w postaci

$$(12) \quad X_1 = A_1 e^{rx}, \quad X_2 = A_2 e^{rx}.$$

Po podstawieniu (12) do (10) i przyrównaniu do zera wyznacznika zbudowanego ze współczynników występujących przy stałych A_1, A_2 otrzymujemy równanie

$$a_1^2 a_2^2 r^8 + [a_1^2 (b_2 - \omega^2) + a_2^2 (b_1 - \omega^2)] r^4 + (b_1 - \omega^2)(b_2 - \omega^2) - b_1 b_2 = 0,$$

które z uwagi na oznaczenia (7) przyjmuje postać

$$(13) \quad E^2 J_1 J_2 r^8 + [E J_1 (k - \omega^2 \rho F_2) + E J_2 (k - \omega^2 \rho F_1)] r^4 + (k - \omega^2 \rho F_1)(k - \omega^2 \rho F_2) - k^2 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe względem r^4 .

A zatem

$$(14) \quad r_{1,2}^4 = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{E} \left(k \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) - \omega^2 \rho \left(\frac{F_1}{J_1} + \frac{F_2}{J_2} \right) \right) \right] + \right. \\ \left. \mp \sqrt{\left[\frac{1}{E} \left(k \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) - \omega^2 \rho \left(\frac{F_1}{J_1} + \frac{F_2}{J_2} \right) \right) \right]^2 - 4 \frac{\omega^2 \rho}{E^2 J_1 J_2} [\omega^2 \rho F_1 F_2 - k(F_1 + F_2)]} \right\}.$$

Obydwa pierwiastki r_1^4 i r_2^4 są dodatnie, jeżeli zachodzi nierówność

$$(15) \quad \frac{\omega^2 \rho F_1 F_2}{F_1 + F_2} > k.$$

Warunek (15) eliminuje z rozważań mało interesujący przypadek drgań belek jako ciał sztywnych, połączonych elementem sprężystym, oraz przypadek, kiedy drgania belek nie są w ogóle możliwe.

Oznaczmy

$$r_1^4 = k_1^4, \quad r_2^4 = k_2^4.$$

Równanie charakterystyczne (13) ma osiem pierwiastków:

$$(16) \quad +k_1; -k_1; +ik_1; -ik_1; +k_2; -k_2; +ik_2; -ik_2,$$

gdzie

$$i = \sqrt{-1}.$$

Całkami ogólnymi równań (10) są funkcje:

$$(17) \quad \begin{aligned} X_1 &= C_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + C_3 \sin(k_1 x) + C_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + C_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + C_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + C_7 \sin(k_2 x) + C_8 \cos(k_2 x), \\ X_2 &= D_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + D_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + D_3 \sin(k_1 x) + D_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + D_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + D_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + D_7 \sin(k_2 x) + D_8 \cos(k_2 x), \end{aligned}$$

gdzie stałe C_i, D_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) są związane zależnościami wynikającymi z równań (10):

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{D_i}{C_i} &= \frac{EJ_1 k_1^4 + (k - \omega^2 \rho F_1)}{k} = \frac{k}{EJ_2 k_1^4 + (k - \omega^2 \rho F_2)} = \alpha, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \frac{D_j}{C_j} &= \frac{EJ_1 k_2^4 + (k - \omega^2 \rho F_1)}{k} = \frac{k}{EJ_2 k_2^4 + (k - \omega^2 \rho F_2)} = \beta, \quad j = 5, \dots, 8; \end{aligned}$$

α i β są liczbami rzeczywistymi. Mamy więc tylko osiem dowolnych stałych rzeczywistych. Stałe wyznaczamy wykorzystując warunki brzegowe (3). Otrzymujemy jednorodny układ ośmiu równań algebraicznych:

