

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE USTROJÓW KRATOWYCH W WARUNKACH PEŁZANIA
W NAWIĄZANIU DO TEORII WYBOCZENIA RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA

RENATA WOJDANOWSKA (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W ustrojach kratowych można uzyskać bardzo wysoki stopień wykorzystania materiału z punktu widzenia wytrzymałościowego. Można przede wszystkim, na drodze odpowiedniego doboru przekroju poszczególnych prętów dla każdej z góry zadanej konfiguracji kratownicy i zadanych stałych obciążeń skupionych w węzłach, uzyskać jednakowe naprężenia w prętach (kratownica równej wytrzymałości). Ponadto, na drodze doboru konfiguracji można spośród kratownic równej wytrzymałości wybrać konstrukcję najlepszą. Problem taki został sformułowany już w 1904 r. przez MICHELLA [12]. HEGEMIER i PRAGER [4] wykazali, że kratownice MICHELLA wykazują jednocześnie największą sztywność przy ustalonym pełzaniu. Przegląd problematyki optymalnego kształtowania kratownic podają prace WASIUTYŃSKIEGO i BRANDTA [22], REJTMANA i SZAPIRO [17] oraz SHEU i PRAGERA [20].

Warunek wytrzymałościowy nie jest jednak z reguły jedynym warunkiem pobocznym przy problemie kształtowania ustrojów kratowych. Ściskane pręty kratownicy mogą bowiem podlegać utracie stateczności i odpowiednie warunki powinny również być brane pod uwagę. Ujęcie takie zapoczątkował KIRSTE [9], [10], który określił optymalny kształt kilku prostych układów kratowych w nawiązaniu do wzorów Eulera i Johnsona-Ostenfelda dla prętów ściskanych. Obszerniejsza praca WOJDANOWSKIEJ-ZAJĄC i ŻYCKOWSKIEGO [23] dotyczyła kształtowania w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym w nawiązaniu do wzorów Ylinena, zezwalających na jednolite ujęcie całego badanego zakresu. Autorami dalszych prac są ACHMADALIEW [1] (numeryczne metody obliczeń), FIEDOROW [2] (uwzględnienie wstępnego sprężenia), RADCIG i ARSLAMOW [15], RAJEWSKI [16], SCHMIT i MORROW [21]. Optymalne kształtowanie kratownic przy uwzględnieniu warunków stateczności znalazło zastosowanie np. przy projektowaniu słupów linii wysokiego napięcia (MARTINI [11]). Ogólną problematykę optymalnego kształtowania przy uwzględnieniu warunków stateczności omawia praca ŻYCKOWSKIEGO [27].

W przypadku konstrukcji pracujących w podwyższonej temperaturze lub w przypadku konstrukcji wykonanych z materiałów, wykazujących własności reologiczne już w temperaturze pokojowej, niezbędne jest uwzględnienie tych własności przy optymalnym kształtowaniu. Klasyfikację problematyki optymalnego kształtowania w reologii i kilka prostych przykładów kształtowania podaje praca ŻYCKOWSKIEGO [26]; istotne różnice w stosunku do optymalizacji w zakresie sprężystym lub sprężysto-plastycznym polegają tu na odmiennym sformułowaniu warunków pobocznych. Dla elementów rozciąganych muszą to być z reguły warunki zabezpieczające przed pękaniem w warunkach pełzania, natomiast dla elementów ściskanych — warunki zabezpieczające przed wyboczeniem pełzającym. Istnieją obecnie dość liczne teorie zarówno zniszczenia przy pełzaniu

(zniszczenie ciągłe, kruche pękanie, model kombinowany), jak i wyboczenia pełzającego, tak że problematyka optymalnego kształtowania w reologii jest niezwykle bogata. Szczegółowych rozwiązań i ich wdrożeń do zagadnień przemysłowych jak dotąd jest bardzo niewiele.

Na zjawisko wyboczenia pełzającego zwrócono uwagę po raz pierwszy w 1946 r. w niemal jednocześnie opublikowanych pracach FREUDENTHALA [3], RŻANICYNA [19] i ROSSA [18]. Przegląd prac nad wyboczeniem pełzającym podają HULT [6], HOFF [5] i ŻYCKOWSKI [25]. Dwa zasadnicze kierunki teorii wyboczenia pełzającego przyjmują za kryterium nieograniczony wzrost ugięć lub prędkości ugięć pręta pierwotnie słabo zakrzywionego (KEMPNER-HOFF) oraz utratę stateczności pręta prostego, którego własności zmieniają się w czasie w wyniku pełzania (RABOTNOW-SZESTIERIKOW).

