

WYBRANE OSIOWO-SYMETRYCZNE ZAGADNIENIA OBRÓBKI  
PLASTYCZNEJ METALI\*

MARIAN GRZYMKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali posiadają duże znaczenie praktyczne. Prawie wszystkie procesy kucia na młotach, prasach, kuźniarkach oraz prasowanie na zimno i gorąco, ciągnięcie prętów, wytłaczanie i przetłaczanie przebiegają w warunkach osiowej symetrii.

Ważnym i często stosowanym procesem jest kucie swobodne pierścieni i krążków będących odkuwkami wstępnymi do kucia matrycowego lub gotowymi półfabrykatami. Procesy obróbki plastycznej metali są bardzo ważne dla technologii obróbki części maszyn i urządzeń, ponieważ obniżają one koszt ich wytwarzania i wpływają na wzrost wytrzymałości mechanicznej poprzez zjawisko umocnienia materiału.

Procesy przebiegające w warunkach osiowej symetrii są, z praktycznego punktu widzenia, szczególnie istotne. Niewiele z nich doczekało się jednak analizy teoretycznej opartej na teorii plastyczności. Analiza tych procesów jest znacznie trudniejsza niż procesów będących w płaskim stanie odkształcenia. Ważność zagadnień osiowo-symetrycznych dla technologii wytwarzania skłoniła autora do podjęcia rozważań nad nimi.

W analizie procesów obróbki plastycznej metali podstawowym zagadnieniem jest określenie nacisków pomiędzy narzędziem formującym a materiałem, energii zużytej w czasie procesu oraz mechanizmu płynięcia. Traktując materiał jako sztywno-plastyczny, izotropowy, nieściśliwy i pomijając efekt wzmocnienia oraz lepkości, możemy znacznie uprościć analizę. Zagadnienie płynięcia plastycznego możemy rozwiązywać metodami teorii plastyczności, poszukując:

1) rozwiązań ścisłych,

2) ocen nośności:

a) oceny górnej na podstawie pól kinematycznie dopuszczalnych (pól charakterystyk prędkości, zadanych analitycznych rozkładów prędkości lub ruchu sztywnych bloków),

b) oceny dolnej na podstawie pól statycznie dopuszczalnych (pól charakterystyk naprężeń lub zadanych analitycznych rozkładów naprężenia),

3) rozwiązań uproszczonych.

Dla celów praktycznych większe znaczenie mają metody uproszczone.

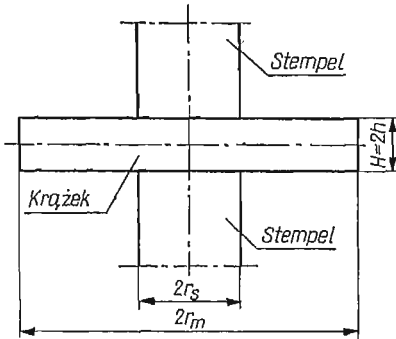
W pracy podano rozwiązania dwóch, praktycznie ważnych, zagadnień obróbki plastycznej metali:

1. Wciskanie dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek (rys. 1).

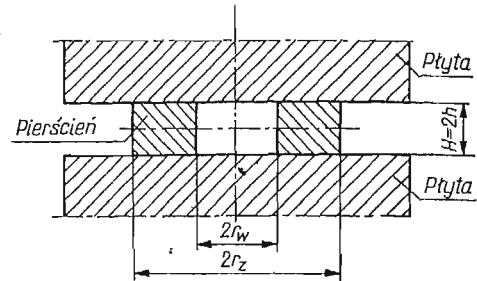
2. Ściskanie pierścieni między sztywnymi płytami (rys. 2).

\* Streszczenie pracy doktorskiej pt. *Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali*, obronionej w czeńwcu 1973 r. [9].

Do znalezienia nacisków jednostkowych i mechanizmu płynięcia zastosowano metodę charakterystyk, metodę założenia funkcji rozkładu prędkości oraz metodę uproszczoną. Wyniki teoretyczne porównano z wynikami doświadczalnymi.



Rys. 1. Schemat wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempelów w krążek



Rys. 2. Schemat ściskania pierścienia między czterema płytami

Pole statyczne znajdziemy wychodząc z równań równowagi dla osiowej symetrii, warunku plastyczności Treski i postulatu pełnej plastyczności. Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy równania różniczkowe charakterystyk i związków wzdłuż charakterystyk [23, 26]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \vartheta; & dp - 2k d\vartheta &= \frac{k}{r} (dz \pm dr) \text{ dla linii } \alpha, \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \vartheta; & dp + 2k d\vartheta &= -\frac{k}{r} (dz \mp dr) \text{ dla linii } \beta. \end{aligned}$$

Górne znaki dotyczą płynięcia materiału na zewnątrz, dolne natomiast — do środka przyjętego układu osi współrzędnych. Pole kinematyczne znajdziemy wychodząc z warunku nieściśliwości i warunku izotropii. Równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości i związków wzdłuż charakterystyk dla prędkości przyjmują postać

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \vartheta; & dv_r \cos \vartheta + dv_z \sin \vartheta &= -\frac{vr}{2r} (dr \cos \vartheta + dz \sin \vartheta) \text{ dla linii } \alpha, \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \vartheta; & dv_r \sin \vartheta - dv_z \cos \vartheta &= \frac{vr}{2r} (dz \cos \vartheta - dr \sin \vartheta) \text{ dla linii } \beta. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości (1.2) są takie same, jak równania różniczkowe charakterystyk dla naprężeń (1.1), a więc charakterystyki dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń.

Wzdłuż linii nieciągłości prędkości  $\alpha$  skok prędkości jest określony wzorem

$$(1.3) \quad |\Delta v_\alpha| = \frac{|v_\alpha| \cdot \sqrt{R}}{\sqrt{r}},$$

w którym  $R$  jest promieniem punktu przecięcia rozpatrywanej linii z osią  $r$ ,  $v_\alpha$  jest składową prędkości w tym punkcie,  $r$  jest współrzędną punktu, w którym wartość skoku

składowej prędkości  $\Delta v_\alpha$  jest obliczona. Analogiczny wzór obowiązuje, gdy linią nieciągłości prędkości jest linia  $\beta$ .

Nacisk jednostkowy  $\bar{p}$  potrzebny do odkształcenia plastycznego oblicza się z bilansu energii dysypacji w elementach objętości, na powierzchniach kontaktu z narzędziem i na liniach nieciągłości. Nacisk ten oblicza się z równania [1, 14]

$$(1.4) \quad \int_{F_0} \bar{p} v_0 dF_0 = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{F_s} \tau_s v_s dF_s,$$

a w przypadku przyjęcia warunku plastyczności Hubera-Misesa z równania

$$(1.5) \quad \int_{F_0} p v_0 dF_0 = \int_V \sigma_p \dot{\epsilon}_i dV + \int_{F_s} \tau_s v_s dF_s.$$

Z równań (1.4) i (1.5) oblicza się górną ocenę nośności granicznej.

## 2. Wciskanie dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek

Zagadnienie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek występuje w procesie kucia odkuwek swobodnie kutych z otworem w środku oraz w pierwszej fazie kucia matrycowego wszelkiego rodzaju kół, pierścieni i krążków również z otworem w środku. Zagadnienie to zostanie rozwiązane metodą charakterystyk i metodą założenia funkcji rozkładu prędkości płynięcia.

**2.1. Obliczenie średniego nacisku jednostkowego metodą charakterystyk.** Zadanie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek można rozwiązać metodą charakterystyk przez rozbitcie go na dwa zagadnienia:

1) rozłaczanie pierścienia o promieniu  $r_s \leq r \leq r_m$  ciśnieniem  $q$  wynikającym ze ściskania walca o promieniu  $r_s$  stemplami ( $v_r > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta = 0$ ),

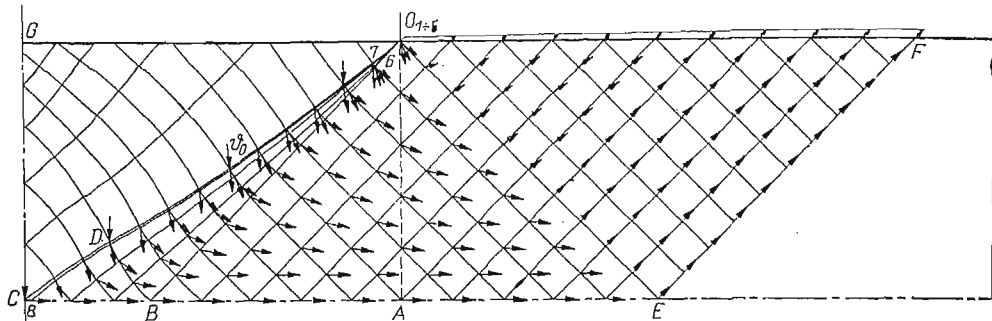
2) ściskanie walca o średnicy  $2r_s$  między stemplami z uwzględnieniem działania bocznego ciśnienia  $q$ .