$$(19) \quad \begin{aligned} C_2 + C_4 + C_6 + C_8 &= 0, \\ k_1^2 C_2 - k_1^2 C_4 + k_2^2 C_6 - k_2^2 C_8 &= 0, \\ \alpha k_1^2 C_2 - \alpha k_1^2 C_4 + \beta k_2^2 C_6 - \beta k_2^2 C_8 &= 0, \\ \alpha k_1^3 C_1 - \alpha k_1^3 C_3 + \beta k_2^3 C_5 - \beta k_2^3 C_7 &= 0, \\ C_1 \operatorname{sh} z_1 + C_2 \operatorname{ch} z_1 + C_3 \sin z_1 + C_4 \cos z_1 + \\ + C_5 \operatorname{sh} z_2 + C_6 \operatorname{ch} z_2 + C_7 \sin z_2 + C_8 \cos z_2 &= 0, \\ k_1^2 C_1 \operatorname{sh} z_1 + k_1^2 C_2 \operatorname{ch} z_1 - k_1^2 C_3 \sin z_1 - k_1^2 C_4 \cos z_1 + \\ + k_2^2 C_5 \operatorname{sh} z_2 + k_2^2 C_6 \operatorname{ch} z_2 - k_2^2 C_7 \sin z_2 - k_2^2 C_8 \cos z_2 &= 0, \\ \alpha k_1^2 C_1 \operatorname{sh} z_1 + \alpha k_1^2 C_2 \operatorname{ch} z_1 - \alpha k_1^2 C_3 \sin z_1 - \alpha k_1^2 C_4 \cos z_1 + \\ + \beta k_2^2 C_5 \operatorname{sh} z_2 + \beta k_2^2 C_6 \operatorname{ch} z_2 - \beta k_2^2 C_7 \sin z_2 - \beta k_2^2 C_8 \cos z_2 &= 0, \\ \alpha k_1^3 C_1 \operatorname{ch} z_1 + \alpha k_1^3 C_2 \operatorname{sh} z_1 - \alpha k_1^3 C_3 \cos z_1 + \alpha k_1^3 C_4 \sin z_1 + \\ + \beta k_2^3 C_5 \operatorname{ch} z_2 + \beta k_2^3 C_6 \operatorname{sh} z_2 - \beta k_2^3 C_7 \cos z_2 + \beta k_2^3 C_8 \sin z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań tego układu jest zerowanie się wyznacznika utworzonego ze współczynników występujących przy poszukiwanych stałych:

$$(21) \quad \begin{aligned} d^2 \operatorname{sh} z_1 \sin z_1 (1 - \operatorname{ch} z_2 \cos z_2) - \operatorname{sh} z_2 \sin z_2 (1 - \operatorname{ch} z_1 \cos z_1) + \\ + d \operatorname{ch} z_2 [(\operatorname{sh} z_1 - \sin z_1)(\operatorname{sh} z_2 \cos z_2 - \operatorname{ch} z_2 \sin z_2) - (\operatorname{sh} z_2 - \\ - \sin z_2)(\operatorname{sh} z_1 \cos z_1 - \operatorname{ch} z_1 \sin z_1)] = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$z_1 = k_1 l, \quad z_2 = k_2 l, \quad d = \frac{\beta k_2^3}{\alpha k_1^3}.$$

Z powyższego równania otrzymamy ciąg rozwiązań na częstości drgań własnych ω_n (k_1, k_2 są funkcjami ω).

Z wyrażenia (14) obliczymy ciągi wartości dla k_{1n}, k_{2n} .

Z układu równań (19), (20) dla określonej częstości ω_n wyznaczamy stałe C_{in} ($i = 1, 2, \dots, 8$) w funkcji jednej ze stałych, np. C_{7n} :

$$C_{1n} = R_n C_{7n}, \quad C_{2n} = C_{4n} = -C_{6n} = -C_{8n} = G_n C_{7n}, \quad C_{3n} = N_n C_{7n}, \quad C_{5n} = K_n C_{7n},$$

gdzie współczynniki R_n, G_n, N_n, K_n są stałe dla określonej częstości ω_n (¹).

Ostatecznie mamy następujące postacie drgań głównych (17) dla określonej częstości ω_n :

$$(22) \quad \begin{aligned} X_{1n} &= C_{7n} \{ [R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)] + \\ &\quad + [K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)] \}, \\ X_{2n} &= C_{7n} \{ \alpha_n ([R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)]) + \\ &\quad + \beta_n ([K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)]) \}, \end{aligned}$$

gdzie wolno przyjąć $C_{7n} = 1$.