W obecnej pracy określimy optymalne konfiguracje kilku prostych ustrojów kratowych przy uwzględnieniu reologicznych własności materiału. Będą to ustroje, których kształtowanie w zakresie sprężysto-plastycznym omówiono w pracy [23], a kształtowanie w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu teorii Kempnera-Hoffa — w pracy [30]. Jako kryterium kształtowania przyjmiemy, jak zwykle, minimalną objętość (minimalny ciężar) kratownicy. Warunki poboczne dla prętów ściskanych będą warunkami stateczności w nawiązaniu do teorii RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA [14], natomiast dla prętów rozciąganych — warunkami wytrzymałościowymi w nawiązaniu do teorii kruchego pękania przy pełzaniu, sformułowanej przez KACZANOWA [7, 8]. Przyjmiemy przy tym pewien ustalony czas pracy konstrukcji, w zasadzie jednakowy zarówno dla prętów rozciąganych, jak i ściskanych; rozróżnienie tych czasów nie stworzyłoby istotnych trudności. Przy efektywnym przeprowadzaniu optymalizacji będziemy przy tym z reguły korzystali ze sformułowania dualnego, prowadzącego do prostych obliczeń; będziemy mianowicie szukali kresu górnego czasu pracy konstrukcji przy jej ustalonej objętości i przy przyjętych warunkach pobocznych (wytrzymałości i stateczności).

Oprócz optymalizacji konfiguracji kratownicy można sformułować problem optymalnej zmienności przekroju poszczególnych prętów. Dla prętów rozciąganych optymalny jest tu zawsze stały przekrój (pręty pryzmatyczne), natomiast optymalne pręty ściskane, narażone na wyboczenie, są z reguły prętami niepryzmatycznymi. Problem taki był rozważany w pracy ŻYCKOWSKIEGO i WOJDANOWSKIEJ-ZAJĄC [23]. W obecnej pracy ograniczymy się, dla uproszczenia, do rozpatrywania wyłącznie prętów pryzmatycznych o zadanym kształcie przekroju poprzecznego.

2. Sformułowanie warunków pobocznych optymalizacji

RABOTNOW i SZESTIERIKOW [14] badają stateczność pręta ściskanego, wykonanego z materiału podlegającego równaniu stanu o postaci ogólnej

$$(2.1) \quad \Phi(p, \dot{p}, \sigma) = 0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

oznacza odkształcenie niesprężyste, kropki u góry — różniczkowanie względem czasu t .

Naprężenia i odkształcenia przy ściskaniu przyjęto tu za dodatnie. Autorzy ograniczają się przy tym do następującej formy funkcji Φ

$$(2.3) \quad \Phi = \dot{p}p^\alpha - A\sigma^n = 0,$$

gdzie A , n i α są stałymi materiałowymi, zależnymi od temperatury.

Przy czystym ściskaniu, gdy $\sigma = \text{const}$, po scałkowaniu równania (2.3) i uwzględnieniu warunku początkowego $\sigma = E\varepsilon$, czyli $p = 0$ dla $t = 0$ otrzymujemy

$$(2.4) \quad p = (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha+1}} A^{\frac{1}{\alpha+1}} \sigma^{\frac{n}{\alpha+1}} t^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

W dalszym ciągu bada się możliwość istnienia równowagi w położeniu sąsiednim, nieskończenie mało wychylonym. RABOTNOW-SZESTIERIKOW stosowali w pracy [14] ogólne kinetyczne kryterium stateczności, które jednak w efekcie końcowym sprowadziło się do kryterium statycznego. Zmiany (wariacje) naprężeń i niesprężystych odkształceń można powiązać wynikającym z (2.1) równaniem

$$(2.5) \quad \lambda \delta\sigma + \mu \delta p + \nu \delta \dot{p} = 0,$$

gdzie

$$(2.6) \quad \lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \mu = \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \nu = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}}.$$

Wyrażając p w funkcji σ i ε , po wykorzystaniu hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego, $\varepsilon = \kappa z$, pomnożeniu przez z i scałkowaniu tego równania po powierzchni przekroju F otrzymuje się

$$(2.7) \quad (E\lambda - \mu)M - \nu \dot{M} + EJ(\mu\kappa + \nu\dot{\kappa}) = 0.$$