Ciśnienie  $q$  rozłaczania pierścienia może przyjmować wartości od zera do  $2k$ . Maksymalny promień pierścienia  $r_m$ , który będzie zależny od przyjętego ciśnienia  $q$  można znaleźć z równania

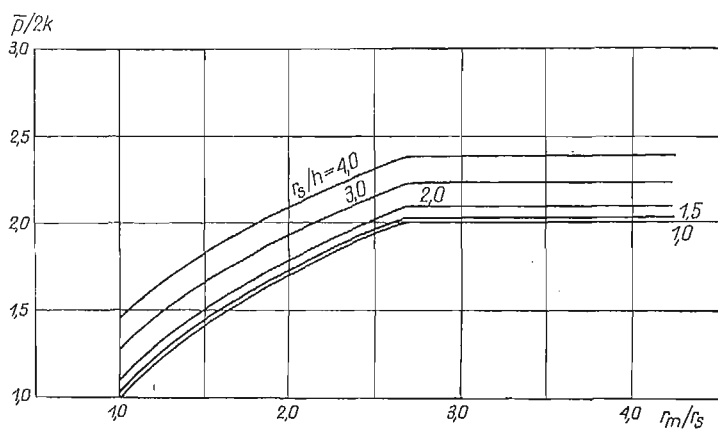
$$(2.1) \quad r_m = r_s e^{\frac{q}{2k}}.$$

Jeśli przyjmiemy, że ciśnienie  $q$  rozłaczania pierścienia działa na pobocznice walca ściskanego stemplami ( $q = -\sigma_r$ ), to wówczas na brzegu walca mamy jednorodny stan naprężenia  $\sigma_r = -q$ ,  $\sigma_z = -(2k + q)$ . Przyjmując taki stan naprężenia zamiast stanu naprężenia dla ściskania walca  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_z = -2k$  uwzględnimy oddziaływanie pierścienia na walec, a tym samym rozwiążemy zadanie wciskania stempli w krążek.

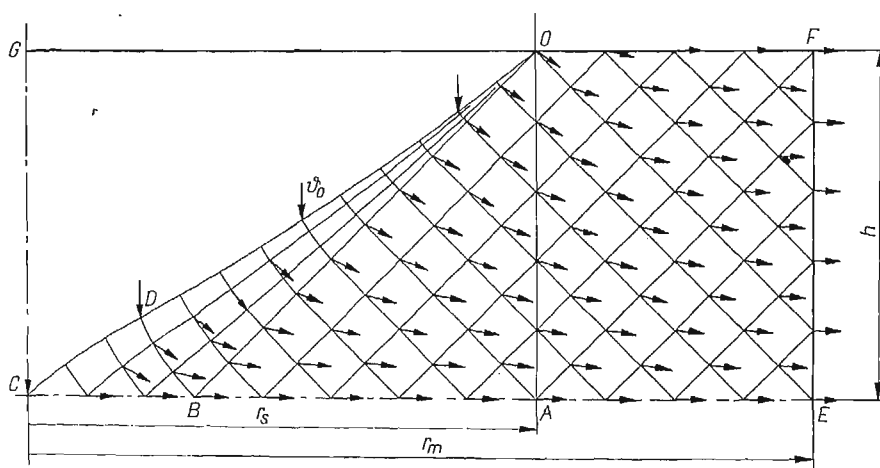
Rozwiązanie statyczne krążka pod stemplami znajdziemy rozwiązując równania (1.1) dla przyjętych warunków brzegowych. Pole charakterystyk wraz z polem kinematycznym pokazano na rys. 3. Dolną ocenę nośności zadania obliczono ze stanu naprężenia na ostatniej charakterystyce  $ODC$  (rys. 3) i przedstawiono na rys. 4.



Rys. 3. Pole naprężeń i pole prędkości płynięcia dla  $r_s/h = 1,5$

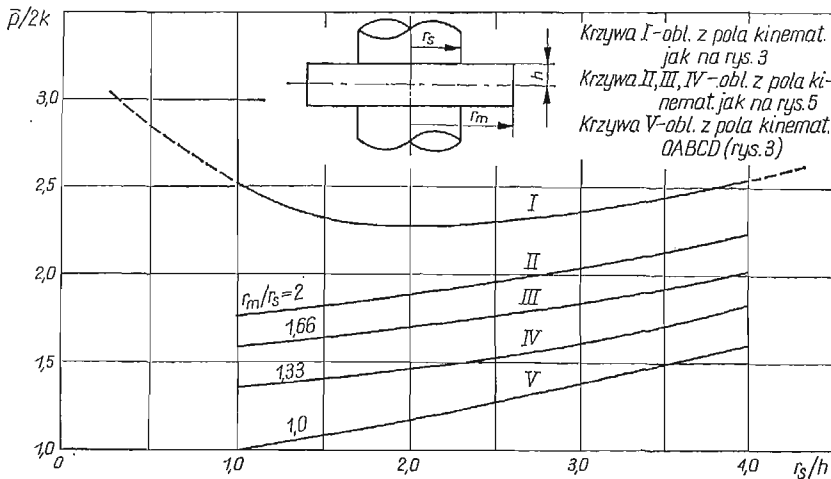


Rys. 4. Dolna ocena nośności krążków

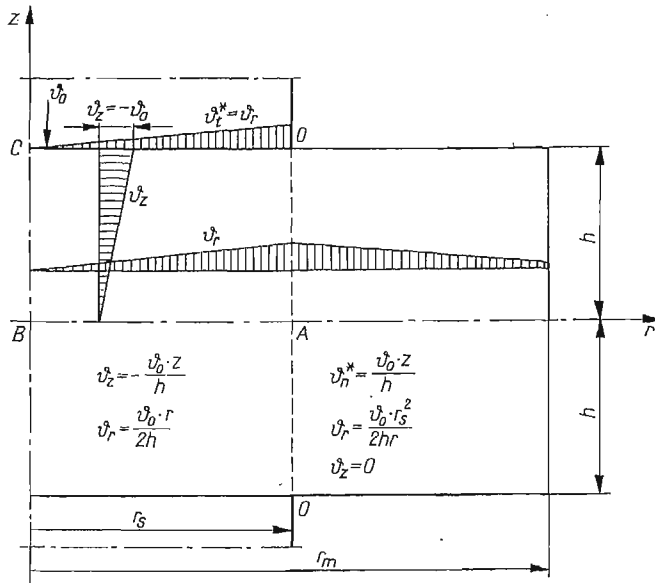


Rys. 5. Pole naprężeń i prędkości płynięcia dla krążków o promieniu  $r_m < r_s + 2h$  ( $r_s/h = 1,5$ )

Rozwiązanie kinematyczne krążka (rys. 3), w części pod stemplem, jest zbudowane na polu sątaczynym, natomiast w pierścieniu przyjmujemy dowolne pole o prostoliniowych charakterystykach. Rozwiązanie znajdujemy z równań (1.2). Na rys. 5 przedstawiono pole naprężeń i prędkości płynięcia dla krążków o promieniu  $r_m < r_s + 2h$ . Górną ocenę nośności oblicza się z pola kinematycznego wykorzystując równanie (1.4). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6. Krzywa I nacisków jednostkowych przechodzi przez punkt obliczony przez EASONA i SHIELDSA [7] ( $r_s/h = 0,274$ ,  $\mu = 0,139$ ,  $\bar{p} = 3,02 \cdot 2k$ ).