Rozwiązania (8) rozpatrywanego problemu wyrażają się następującymi szeregami:

$$(23) \quad \begin{aligned} w_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \times \\ &\quad \times \{ [R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)] + \\ &\quad + [K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)] \}, \\ w_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \times \\ &\quad \times \{ \alpha_n ([R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)]) + \\ &\quad + \beta_n ([K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)]) \}, \end{aligned}$$

gdzie stałe A_n, B_n wyznaczamy z warunków początkowych wykorzystując warunek ortogonalności postaci drgań głównych, który w tym przypadku ma postać

$$(24) \quad \int_0^l [F_1 X_{1i} X_{1j} + F_2 X_{2i} X_{2j}] dx = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Z warunków początkowych (4) mamy:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_{1n}, & f_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_{2n}, \\ g_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n X_{1n}, & g_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n X_{2n}. \end{aligned}$$

(¹) Zgodnie z zasadami rozwiązywania układów równań jednorodnych należałoby sprawdzić z ilu rozwiązań liniowo niezależnych składa się podstawowy układ rozwiązań.

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy wyrażenia na poszukiwane stałe:

$$(25) \quad A_n = \frac{\int_0^l [F_1 f_1(x) X_{1n} + F_2 f_2(x) X_{2n}] dx}{\int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx},$$

$$B_n = \frac{\int_0^l [F_1 g_1(x) X_{1n} + F_2 g_2(x) X_{2n}] dx}{\omega_n \int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx}.$$

Podsumowanie

1. W rozpatrzonym problemie drgań belek możemy doszukać się pewnej analogii z drganiami dwóch mas połączonych więzią sprężystą. Abstrahując od tego, że górna belka jest podparta (co zresztą nie jest konieczne, gdyż rozważania nasze przeprowadzimy w oparciu o wzory ogólne, w których warunki brzegowe jeszcze nie ingerują), układ o $2n(n \rightarrow \infty)$ stopniach swobody możemy sprowadzić do układu o 2 stopniach swobody zakładając, że sztywność obu belek wzrasta nieskończenie.

Jeżeli $EJ_1, EJ_2 \rightarrow \infty$, to musi być $r_{1n,2n}^4 = k_{1n,2n}^4 = 0$. Wtedy z (14) wynika

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{k}{\varrho} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) = 0,$$

więc

$$\omega^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad \omega^2 = \frac{k(F_1 + F_2)}{\varrho F_1 F_2}.$$

Przyjmując, że $\kappa = kl$ oznacza całkowitą sztywność elementu sprężystego, $m_1 = \varrho F_1 l$, $m_2 = \varrho F_2 l$ — masy belek, otrzymujemy

$$\omega^2 = \kappa \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Wyrażenie to określa częstość drgań dwóch mas połączonych jednym elementem sprężystym. Warunek (15) eliminuje ten mało interesujący przypadek drgań belek jako prętów nieskończenie sztywnych.

2. Na podstawie (14), (15) i (18) można wykazać, że

$$\alpha_n = \frac{EJ_1}{2k} (p_n + \sqrt{p_n^2 + q}) > 0; \quad \beta_n = \frac{EJ_1}{2k} (p_n - \sqrt{p_n^2 + q}) < 0,$$

gdzie

$$p_n = \frac{1}{EJ_1} (k - \omega_n^2 \varrho F_1) - \frac{1}{EJ_2} (k - \omega_n^2 \varrho F_2), \quad q = \frac{4k^2}{E^2 J_1 J_2}.$$

Wynika z tego, że składowe wychyleń postaci drgań X_{1n}, X_{2n} przyporządkowane współczynnikom k_{1n} mają kierunek zgodny, natomiast przyporządkowane współczynnikom k_{2n} kierunek przeciwny.

Jeżeli przejdziemy teraz do układu o dwóch stopniach swobody, to otrzymamy

$$\alpha = \beta = -\frac{F_1}{F_2} = -\frac{m_1}{m_2},$$

co rzeczywiście ma miejsce.

O pełnej analogii układu składającego się z dwóch belek i układu dwumasowego można jednak mówić dopiero w przypadku, gdy górna belka nie jest podparta.

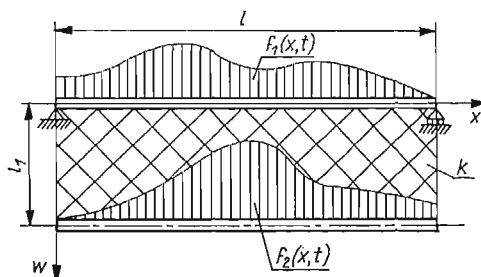
3. Z wyrażenia (14) wynika, że gdy sztywność górnej belki $EJ_1 \rightarrow \infty$, wtedy dolna belka drga jak belka na sprężystym podłożu z częstościami

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EJ_2 k_{2n}^4 + k}{\rho F_2}}.$$

4. Na zakończenie warto podkreślić, że w oparciu o przedstawiony sposób rozwiązania znalezienie swobodnych drgań belek przy różnych typach podparcia zarówno górnej, jak i dolnej belki nie przedstawia trudności.