Warunkiem równowagi w położeniu sąsiednim jest $\dot{M} = \dot{\kappa} = 0$; przy uwzględnieniu warunków brzegowych swobodnego podparcia pręta po scałkowaniu równania (2.7) względem zmiennej x , otrzymuje się ostatecznie związek

$$(2.8) \quad \frac{P}{P_E} = \frac{1}{1 - E \frac{\lambda}{\mu}},$$

gdzie P_E oznacza siłę eulerowską dla pręta. Współczynniki λ i μ należy tu obliczyć ze wzorów (2.6). Równanie (2.8) z podstawieniem (2.3) oraz podstawieniem $t = t_*$, (t_* oznacza czas utraty stateczności pręta) określa związek między siłą P , a czasem t_* . Nie daje się on efektywnie rozwiązać z uwagi na P (bowiem λ i μ zależą również od P poprzez $\sigma = P/F$), natomiast daje się rozwiązać względem t_* :

$$(2.9) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha(P_E - P)}{nPE} \right]^{\alpha+1} \left(\frac{F}{P} \right)^{n-\alpha-1}.$$

Wzór ten przy podstawieniu $P = Nj_w$, gdzie N oznacza siłę podłużną w ściskanym pręcie kratownicy, a j_w — stopień bezpieczeństwa z uwagi na wyboczenie, będzie stanowił zasadniczy warunek poboczny dla prętów ściskanych przy optymalizacji; w sformułowaniu dualnym będziemy poszukiwali maksimum t_* przy ustalonej objętości kratownicy V .

KACZANOW [7], [8] proces zniszczenia pręta narażonego na rozciąganie w warunkach pełzania rozpatruje jako proces rozprzestrzeniania się mikroszczelin, powstających na tle

rosnących odkształceń pełzania. Wprowadza pewną funkcję skalarową $\Omega = F/F_0$, gdzie F oznacza aktualnie pracujący przekrój, $\Omega = 1$ w momencie początkowym, funkcja ta z upływem czasu maleje i w momencie kruchego zniszczenia $\Omega = 0$.

Podstawą teorii KACZANOWA jest hipoteza, iż zmiana tej funkcji w czasie opisana jest równaniem

$$(2.10) \quad \frac{d\Omega}{dt} = -A_1 \left(\frac{\sigma}{\Omega} \right)^m,$$

w którym $A_1 > 0$ i $m > 0$ — pewne stałe.

W wyniku całkowania powyższego równania przy $\sigma = \text{const}$, oraz warunku początkowym: $\Omega = 1$, $F = F_0$, KACZANOW otrzymał wyrażenie na czas zniszczenia kruchego

$$(2.11) \quad t_{**} = \frac{1}{(m+1)A_1 \sigma_0^m},$$

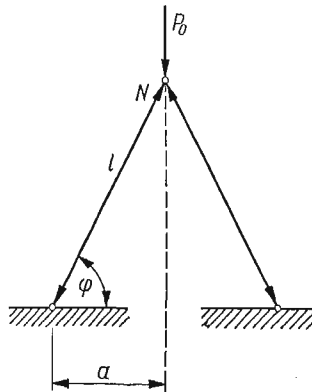
gdzie $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$.

Czas wyrażony wzorem (2.11) przyjmiemy za czas zniszczenia rozciąganych prętów układu kratowego, a więc za odpowiedni warunek poboczny przy problemie kształtowania.

W dalszym ciągu pracy przyjmiemy, że oba czasy t_* i t_{**} są sobie równe i określają czas pracy całej konstrukcji, gdyż projektowanie poszczególnych elementów na różne czasy wydawałoby się nieuzasadnione.

3. Optymalne kształtowanie ustroju kratowego, statycznie wyznaczalnego, dwuprętowego, przedstawionego na rys. 1

Rozstęp podpór $2a$ przyjęto za ustalony; poszukiwać będziemy optymalnego kąta φ w funkcji pewnego parametru smukłości ustroju kratowego β . Sformułowanie problemu «wprost» polega na poszukiwaniu takiego kąta φ , który zapewnia minimum objętości



Rys. 1.