Rys. 6. Górną oceną nośności krążków obliczona metodą charakterystyk

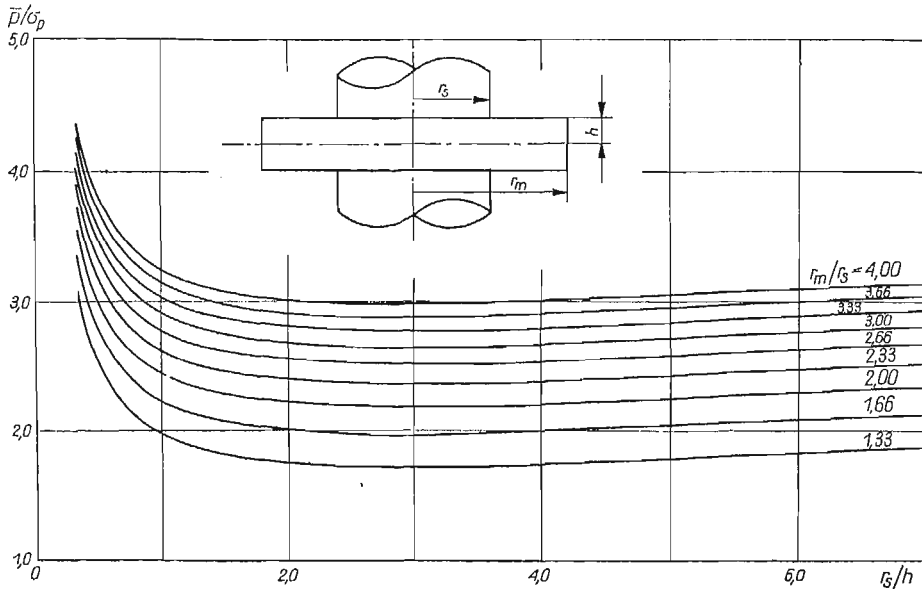


Rys. 7. Rozkład prędkości płynięcia

**2.2. Obliczenie górnej oceny nacisku jednostkowego metodą założenia funkcji rozkładu prędkości płynięcia.** Górną ocenę nośności granicznej dla osiowo-symetrycznych zadań można znaleźć z kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości utworzonego z przyjęcia funkcji opisującej promieniową  $v_r$  lub osiową  $v_z$  składową prędkości płynięcia. Funkcje te muszą spełniać warunki pola kinematycznie dopuszczalnego. Do rozwiązania zadania wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempli w krążek przyjmujemy liniową zmianę prędkości wzdłuż osi  $z$  w postaci

$$(2.2) \quad v_z = -\frac{v_0 z}{h}.$$

Rozkład prędkości płynięcia w krążku pokazano na rys. 7. Wykorzystując warunek nieściśliwości obliczamy składowe prędkości odkształceń i intensywność prędkości odkształceń. Z równania (1.5) obliczamy średni nacisk jednostkowy, którego zależność od parametrów geometrycznych pokazano przykładowo dla współczynnika tarcia  $c = 0,35$  na rys. 8.

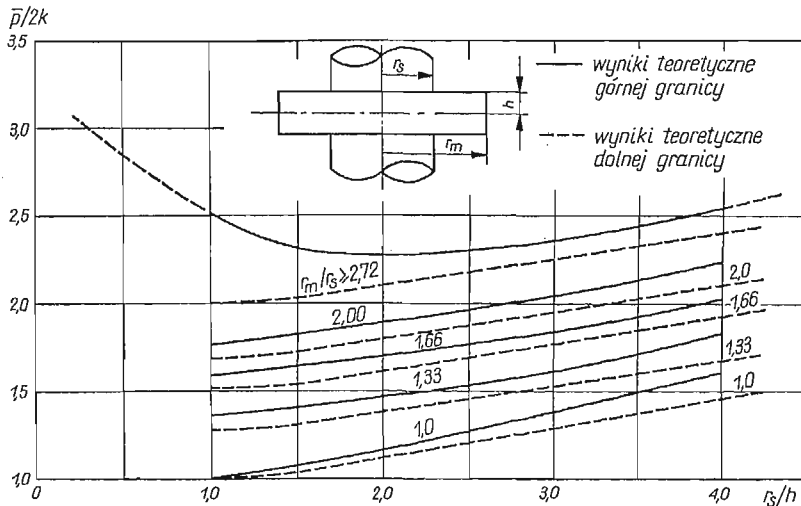


Rys. 8. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów krążka i średnicy stempli dla tarcia suchego ( $c = 0,35$ )

**2.3. Analiza wyników obliczeń i ich porównanie.** Dolna ocena nacisku jednostkowego krążków (rys. 4) rośnie wraz ze wzrostem stosunków wymiarów krążka  $r_s/h$  i  $r_m/r_s$ . Dla krążków o promieniu  $r_m \geq 2,72 \cdot r_s$  nacisk zależy tylko od wysokości  $h$ , a nie zależy od promienia  $r_m$ , a zatem zewnętrzna część krążka o promieniu  $r_m > 2,72 \cdot r_s$  jest sztywna i nie wpływa na nośność graniczną. Na rys. 6 przedstawiono górną ocenę nośności krążków obliczoną metodą charakterystyk. Krzywa I przedstawia nacisk dla krążków o dużej średnicy ( $r_m > r_s + 2h$ ), krzywe II, III i IV określają naciski dla krążków o promieniu  $r_m < r_s + 2h$  (według rozwiązania z rys. 5), natomiast krzywa V pokazuje naciski przy ściskaniu walca. Naciski obliczone metodą założenia funkcji rozkładu prędkości (rys. 8)

zależą od geometrii krążków i od przyjętego tarcia na kontakcie (współczynnika  $c$ ). Nacisk jednostkowy rośnie wraz ze wzrostem współczynnika  $c$  i stosunku promieni krążka  $r_m/r_s$ .

Na rys. 9 przedstawiono górną i dolną ocenę nacisków obliczoną metodą charakterystyk. Wyników metody założenia funkcji rozkładu prędkości nie porównywano z wy-



Rys. 9. Porównanie wyników teoretycznych metody charakterystyk

nikami uzyskanymi metodą charakterystyk, ponieważ metoda ta opiera się na innych założeniach i w związku z tym krzywe nacisków mają zupełnie inny charakter wznoszenia i opadania.

### 3. Ściskanie pierścieni między dwiema sztywnymi płytami

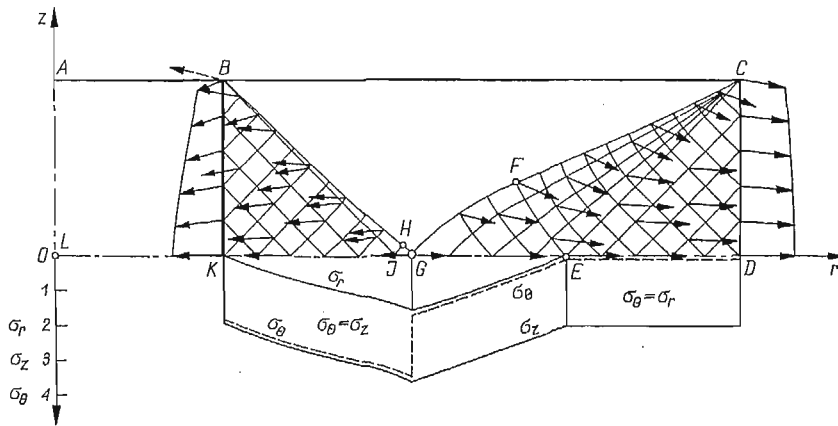
**3.1. Obliczenie średniego nacisku jednostkowego metodą charakterystyk.** Rozwiązanie zagadnienia ściskania pierścieni (rys. 2) polega na znalezieniu dopuszczalnego pola naprężeń i dopuszczalnego pola prędkości płynięcia dla przyjętych warunków brzegowych. Przyjmujemy statyczne warunki brzegowe na swobodnej powierzchni bocznej zewnętrznej i wewnętrznej pierścienia,  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_z = -2k$ . Na kontakcie pierścienia z płytami przyjmujemy tarcie poślizgowe scharakteryzowane współczynnikiem tarcia  $\mu = \tau_{rz}/\sigma_z$  wynikającym z ostatniej charakterystyki rozwiązania statycznego zadania. Dla rozwiązania kinematyki przyjmuje się warunek brzegowy na powierzchniach czołowych pierścienia, które poruszają się ruchem pionowym ze znaną prędkością narzędzia  $v_0$ . Oczywiście z taką samą prędkością  $v_0$  poruszają się obszary sztywne przylegające do płyt.