2. Drgania wymuszone

2.1. Ogólny przypadek drgań wymuszonych. Przejdziemy obecnie do wyznaczenia wymuszonych drgań belek, wywołanych obciążeniami dowolnymi, przyłożonymi na górnej i dolnej belce (rys. 2);



Rys. 2

$f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ oznaczają obciążenia w odpowiednich punktach górnej i dolnej belki.

Ruch układu drgającego (rys. 2) opisują równania:

$$(26) \quad EJ_1 \frac{\partial^4 w_I}{\partial x^4} + \rho F_1 \frac{\partial^2 w_I}{\partial t^2} - k(w_{II} - w_I) = f_1(x, t),$$

$$(27) \quad EJ_2 \frac{\partial^4 w_{II}}{\partial x^4} + \rho F_2 \frac{\partial^2 w_{II}}{\partial t^2} + k(w_{II} - w_I) = f_2(x, t).$$

Pełne rozwiązania tego układu równań są następujące:

$$(28) \quad w_I = w_1 + W_1, \quad w_{II} = w_2 + W_2,$$

gdzie w_1 , w_2 oznaczają drgania swobodne belek, a W_1 i W_2 — drgania wymuszone.

Wobec tego funkcje W_1, W_2 muszą spełniać równania

$$(29) \quad EJ_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + \varrho F_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - k(W_2 - W_1) = f_1(x, t),$$

$$(30) \quad EJ_2 \frac{\partial^4 W_2}{\partial x^4} + \varrho F_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + k(W_2 - W_1) = f_2(x, t),$$

z warunkami brzegowymi typu (3) oraz następującymi warunkami początkowymi:

$$(31) \quad W_1(x, 0) = W_2(x, 0) = \frac{\partial W_1}{\partial t} \Big|_{(x,0)} = \frac{\partial W_2}{\partial t} \Big|_{(x,0)} = 0.$$

Do znalezienia rozwiązań powyższego układu równań posłużymy się metodą *rozkladu w/g postaci drgań własnych*.

Szukane funkcje przedstawiamy w postaci szeregów:

$$(32) \quad W_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) X_{in}(x), \quad i = 1, 2,$$

gdzie $S_n(t)$ oznacza nieznaną funkcję czasu, $X_{1n}(x), X_{2n}(x)$ — postaci drgań własnych (znane).

Podstawiając (32) do (29) i (30) otrzymujemy

$$(33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [EJ_1 S_n X_{1n}^{(IV)} + \varrho F_1 S_n'' X_{1n} - k S_n (X_{2n} - X_{1n})] = f_1(x, t),$$

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [EJ_2 S_n X_{2n}^{(IV)} + \varrho F_2 S_n'' X_{2n} + k S_n (X_{2n} - X_{1n})] = f_2(x, t).$$

Równanie (33) mnożymy przez X_{1k} , (34) zaś przez X_{2k} .

Po zsumowaniu tych równań mamy

$$(35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [E(J_1 X_{1k} X_{1n}^{(IV)} + J_2 X_{2k} X_{2n}^{(IV)}) S_n + \varrho (F_1 X_{1k} X_{1n} + F_2 X_{2k} X_{2n}) S_n'' + \\ + k(X_{2k} - X_{1k})(X_{2n} - X_{1n}) S_n] = f_1(x, t) X_{1k} + f_2(x, t) X_{2k}.$$

Wiemy, że funkcje X_{1n}, X_{2n} spełniają równania (10)

$$(36) \quad \begin{aligned} EJ_1 X_{1n}^{(IV)} &= \omega_n^2 \varrho F_1 X_{1n} + k(X_{2n} - X_{1n}), \\ EJ_2 X_{2n}^{(IV)} &= \omega_n^2 \varrho F_2 X_{2n} - k(X_{2n} - X_{1n}). \end{aligned}$$