kratownicy przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji t_* (czasie, po upływie którego siła P_0 wywołałaby utratę stateczności konstrukcji). Możliwe są tu dwa sformułowania dualne: poszukiwanie maksymalnego czasu t_* przy danej objętości V i przy danej

sile P_0 lub poszukiwanie maksimum siły P_0 przy danej objętości V i danym czasie t_* . Pierwsze z tych sformułowań dualnych okazuje się najprostsze i wykorzystamy je w niniejszym paragrafie. Wzór na siłę P w danym przypadku ma postać

$$(3.1) \quad P = j_w N = \frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi};$$

objętość ustroju kratowego wyrazi się wzorem

$$(3.2) \quad V = 2Fl = 2F \frac{a}{\cos \varphi},$$

skąd

$$(3.3) \quad F = \frac{V \cos \varphi}{2a}.$$

Siła eulerowska przy uwzględnieniu wzoru (3.3) wyrazi się następująco:

$$(3.4) \quad P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EV^2 \cos^4 \varphi}{4\xi a^2},$$

gdzie $\xi = \frac{F^2}{J}$ jest bezwymiarowym współczynnikiem kształtu przekroju. Podstawiając (3.2) i (3.3) do wyrażenia na czas pracy konstrukcji (2.9) otrzymujemy

$$(3.5) \quad t_* = \frac{\alpha^{\alpha+1}}{A(\alpha+1)(En)^{\alpha+1}} \left[\frac{\pi^2 EV^2 \cos^4 \varphi}{4\xi a^4} - \frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi} \right]^{\alpha+1} \frac{1}{\left(\frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi} \right)^n} \left(\frac{V \cos \varphi}{2a} \right)^{n-\alpha-1}.$$

Dla uproszczenia zapisu związku (3.5) wprowadzimy oznaczenia

$$(3.6) \quad \beta = \frac{2P_0 j_w \xi a^4}{\pi^2 EV^2},$$

$$(3.7) \quad \gamma = \frac{\alpha^{\alpha+1} \pi^{2(\alpha+1)} V^{n+\alpha+1}}{A(\alpha+1)(\xi n)^{\alpha+1} P_0^n j_w^n a^{n+3(\alpha+1)} 2^{\alpha+1}}$$

i wtedy (3.5) zapiszemy następująco:

$$(3.8) \quad t_* = \gamma (1 - \beta \sin^{-1} \varphi \cos^{-4} \varphi)^{\alpha+1} \sin^n \varphi (\cos \varphi)^{n+3\alpha+3}.$$

Rozpatrując przedział zmienności kąta φ , $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, stwierdzamy, że $t_*(0) = t_*\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ oraz $t_* \geq 0$; zakładając zgodnie z przyjętym sformułowaniem dualnym jak najdłuższy czas pracy konstrukcji, wykorzystamy warunek analitycznego maksimum

$$(3.9) \quad \frac{dt_*}{d\varphi} = 0.$$

Prowadzi on do równania określającego optymalny kąt φ w funkcji parametru smukłości β . Jest to dość złożone równanie trygonometryczne z uwagi na niewiadomą $\varphi = \varphi(\beta)$, natomiast z łatwością określimy funkcję odwrotną $\beta = \beta(\varphi)$

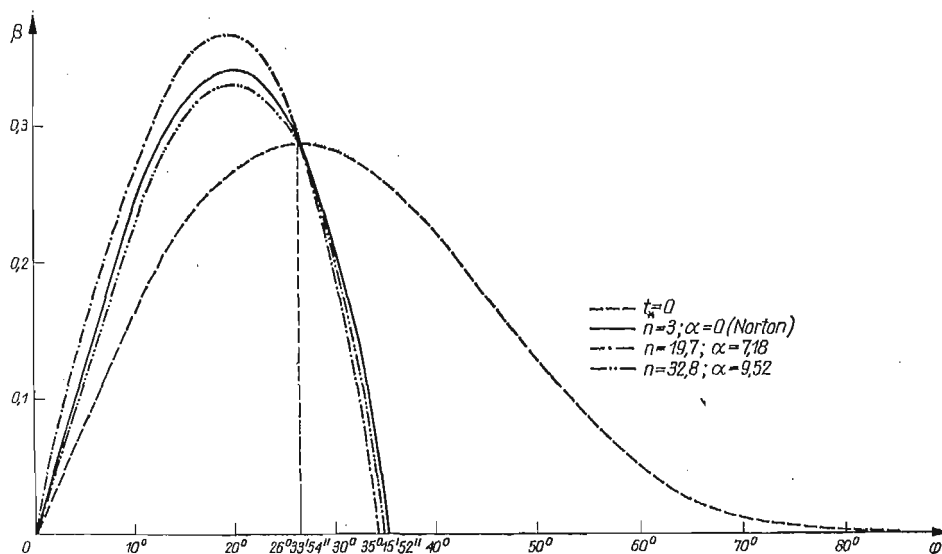
$$(3.10) \quad \beta = \frac{n \operatorname{ctg} \varphi - (n+3\alpha+3) \operatorname{tg} \varphi}{\sin^{-1} \varphi \cos^{-4} \varphi / n \operatorname{ctg} \varphi - (n+3\alpha+3) \operatorname{tg} \varphi / - (\sin^{-2} \varphi \cos^{-3} \varphi - 4 \cos^{-5} \varphi) (\alpha+1)}.$$