Z doświadczeń ściskania pierścieni wiemy, że pewna część materiału pierścienia płynie na zewnątrz, czyli zgodnie z dodatnim kierunkiem osi  $r$ , a pewna (wewnętrzna) część materiału płynie do środka przyjętego układu osi współrzędnych  $r, z$ . Istnieje zatem pro-

mień neutralny  $r_n$  rozdzielający pierścień na wspomniane strefy ruchu materiału. Warunkiem poprawnego rozwiązania statycznego jest, aby naprężenie promieniowe  $\sigma_r$ , obliczone dla wypływu na zewnątrz i dla wpływu materiału do środka pierścienia, było ciągłe. Nieciągłe mogą być natomiast naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_z$ .

Ze względu na osiową symetrię zadania (geometria pierścienia i warunki brzegowe) poszukiwane pole naprężeń, jak i pole prędkości jest symetryczne względem osi  $z$  i płaszczyzny środkowej pierścienia. Wystarczy zatem rozważyć tylko jedną czwartą część przekroju.

Budowę rozwiązania oraz analizę poszczególnych obszarów wygodnie jest przedstawić na konkretnym przykładzie przedstawionym na rys. 10, w którym przyjęto  $r_z/h = 4,0$ ,  $r_z/r_w = 4,0$ . Najpierw zostanie przedstawione rozwiązanie statyczne dla wypływu materiału na zewnątrz, a następnie dla wpływu materiału do wewnątrz pierścienia. Polu statycznemu zostanie przyporządkowane rozwiązanie kinematyczne.



Rys. 10. Pole naprężeń i pole prędkości dla pierścienia o wymiarach  $r_z/h = 4$  i  $r_z/r_w = 4$

Przy wypływie materiału na zewnątrz pierścienia czyli w kierunku dodatnim osi  $r$ , prędkość wypływu  $v_r > 0$ , a tym samym i prędkość odkształcenia obwodowego  $\dot{\epsilon}_\theta = v_r/r > 0$ . Z analizy stanu prędkości odkształcenia ze stanem naprężenia wynika, że  $\sigma_3 = \sigma_1$ , a główne prędkości odkształceń mają następujące znaki:  $\dot{\epsilon}_1 > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 > 0$ . Na swobodnej powierzchni bocznej  $CD$  pierścienia (rys. 10) znane są naprężenia  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_z = -2k$ . Linia  $CD$  nie jest charakterystyką i rodzina linii  $\alpha$  podchodzi do niej pod kątem  $\vartheta = 3/4\pi$ . Rozwiązując równania różniczkowe (1.1) dla odpowiednich zagadnień (Cauchy'ego, charakterystycznego, zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego i mieszanego) otrzymamy rozwiązanie dla naprężeń w polu  $CDEGF$  dla wypływu materiału na zewnątrz pierścienia. Z rozwiązania tego wynika, że w obszarze  $CDE$  istnieje jednorodny stan naprężenia i charakterystyki są prostoliniowe.

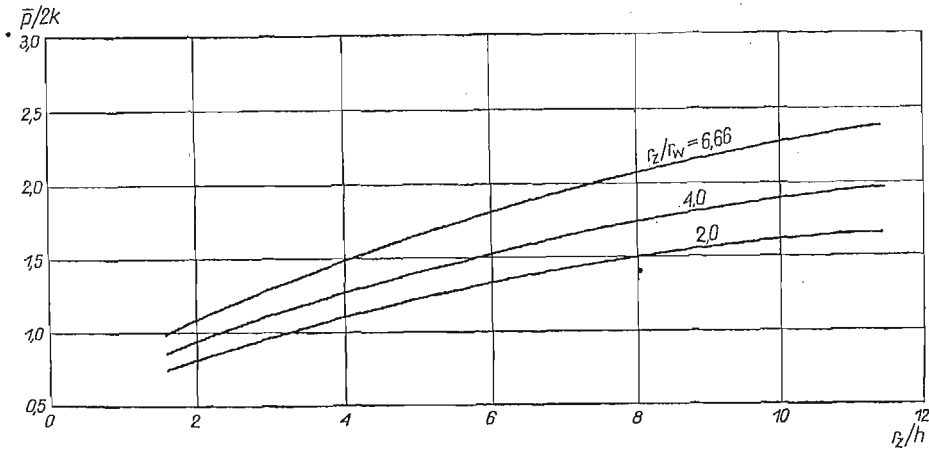
Przy wpływie materiału do środka pierścienia, w kierunku ujemnym osi  $r$ , prędkości płynięcia  $v_r < 0$  i prędkość odkształcenia obwodowego  $\dot{\epsilon}_\theta < 0$ . Wynika stąd, że  $\sigma_3 = \sigma_2$ ,



a główne prędkości odkształcenia spełniają następujące nierówności:  $\dot{\epsilon}_1 > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 < 0$ . Na swobodnej, wewnętrznej powierzchni bocznej (linia  $BK$ ) pierścienia (rys. 10) znane są również naprężenia  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_z = -2k$ . Pole naprężeń znajdujemy rozwiązując równania (1.1) ze znakami dolnymi.

Z równań tych wynika, że w całym polu  $BJK$  kąt nachylenia charakterystyk  $\alpha$  (linie równoległe do  $BJ$ ) wynosi  $\vartheta = 3/4\pi$ , a ciśnienie  $p$  jest zmienne. W polu  $BJK$  mamy charakterystyki prostoliniowe, ale niejednorodny stan naprężenia. Linia  $BHG$  i linia  $CFG$  wyprowadzane są tak daleko, aż będzie spełniony warunek równości naprężeń promieniodowych  $\sigma_r$  otrzymanych z rozwiązania dla wpływu materiału do środka i dla wypływu materiału na zewnątrz pierścienia.

Z rozwiązania statycznego ściskania pierścieni (rys. 10) obliczamy dolną ocenę nośności granicznej, którą pokazano na rys. 11.

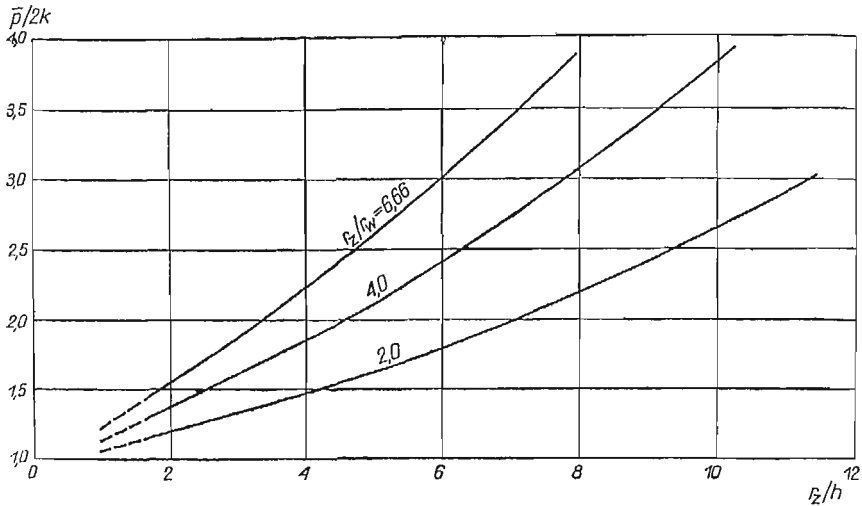


Rys. 11. Dolna ocena nośności granicznej pierścieni

Poniżej zostanie przedstawione rozwiązanie kinematyczne ściskania pierścieni. Ponieważ równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości (1.2) są takie same, jak równania różniczkowe charakterystyk dla naprężeń (1.1), to do pełnego wyznaczenia pola kinematycznego pozostaje jedynie wyznaczenie wektorów prędkości we wszystkich punktach siatki charakterystyk dla naprężeń. Inaczej mówiąc, na polu statycznym zostanie zbudowane pole kinematyczne.