Z równań (36) można otrzymać następującą zależność:

$$E(J_1 X_{1k} X_{1n}^{(IV)} + J_2 X_{2k} X_{2n}^{(IV)}) = \omega_n^2 \varrho (F_1 X_{1k} X_{1n} + F_2 X_{2k} X_{2n}) - k(X_{2k} - X_{1k})(X_{2n} - X_{1n}),$$

którą wprowadzamy do wyrażenia (35). Uzyskane w ten sposób równanie

$$\varrho \sum_{n=1}^{\infty} (F_1 X_{1k} X_{1n} + F_2 X_{2k} X_{2n}) [S_n'' + \omega_n^2 S_n] = f_1(x, t) X_{1k} + f_2(x, t) X_{2k}$$

całkujemy obustronnie po długości belki. Przyjmując teraz $k = n$ i biorąc pod uwagę warunek ortogonalności (24), otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne na poszukiwaną funkcję czasu

$$(37) \quad S_n'' + \omega_n^2 S_n = \frac{1}{\varrho} H_n(t),$$

gdzie

$$(38) \quad H_n(t) = \frac{\int_0^l [f_1(x, t) X_{1n}(x) + f_2(x, t) X_{2n}(x)] dx}{\int_0^l (F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2) dx}.$$

Rozwiązanie równania (37) przy warunkach początkowych (31) ma postać

$$(39) \quad S_n(t) = \frac{1}{\varrho \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau.$$

Zatem drgania wymuszone belek wyrażają się następującymi wzorami:

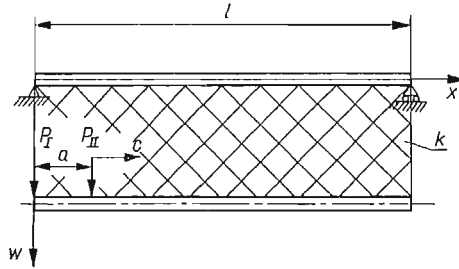
$$(40) \quad \begin{aligned} W_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho \omega_n} X_{1n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau, \\ W_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho \omega_n} X_{2n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Całkowite drgania belek mają postać

$$(41) \quad \begin{aligned} w_{1I} = w_1 + W_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n} (T_n + S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n} \left\{ A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varrho \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \right\}, \\ w_{2I} = w_2 + W_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} (T_n + S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} \left\{ A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varrho \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \right\}. \end{aligned}$$

2.2. Drgania poprzeczne przy obciążeniu skupionymi siłami harmonicznymi przemieszczającymi się ze stałą prędkością po dolnej belce. Wyprowadzone wzory ogólne (38), (39), (40) wykorzystamy teraz do znalezienia drgań belek w przypadku sił przemieszczających się (rys. 3).

Oznaczenia: $P_I = P_1 \sin \omega t$, $P_{II} = P_2 \sin \omega t$ oznaczają siły wymuszające, ω — częstość wymuszenia, a — ustaloną odległość między siłami, c — stałą prędkość przemieszczania się sił (kierunek jej oznaczony jest na rys. 3).



Rys. 3

Zakładamy, że w chwili $t = 0$ położenie sił jest takie jak na rys. 3.

Rozpoczniemy od obliczenia funkcji (38), która w tym przypadku ma postać:

$$(42) \quad H_n(t) = \frac{\int_0^l f_2(x, t) X_{2n} dx}{\int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx}.$$

Mianownik tego wyrażenia po wprowadzeniu X_{1n} , X_{2n} z (22) daje:

$$\begin{aligned} M_n = \int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx = & \frac{c_{1n} l}{2} (N_n^2 + 2G_n^2 - R_n^2) + \frac{c_{2n} l}{2} (1 + 2G_n^2 - K_n^2) + \\ & + \frac{c_{1n}}{k_{1n}} \left\{ (N_n - R_n) G_n + \frac{1}{4} [(R_n^2 + G_n^2) \operatorname{sh} 2Z_{1n} - (N_n^2 - G_n^2) \sin 2Z_{1n}] + \right. \\ & + G_n [R_n \operatorname{sh}^2 Z_{1n} + N_n \sin^2 Z_{1n} + (N_n + R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \sin Z_{1n} + (R_n - N_n) \operatorname{ch} Z_{1n} \cos Z_{1n}] - \\ & \left. - (N_n R_n - G_n^2) \operatorname{sh} Z_{1n} \cos Z_{1n} + (N_n R_n + G_n^2) \operatorname{ch} Z_{1n} \sin Z_{1n} \right\} + \\ & + \frac{c_{2n}}{k_{2n}} \left\{ (K_n - 1) G_n + \frac{1}{4} [(K_n^2 + G_n^2) \operatorname{sh} 2Z_{2n} - (1 - G_n^2) \sin 2Z_{2n}] - \right. \\ & - G_n [K_n \operatorname{sh}^2 Z_{2n} + \sin^2 Z_{2n} + (K_n + 1) \operatorname{sh} Z_{2n} \sin Z_{2n} + (K_n - 1) \operatorname{ch} Z_{2n} \cos Z_{2n}] - \\ & \left. - (K_n - G_n^2) \operatorname{sh} Z_{2n} \cos Z_{2n} + (K_n + G_n^2) \operatorname{ch} Z_{2n} \sin Z_{2n} \right\} + \\ & + \frac{2c_{3n}}{k_{1n}^2 - k_{2n}^2} \left\{ G_n [k_{1n} (R_n + N_n) + k_{2n} (1 + K_n) + (k_{1n} K_n + k_{2n} R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} - \right. \\ & - (k_{1n} R_n + k_{2n} K_n) \operatorname{ch} Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n} + (k_{1n} + k_{2n} N_n) \sin Z_{1n} \sin Z_{2n} + \\ & \left. + (k_{1n} N_n + k_{2n}) \cos Z_{1n} \cos Z_{2n}] - (k_{1n} G_n^2 + k_{2n} K_n R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k_{1n}K_nR_n + k_{2n}G_n^2) \operatorname{ch} Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} - (k_{1n}G_n^2 - k_{2n}N_n) \sin Z_{1n} \cos Z_{2n} - \\
& \quad - (k_{1n}N_n - k_{2n}G_n^2) \cos Z_{1n} \sin Z_{2n} \} + \\
& + \frac{2c_{3n}}{k_{1n}^2 + k_{2n}^2} \{ G_n [k_{1n}(R_n - N_n) + k_{2n}(1 - K_n)] + (k_{1n} - k_{2n}R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \sin Z_{2n} - \\
& \quad - (k_{1n}R_n + k_{2n}) \operatorname{ch} Z_{1n} \cos Z_{2n} \} - (k_{1n}G_n^2 + k_{2n}R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \cos Z_{2n} + \\
& + (k_{1n}R_n + k_{2n}G_n^2) \operatorname{ch} Z_{1n} \sin Z_{2n} + (k_{1n}G_n^2 - k_{2n}K_nN_n) \sin Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n} - \\
& \quad - (k_{1n}K_nN_n + k_{2n}G_n^2) \cos Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} + \\
& + G_n [(k_{1n}K_n - k_{2n}N_n) \sin Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} + (k_{1n}N_n + k_{2n}K_n) \cos Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n}],
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
c_{1n} &= F_1 + \alpha_n^2 F_2, & Z_{1n} &= k_{1n}l, \\
c_{2n} &= F_1 + \beta_n^2 F_2, & Z_{2n} &= k_{2n}l, \\
c_{3n} &= F_1 + \alpha_n \beta_n F_2.
\end{aligned}$$

W liczniku wyrażenia (42) otrzymujemy następującą funkcję czasu:

$$\begin{aligned}
L_n(t) &= \int_0^l f_2(x, t) X_{2n} dx = \sin \omega t \int_0^l \{ P_1 X_{2n} \delta[x - ct] + P_2 X_{2n} \delta[x - (a + ct)] \} dx = \\
&= [Q_{1n} \operatorname{sh}(k_{1n}ct) + Q_{2n} \operatorname{ch}(k_{1n}ct) + Q_{3n} \sin(k_{1n}ct) + Q_{4n} \cos(k_{1n}ct) + \\
&+ Q_{5n} \operatorname{sh}(k_{2n}ct) + Q_{6n} \operatorname{ch}(k_{2n}ct) + Q_{7n} \sin(k_{2n}ct) + Q_{8n} \cos(k_{2n}ct)] \sin \omega t,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\delta[x - ct] &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq ct, \\ 1 & \text{dla } x = ct; \end{cases} & \delta[x - (a + ct)] &= \begin{cases} 0; & x \neq a + c, \\ 1; & x = a + c; \end{cases} \\
Q_{1n} &= +\alpha_n [R_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{1n}a)) + G_n P_2 \operatorname{sh}(k_{1n}a)], \\
Q_{2n} &= +\alpha_n [G_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{1n}a)) + R_n P_2 \operatorname{sh}(k_{1n}a)], \\
Q_{3n} &= +\alpha_n [N_n (P_1 + P_2 \cos(k_{1n}a)) - G_n P_2 \sin(k_{1n}a)], \\
Q_{4n} &= +\alpha_n [G_n (P_1 + P_2 \cos(k_{1n}a)) + N_n P_2 \sin(k_{1n}a)], \\
Q_{5n} &= +\beta_n [K_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{2n}a)) - G_n P_2 \operatorname{sh}(k_{2n}a)], \\
Q_{6n} &= -\beta_n [G_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{2n}a)) - K_n P_2 \operatorname{sh}(k_{2n}a)], \\
Q_{7n} &= +\beta_n [(P_1 + P_2 \cos(k_{2n}a)) + G_n P_2 \sin(k_{2n}a)], \\
Q_{8n} &= -\beta_n [G_n (P_1 + P_2 \cos(k_{2n}a)) - P_2 \sin(k_{2n}a)].
\end{aligned}$$