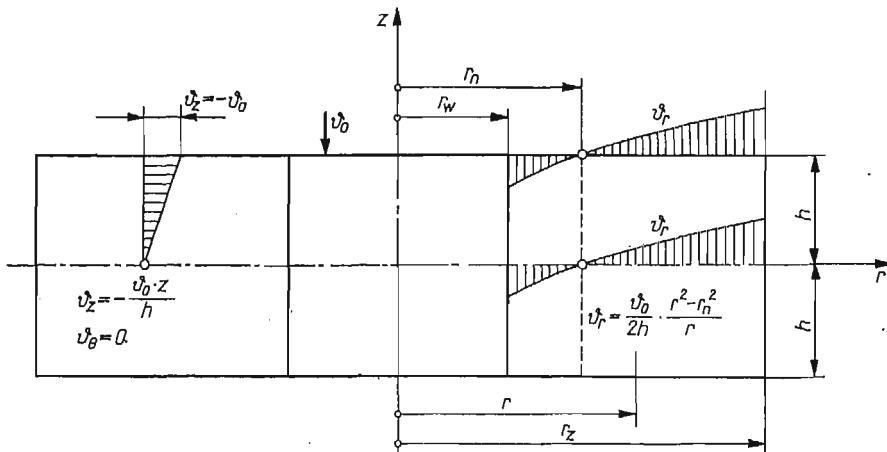
Pole kinematyczne zostaje zbudowane przy założeniu, że obszar  $BCFHG$  (rys. 10) jest sztywny i porusza się pionowo w dół z prędkością  $v_0$  tak jak narzędzie. Obszary  $CDEGF$  i  $BKJGH$  są plastyczne. Linia  $BHG$  jest charakterystyką  $\alpha$ , a linia  $CFG$  — charakterystyką  $\beta$ . Linie te są liniami nieciągłości dla prędkości. Najpierw należy wyznaczyć kinematykę dla wypływu materiału na zewnątrz, a następnie — do środka pierścienia posługując się równaniami (1.3) i (1.2). Z pola prędkości płynięcia wyznacza się pole prędkości odkształceń i następnie oblicza się górną ocenę nacisku jednostkowego [z równania (1.4)], którą pokazano na rys. 12.

Nacisk jednostkowy obliczony z pola statycznego (rys. 11), jak i z pola kinematycznego (rys. 12) wzrasta wraz ze wzrostem stosunków wymiarów pierścienia  $r_z/h$  i  $r_z/r_w$ . Inaczej mówiąc, nacisk ten jest tym większy, im pierścień jest cieńszy i im większą posiada powierzchnię kontaktową z płytami.



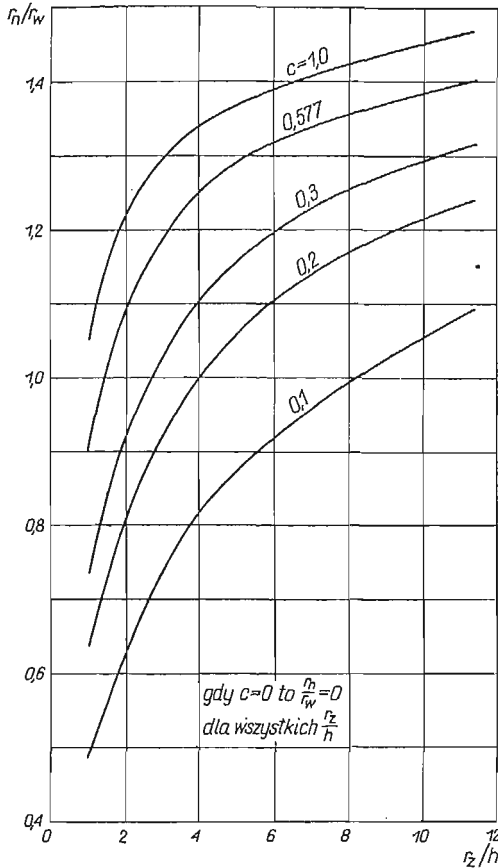
Rys. 12. Górna ocena nośności granicznej pierścienia

3.2. Obliczenie nacisku jednostkowego metodą założenia funkcji rozkładu prędkości. Podobnie jak w punkcie 2.2, przyjmijmy również liniową zmianę prędkości płynięcia wzdłuż osi z pierścienia. Rozkład prędkości płynięcia w pierścieniu pokazano na rys. 13. Z tak utworzonego pola prędkości płynięcia oblicza się górną ocenę nośności granicznej pierścienia. Z najmniejszej mocy dysypowanej ( $\partial D_w / \partial r_n = 0$ ) w pierścieniu znajduje się

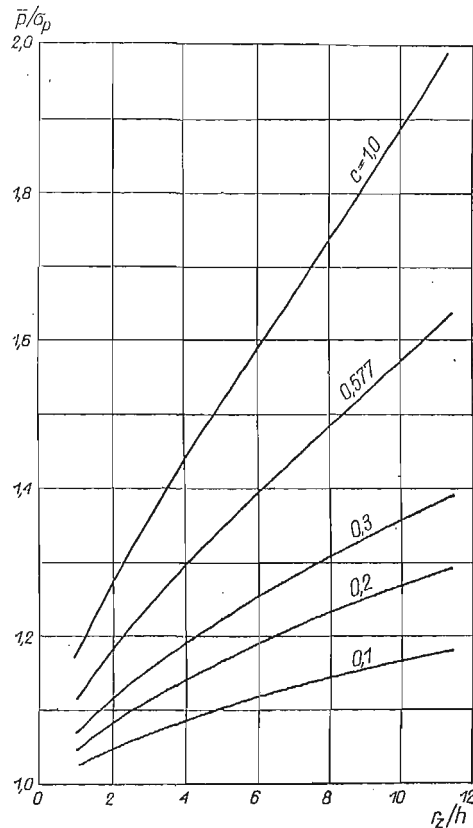


Rys. 13. Rozkład prędkości płynięcia w pierścieniu

promień neutralny  $r_n$ , przy pomocy którego oblicza się następnie najmniejszy nacisk jednostkowy będący górną oceną nośności. Zależność promienia neutralnego od geometrii pierścienia i współczynnika  $c$  uwzględniającego tarcie pokazano na rys. 14, a odpowiadającą mu nacisk jednostkowy — na rys. 15.



Rys. 14. Zależność  $r_n/r_w$  od  $r_z/h$  i współczynnika  $c$  dla  $r_z/r_w = 2,0$

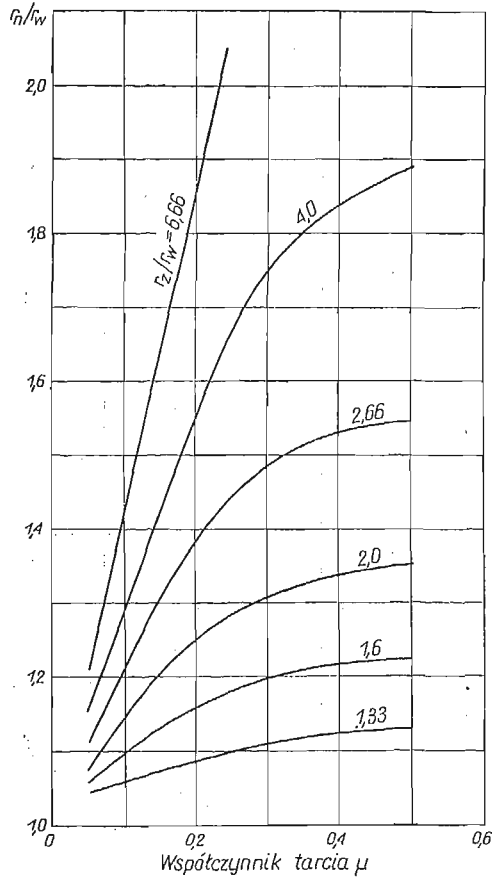


Rys. 15. Zależność nacisku jednostkowego  $\bar{p}/\sigma_p$  od  $r_z/h$  i współczynnika  $c$  dla  $r_z/r_w = 2,0$