Ostatecznie $H_n(t) = L_n(t)/M_n$. Wprowadzając to wyrażenie do wzoru (39) mamy

$$(43) \quad S_n(t) = \frac{1}{\rho \omega_n M_n} \int_0^t L_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau = \frac{1}{\rho M_n} \frac{U_n(t)}{V_n},$$

gdzie

(44)

$$V_n = u_n v_n,$$

$$u_n = m_{1n} m_{2n} m_{3n} m_{4n}, \quad v_n = n_{1n} n_{2n} n_{3n} n_{4n},$$

$$m_{1n} = (k_{1n} c)^2 - (\omega + \omega_n)^2, \quad n_{1n} = (k_{2n} c)^2 - (\omega + \omega_n)^2,$$

$$m_{2n} = (k_{1n} c)^2 - (\omega - \omega_n)^2, \quad n_{2n} = (k_{2n} c)^2 - (\omega - \omega_n)^2,$$

$$m_{3n} = (k_{1n} c)^2 + (\omega + \omega_n)^2, \quad n_{3n} = (k_{2n} c)^2 + (\omega + \omega_n)^2,$$

$$m_{4n} = (k_{1n} c)^2 + (\omega - \omega_n)^2, \quad n_{4n} = (k_{2n} c)^2 + (\omega - \omega_n)^2,$$

$$m_{5n} = (k_{1n} c)^2 + (\omega^2 - \omega_n^2), \quad n_{5n} = (k_{2n} c)^2 + (\omega^2 - \omega_n^2),$$

$$m_{6n} = (k_{1n} c)^2 - (\omega^2 - \omega_n^2), \quad n_{6n} = (k_{2n} c)^2 - (\omega^2 - \omega_n^2),$$

$$(45) \quad U_n(t) = \sin \omega t \{v_n [m_{1n} m_{2n} m_{6n} (Q_{1n} \operatorname{sh}(k_{1n} ct) + Q_{2n} \operatorname{ch}(k_{1n} ct)) - \\ - m_{3n} m_{4n} m_{5n} (Q_{3n} \sin(k_{1n} ct) - Q_{4n} \cos(k_{1n} ct))] + u_n [n_{1n} n_{2n} n_{6n} (Q_{5n} \operatorname{sh}(k_{2n} ct) + \\ + Q_{6n} \operatorname{ch}(k_{2n} ct)) - n_{3n} n_{4n} n_{5n} (Q_{7n} \sin(k_{2n} ct) - Q_{8n} \cos(k_{2n} ct))]\} - \\ - 2\omega \cos \omega t \{ (k_{1n} c) v_n [m_{1n} m_{2n} (Q_{1n} \operatorname{ch}(k_{1n} ct) + Q_{2n} \operatorname{sh}(k_{1n} ct)) + \\ + m_{3n} m_{4n} (Q_{3n} \cos(k_{1n} ct) - Q_{4n} \sin(k_{1n} ct))] + (k_{2n} c) u_n [n_{1n} n_{2n} (Q_{5n} \operatorname{ch}(k_{2n} ct) + \\ + Q_{6n} \operatorname{sh}(k_{2n} ct)) + n_{3n} n_{4n} (Q_{7n} \cos(k_{2n} ct) - Q_{8n} \sin(k_{2n} ct))] \} + \\ + \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t [v_n (m_{1n} m_{2n} m_{5n} Q_{2n} - m_{3n} m_{4n} m_{6n} Q_{4n}) + u_n (n_{1n} n_{2n} n_{5n} Q_{6n} - n_{3n} n_{4n} n_{6n} Q_{8n})] + \\ + 2\omega \cos \omega_n t [(k_{1n} c) v_n (m_{1n} m_{2n} Q_{1n} - m_{3n} m_{4n} Q_{3n}) + (k_{2n} c) u_n (n_{1n} n_{2n} Q_{5n} - n_{3n} n_{4n} Q_{7n})].$$

Drgania wymuszone belek wywołane siłami przemieszczającymi się mają postać

$$(46) \quad W_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n}(x) S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho M_n V_n} X_{1n}(x) U_n(t),$$

$$W_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho M_n V_n} X_{2n}(x) U_n(t).$$

Podsumowanie

1. Rozwiązania drgań wymuszonych (46) składają się, jak to wynika z funkcji czasu (45), z dwóch części:

- czystych drgań wymuszonych (zawierają człony $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$),
- drgań swobodnych (zawierają człony $\sin \omega_n t$ i $\cos \omega_n t$), które powstają w chwili przyłożenia sił zewnętrznych. Należy je odróżnić od drgań swobodnych, które wynikają z odpowiednich warunków początkowych.

Jest rzeczą oczywistą, że wzory (46) są słuszne dopóki $ct \leq (l-a)$, to znaczy dopóki zachodzi ruch obciążenia. W momencie gdy $t = \frac{1}{c}(l-a)$, obciążenie zostaje zdjęte i pozostaną tylko drgania swobodne.

2. Zjawisko rezonansu może wystąpić dla każdego składnika sum (46) przy określonych wartościach prędkości przemieszczania się sił wymuszających. Wynika to z wyrażenia (44). Przystępując do zera

$V_n = [(k_{1n}c)^4 - (\omega + \omega_n)^4] [(k_{1n}c)^4 - (\omega - \omega_n)^4] [(k_{2n}c)^4 - (\omega + \omega_n)^4] [(k_{2n}c)^4 - (\omega - \omega_n)^4] = 0$,
otrzymujemy cztery prędkości rezonansowe przy ustalonej częstotliwości wymuszenia ω

$$c_{1n} = \frac{\omega + \omega_n}{k_{1n}}, \quad c_{2n} = \frac{|\omega - \omega_n|}{k_{1n}}, \quad c_{3n} = \frac{\omega + \omega_n}{k_{2n}}, \quad c_{4n} = \frac{|\omega - \omega_n|}{k_{2n}},$$

z których podstawową prędkością rezonansową jest c_{2n} .

Podobnie możemy mówić o czterech częstotliwościach rezonansowych (przy ustalonej prędkości) wynikających bezpośrednio z tych zależności. Przypadek $\omega = \omega_n$ nie prowadzi do rezonansu, chyba że $c = 0$ lub gdy sama prędkość jest już rezonansowa.

Literatura cytowana w tekście

1. S. D. PONOMARIEW, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, PWN, Warszawa 1957.
2. S. ЗЕМБА, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.
3. А. П. Филиппов, *Колебания деформируемых систем «Машиностроение»*, Москва 1970.
4. Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов, *Нестационарные колебания механических систем*, «Наукова думка», Киев 1966.
5. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.

Резюме

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БАЛОК, СВЯЗАННЫХ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

В работе рассматриваются поперечные колебания системы, состоящей из двух призматических балок, связанных упругим элементом. Верхняя балка опирается концами на жестких опорах. Нижняя — подвешена на первой по всей длине балки при помощи упругого элемента. Анализированная система является некоторой упрощенной моделью крана или моста.

В работе приведены дифференциальные уравнения движения системы, а также найдены решения свободных колебаний и вынужденных колебаний при действии гармонических сил, движущихся с постоянной скоростью по нижней балке.

Summary

TRANSVERSAL VIBRATION OF THE SYSTEM OF TWO BEAMS CONNECTED BY MEANS OF AN ELASTIC ELEMENT

In this paper is discussed the transversal vibration of the system of two beams connected by means of an elastic element. The top beam's ends are supported on rigid supports. The lower beam is suspended by means of an elastic element on the first one. This system represents a certain simplified model of a gantry or a bridge. There are considered the free vibrations of the beams and forced vibrations caused by harmonic forces which move with a constant velocity on the lower beam.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 sierpnia 1973 r.