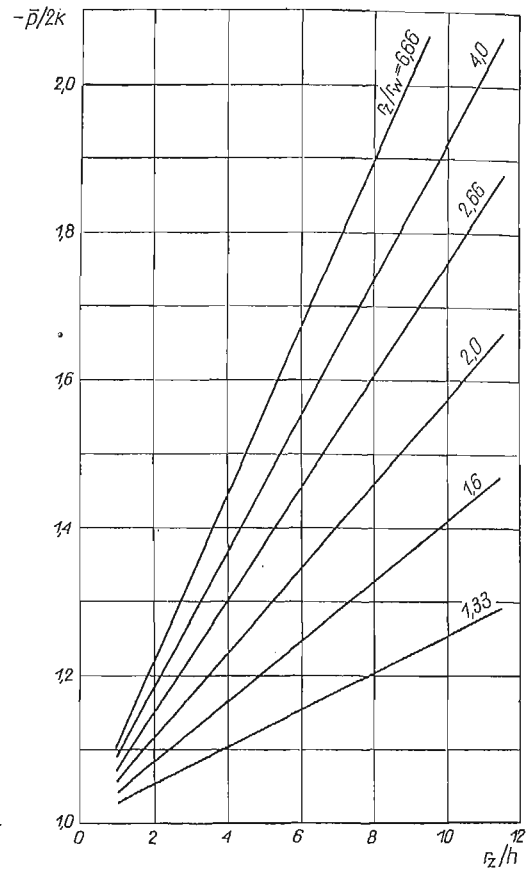
3.3. Uproszczona metoda obliczania średniego nacisku jednostkowego ściskania pierścieni. W tym punkcie zostanie przedstawiona uproszczona metoda obliczania nacisku jednostkowego ściskania pierścieni pomiędzy dwiema sztywnymi płytami z prędkością  $v_0$ . Metoda ta opiera się na następujących założeniach:

- 1) stan naprężenia w ściskanym pierścieniu zależy jedynie od promienia  $r$ ,
- 2) naprężenie w kierunku osi  $z$ ,  $\sigma_z$  jest na całej wysokości pierścienia  $H$  stałe i równe naciskowi jednostkowemu płyty,
- 3) naprężenie styczne  $\tau_{rz} = 0$  powoduje, że naprężenie  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  są głównymi,

4) przyjęcie hipotezy Haara-Kármána o pełnym uplastycznieniu materiału ( $\sigma_\theta = \sigma_r$  przy wypływie materiału na zewnątrz,  $\sigma_\theta = \sigma_z$  przy wpływie materiału do środka pierścienia).



Rys. 16. Zależność promienia neutralnego od współczynnika tarcia  $\mu$  i stosunku promieni pierścienia  $r_z/r_w$  dla  $r_z/h = 4$



Rys. 17. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów pierścienia ( $r_z/h$ ,  $r_z/r_w$ ) dla  $\mu = 0,3$

Rozwiązanie zagadnienia ściskania pierścienia polega na rozwiązaniu równań równowagi pierścienia dla płynięcia materiału na zewnątrz i dla płynięcia materiału do środka pierścienia

$$(3.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \pm \frac{2t}{H} = 0,$$

przy przyjęciu hipotezy Haara-Kármána o pełnym uplastycznieniu materiału

$$(3.2) \quad \sigma_\theta = \sigma_r \quad \text{lub} \quad \sigma_\theta = \sigma_z,$$

warunku plastyczności Treski

$$(3.3) \quad \sigma_r - \sigma_z = 2k$$

oraz jednostkowej siły tarcia na powierzchni kontaktu

$$(3.4) \quad t = -\mu\sigma_z$$

w przypadku tarcia poślizgowego i

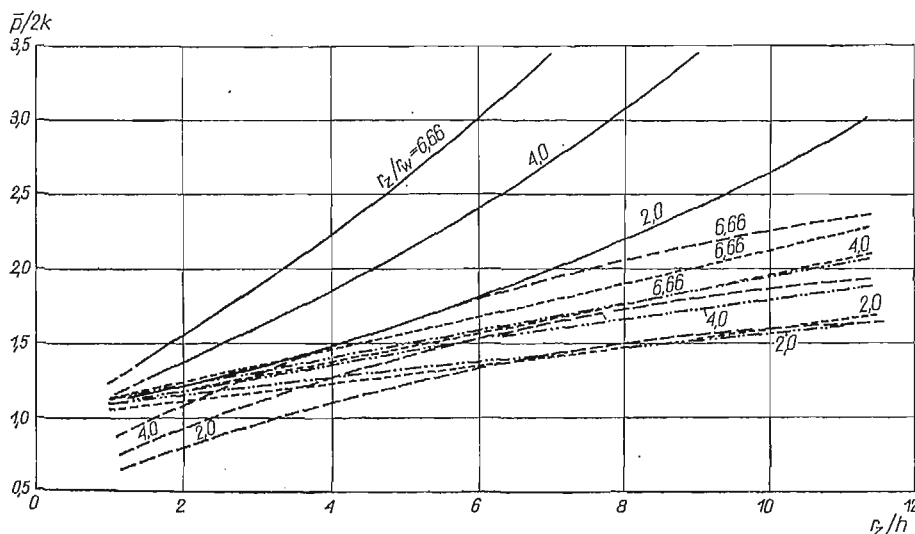
$$(3.5) \quad t = k$$

w przypadku tarcia przylgowego.

Na kontakcie pierścienia z płytą występuje tarcie poślizgowe tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność  $\sigma_z/2k < 1/2\mu$ , dla  $\sigma_z/2k \geq 1/2\mu$  występuje tarcie przylgowe.

Z rozwiązania równań [(3.1) do (3.5)] otrzymujemy po dwa zestawy równań dla naprężeń  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  (jeden dla płynięcia materiału na zewnątrz pierścienia, a drugi — do środka pierścienia) dla tarcia poślizgowego, mieszanego i przylgowego. Z przyrównania naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  otrzymanych dla wpływu materiału do środka pierścienia z naprężeniami dla wypływu materiału na zewnątrz pierścienia otrzymujemy promień neutralny  $r_n/r_w$  rozdzielający te dwie strefy płynięcia. Na rys. 16 pokazano zależność promienia neutralnego od geometrii pierścienia i warunków tarcia na kontakcie. Z całkowania naprężeń normalnych  $\sigma_z$  po powierzchni pierścienia otrzymujemy nacisk jednostkowy, który przykładowo pokazano na rys. 17.

**3.4. Analiza wyników obliczeń i ich porównanie.** Wyniki obliczeń teoretycznych przedstawione na rysunkach od 11 do 17 układają się w sposób przewidywany i zgodny z doświadczeniem. Nacisk jednostkowy wzrasta wraz ze wzrostem stosunków wymiarów pierścienia ( $r_z/r_w$ ) i ( $r_z/h$ ) i tarcia na kontakcie. Nacisk ten maleje, gdy powierzchnie czołowe pierścienia maleją, maleje również gdy wysokość pierścienia wzrasta. Na rys. 18 pokaza-



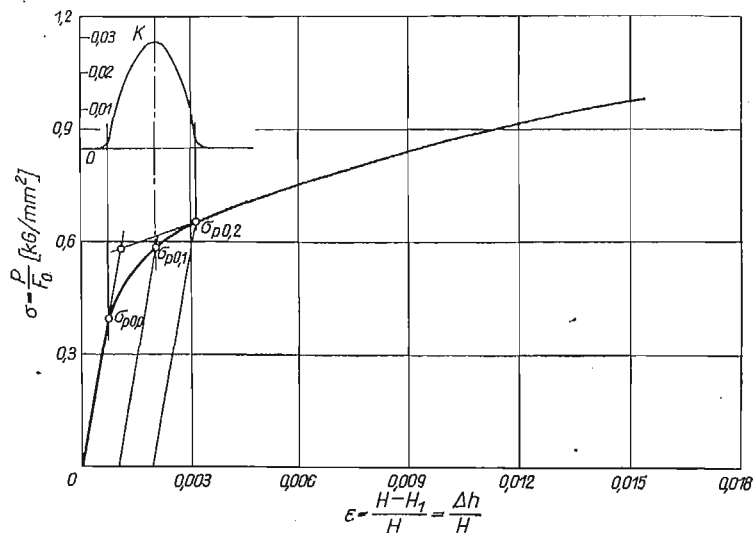
Rys. 18. Porównanie wyników obliczeń

— górną oceną obliczoną metodą charakterystyk, --- dolną oceną obliczoną metodą charakterystyk, - - - - - ocena obliczona metodą przybliżoną, - · - · - ocena obliczona metodą założenia funkcji

no porównanie wyników teoretycznych dla ściskania pierścieni. Jedynie górna ocena nośności obliczona metodą charakterystyk wykazuje większą rozbieżność wyników. Naciski obliczone metodą założenia funkcji i metodą uproszczoną w całym zakresie badanych stosunków wymiarów pierścieni są prawie identyczne.

#### 4. Wyniki doświadczeń

Przeprowadzone doświadczenia miały na celu z jednej strony zweryfikowanie założeń o postaci deformacji metalu próbki, z drugiej — porównanie ilościowej zgodności wyników doświadczalnych nacisków jednostkowych z wynikami teoretycznymi.



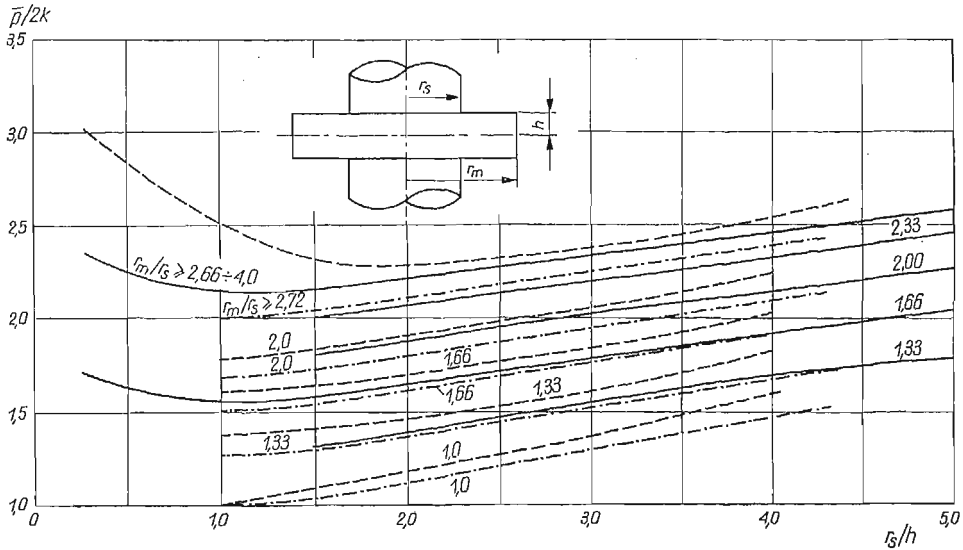
Rys. 19. Zależność  $\sigma-\epsilon$  dla badanego ołowiu;  $\dot{\epsilon} = 6 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$

Doświadczenia przeprowadzono na próbkach wykonanych z ołowiu Pb2 o charakterystyce pokazanej na rys. 19. Jak wiadomo, ołów jest jednym z metali technicznych o najlepszych własnościach plastycznych. Trzeba jednak pamiętać, że posiada on własności sprężyste, jest czuły na prędkość odkształcenia i wykazuje wzmocnienie. Właściwości plastyczne próbek zależą od technologii ich odlewania i wykonania i od stopnia zanieczyszczenia materiału. Z tych powodów wyniki doświadczalne mogą nawet znacznie różnić się od wyników teoretycznych.

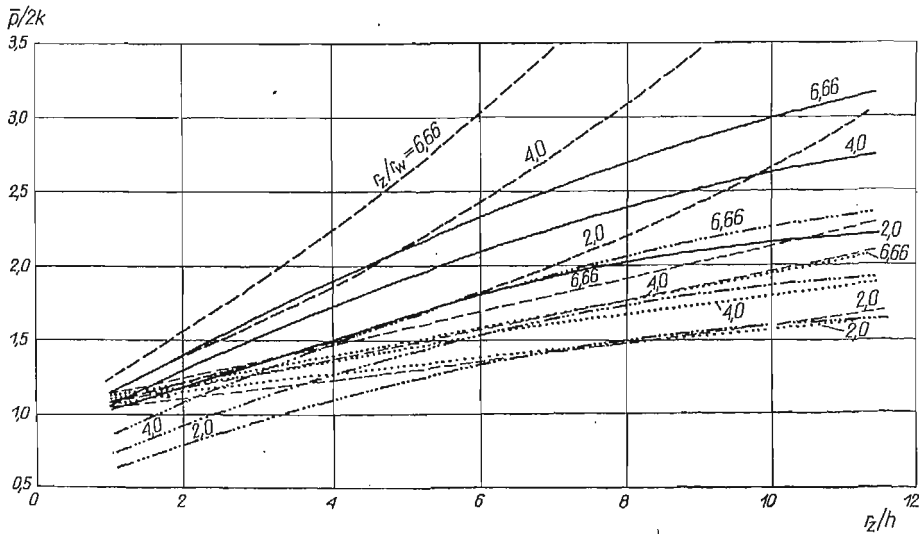
Jako kryterium uplastycznienia przyjęto naprężenie  $\sigma_p$  odpowiadające trwałemu odkształceniu  $\epsilon = 0,1\%$ . Otrzymane w ten sposób wartości pokrywają się z naprężeniami wyznaczonymi metodą przedłużenia prostych do przecięcia i z metodą największej krzywizny wykresu  $\sigma-\epsilon$  (rys. 19). Na rys. 20 pokazano porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi dla zadania wciskania stempli w krążek, a na rys. 21 pokazano po-

równanie dla ściskania pierścieni. Wyniki przedstawione na tych rysunkach są zgodne z twierdzeniami o nośności granicznej.

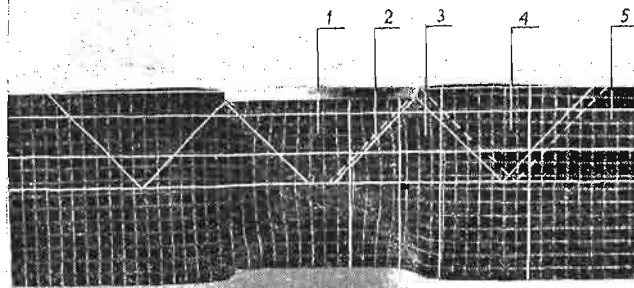
Jak wykazały doświadczenia, próbki deformują się w sposób podobny do założonego teoretycznie. Na rys. 22 pokazano deformację siatki kwadratowej przez wciśnięcie cylindrycznych stempli w krążek (prawie identyczna do założonej teoretycznie, rys. 3), natomiast



Rys. 20. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi dla wciśnięcia stempli w krążek  
 ————— wyniki doświadczalne, — — — — — górna granica obliczona metodą charakterystyk, — · — · — · — dolna granica obliczona metodą charakterystyk



Rys. 21. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi dla ściskania pierścieni,  
 ————— wyniki doświadczalne, — — — — — górna ocena obliczenia metodą charakterystyk, — · — · — · — dolna ocena obliczenia metodą charakterystyk, — · — — — — ocena obliczenia metodą przybliżoną, ····· ocena obliczenia metodą założenia funkcji

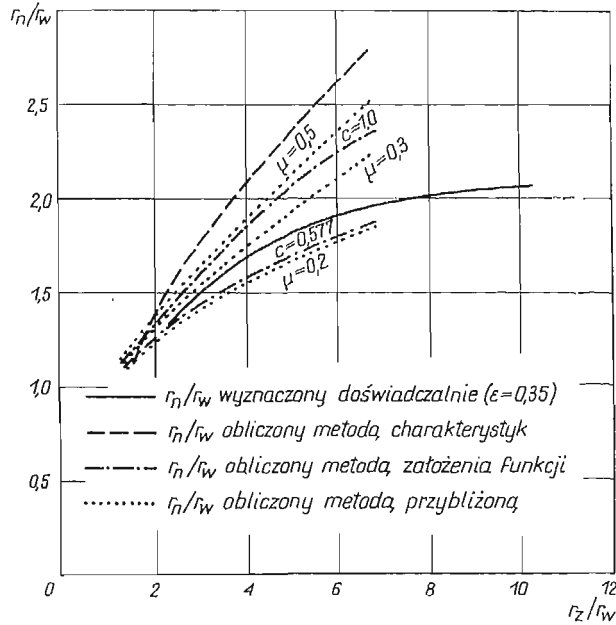


Rys. 22. Siatka kwadratowa po odkształceniu na próbce o wysokości  $H = 30$  mm



Rys. 23. Pierścienie z naniesioną siatką kwadratową po odkształceniu  $\epsilon_{gr} = 0,35$





Rys. 24. Porównanie teoretycznych promieni neutralnych z doświadczalnymi

na rys. 23 pokazano zdeformowaną siatkę ściskanych pierścieni, przy pomocy której można ocenić położenie promienia neutralnego. Jak wyniki doświadczalne korelują z wynikami teoretycznymi obliczonymi różnymi metodami pokazano na rys. 24.

### 5. Wnioski

W świetle przytoczonych wyników zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych należy stwierdzić, że metody teorii plastyczności obliczania nacisku jednostkowego oraz mechanizmu początkowego płynięcia metalu różnych procesów obróbki plastycznej dają wyniki dość dobrze potwierdzone przez doświadczenie. Najlepsze wyniki daje metoda charakterystyk, co wydaje się być spowodowane mniejszą liczbą założeń upraszczających w porównaniu z metodą założenia funkcji i metodą uproszczenia. Metoda charakterystyk powinna być stosowana do obliczeń procesów plastycznych, ponieważ nie jest ona pracochłonna, a jednak daje dużo informacji odnośnie nacisków jednostkowych i mechanizmu płynięcia metalu.

### Wykaz oznaczeń

- $\sigma_{ij}$  tensor naprężenia,
- $r, \theta, z$  współrzędne walcowe punktu,
- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  naprężenia w układzie współrzędnych walcowych,
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  naprężenia główne,
- $\sigma_p$  naprężenie uplastyczniające,
- $k$  granica plastyczności na ścianie,

$p$	średnie napężenie,
$\bar{p}$	średni nacisk jednostkowy,
$q$	ciśnienie wewnętrzne,
$\tau_s$	napężenie styczne na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
$v_r, v_z$	prędkość płynięcia w układzie współrzędnych walcowych,
$v_0$	prędkość ruchu narzędzia,
$v_\alpha, v_\beta$	prędkości płynięcia wzdłuż charakterystyk $\alpha$ i $\beta$ ,
$v_s$	prędkość styczna na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
$e_{ij}$	tensor prędkości odkształcenia,
$\dot{e}_r, \dot{e}_\theta, \dot{e}_z, \dot{e}_{rz}$	prędkości odkształceń w układzie współrzędnych walcowych,
$\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$	główne prędkości odkształceń,
$\dot{e}_I$	intensywność prędkości odkształceń,
$P$	siła zewnętrzna,
$D_w$	moc sił wewnętrznych,
$F_0$	powierzchnia czołowa narzędzia lub powierzchnia początkowa próbki,
$F_s$	powierzchnia nieciągłości lub powierzchnia kontaktu materiału z narzędziem,
$\vartheta$	kąt, jaki tworzy charakterystyka $\alpha$ z osią $r$ w płaszczyźnie $r, z$ ,
$c$	współczynnik tarcia,
$\mu$	współczynnik tarcia suchego Coulomba,
$t$	jednostkowa siła tarcia,
$r$	promień bieżący,
$r_s$	promień stempla,
$r_m$	promień zewnętrzny krążka,
$h$	połowa wysokości $H$ krążka lub pierścienia ( $H = 2h$ ),
$r_n$	promień neutralny w pierścieniu,
$r_w$	promień wewnętrzny pierścienia,
$r_z$	promień zewnętrzny pierścienia.

## Literatura cytowana w tekście

1. I. F. ADIE, I. M. ALEXANDER, *A graphical method of obtaining hodographs for upper-bound solutions to axi-symmetric problems*, Int. J. of Mech. Sci., 9, 6, (1967).
2. B. AVITZUR, *Forging of hollow discs*, Israel Jour. of Techn. 2, 3 (1964).
3. G. L. BARAYA, W. JOHNSON and R. A. SKATER, *The dynamic compression of circular cylinders of super-pure aluminium at elevated temperatures*, Appendix I. Int. J. of Mech. Sci., 9 (1965).
4. M. BURGODORF, *Über die Ermittlung des Reibwertes für Verfahren der Massivumformung durch den Ringstanchversuch*, Industrie Anzeiger, 89, 39 (1967) 799.
5. R. L. CARLSON, *Compression of viscoplastic disk*, Jour. of Basic Engin., December 1964.
6. L. DIETRICH, K. TURSKI, *Nośność graniczna rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem karbów kątowych*, Mech. Teor. i Stos., 4, 6, (1968).
7. G. EASON and R. T. SHIELD, *The plastic indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough circular punch*. Zeits. Ang. Mat. Phys., XI, (1960) 33—43.
8. M. GRZYMKOWSKI, Z. MRÓZ, *Metoda równowagi przy górnej ocenie sił w płaskich zagadnieniach obróbki plastycznej z uwzględnieniem tarcia Coulomba*, Arch. Hutn., XVII, 1, (1972).
9. M. GRZYMKOWSKI, *Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali*, IPPT. Praca doktorska. 1973.
10. J. B. HADDOW, *On the compression of a thin disk*, Int. J. Mech. Sci., 7, 10, (1965).
11. I. HALLING, L. A. MITCHELL, *An upper-bound solution for axi-symmetric extrusion*, Int. J. Mech. Sci., 7, 4 (1965).
12. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, PWT, Warszawa 1969.
13. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Изд. „Наука”, Москва 1969.

14. S. KOBAYASHI and E. G. THOMSEN, *Upper and lower bound solutions to axi-symmetric compression and extrusion problems*, Int. J. Mech. Sci., 7, 2 (1965).
15. H. KUDO, *Some analytical and experimental studies of axi-symmetric cold forging and extrusion I*, Int. J. Mech. Sci., 2, 1/2 (1960).
16. H. KUDO, *Some analytical and experimental studies of axi-symmetric cold forging and extrusion II*, Int. J. Mech. Sci., 3, 1/2 (1961).
17. K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *A theoretical analysis of plastic compression of short circular cylinders*, Arch. Mech. Stos., 5, 19 (1967).
18. K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, A. DRESCHER, *Analiza ściskania krótkich walców z materiału Conlomba*, Prace IPPT, 29, 1968. Także Int. J. Mech. Sci., (1971).
19. E. LEVIN, *Indentation pressure of a smooth circular punch*, Quart. Appl. Math., 13 (1955) 133—137.
20. Z. MRÓZ, *Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow*, Jour. of Appl. Mathem., and Phys. (ZAMP), 18, 2 (1967).
21. S. K. SAMANTA, *The application of the upper bound theorem to the prediction of indenting and compressing loads for circular and rectangular discs*, Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series, Nr 38, 1968.
22. W. SCHROEDER, D. A. WEBSTER, *Press forging thin sections effect of friction, area and thickness on pressures required*, J. Appl. Mech., 16 (1949) 289—294.
23. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proceedings of the Royal Society, A, 233 (1955) 267—286.
24. E. SIEBEL, *Stahl und Eisen*, 43 (1925) 1295.
25. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHER, J. MIASTKOWSKI, *Plastic flow of axially-symmetric notched bars pulled in tension*, Int. J. Solids Struct. 2 (1966), 543—554.
26. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
27. E. THOMSEN, C. T. YANG, S. KOBAYASHI, *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, The Macmillan Company, New York 1965.

## Р е з ю м е

## ИЗБРАННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

В работе проводится теоретический и экспериментальный анализ двух практически важных вопросов пластической обработки металлов: вдавливания в круглый диск двух противоположно расположенных пуансонов и сдавливания колец. Теоретический анализ проводился с применением соответственно двух и трех методов, причем определялись: удельный нажим и вид деформации при пластическом течении. Для теоретического анализа принята модель жестко-идельно-пластического материала и ассоциированный закон пластического течения. По ходу экспериментального анализа проверен механизм течения и сравнены полученные на свинцовых образцах результаты с теоретическими и определена их взаимозависимость.

В работе показано, что метод характеристик достаточно точен в отношении значений удельного нажима и вида деформации образца и может применяться для анализа процессов пластической обработки металлов.

## S u m m a r y

## SOME AXI-SYMMETRIC PROBLEMS OF PLASTIC WORKING OF METALS

In the paper theoretical and experimental analysis is given for two problems of practical importance, namely the indentation of two opposite punches into a disc and the ring compression. Theoretical analysis is developed using two or three different methods. Specific pressure and deformation mode of the plastic

process are found. The analysis is based on the model of rigid-perfectly plastic body and the associated flow rule. In the experiments flow patterns for lead specimens were investigated and compared with the theory.

In the paper it is shown that the characteristics method is sufficiently accurate for the evaluation of specific pressure and deformation modes of the specimen and it may be applied for the analysis of working processes of metals.

INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1973 r.*

---