Zależność powyższą dla różnych współczynników n i α ilustruje rys. 2. Współczynniki n i α zaczerpnięto z pracy RABOTNOWA, ŻUKOWA, CZURIKOWA [24] i zebrano w tablicy 1.

Tablica 1

Temperatura	Materiał: miedź	
	n	α
165°C	46,1	14,20
200°C	32,8	9,52
235°C	32,2	9,92
270°C	19,7	7,18

Na rys. 2 nakreślono również krzywą $\beta = \beta(\varphi)$ dla $n = 3$ i $\alpha = 0$. Jest to przypadek graniczny, $\alpha \rightarrow 0$; prawo pełzania (2.3) przechodzi w prawo Nortona. Teoria RABOTNOWA-



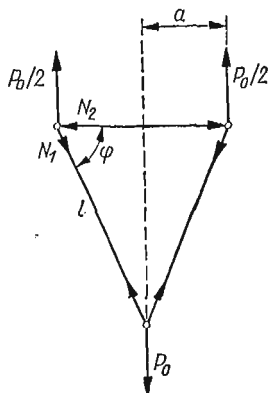
Rys. 2.

SZESTIERIKOWA nie prowadzi wtedy do efektywnych wyników, ponieważ czas krytyczny w każdym razie zmierza do zera. Tym niemniej na drodze przejścia granicznego można określić optymalną graniczną konfigurację ustroju kratowego.

4. Optymalne kształtowanie trójprętowego, symetrycznego, statycznie wyznaczalnego ustroju kratowego, przedstawionego na rys. 3

Odległość a , podobnie jak poprzednio, przyjmijmy za ustaloną. W rozpatrywanym przypadku poszukiwać będziemy takiego kąta φ , który zapewnia minimum objętości kratownicy, przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji (czasie, po którym siła

$P_0 j_w$ wywołuje utratę stateczności konstrukcji). Przyjmijmy, że czas t_* , po upływie którego następuje utrata stateczności kratownicy spowodowana utratą stateczności pręta narażonego na wyoboczenie jest równy czasowi t_{**} , po którym nastąpi kruche pęknięcie prętów narażonych na rozciąganie.



Rys. 3

Objętość kratownicy określi tu wzór

$$(4.1) \quad V = 2F_1 \frac{a}{\cos \varphi} + 2F_2 a.$$

Siły podłużne w prętach kratownicy są równe

$$(4.2) \quad N_1 = \frac{P_0}{2 \sin \varphi}, \quad N_2 = \frac{F_0}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Wskaźnikiem „1” oznaczono wszystkie wielkości charakteryzujące pręty narażone na rozciąganie, a wskaźnikiem „2”, wielkości charakteryzujące pręty narażone na wyoboczenie.

Siła eulerowska i siła podłużna w pręcie (przy współczynniku bezpieczeństwa j_w) wyrażają się następująco:

$$(4.3) \quad P_E = \frac{\pi^2 E F_2^2}{4 \xi a^2}, \quad P = \frac{j_w P_0}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Czas pracy kratownicy (2.9) będzie miał postać

$$(4.4) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left(\frac{\alpha}{nE} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\pi^2 E}{2P_0 j_w \xi a^2} F_2^2 \operatorname{tg} \varphi - 1 \right]^{\alpha+1} \left[\frac{2F_2 \operatorname{tg} \varphi}{j_w P_0} \right]^{n-\alpha-1}.$$

Zajmiemy się obecnie obliczeniami pręta narażonego na rozciąganie. Wykorzystamy wzór na czas zniszczenia przy rozciąganiu (2.11) podany przez KACZANOWA [7];

$$(4.5) \quad t_{**} = \frac{1}{(m+1) A_1 \sigma_0^m},$$

gdzie m jest pewnym wykładnikiem potęgowym; A_1 — pewną stałą, σ_0 jest naprężeniem w prętach rozciąganych, odpowiadającym sile działającej mnożonej przez współczynnik bezpieczeństwa z uwagi na pęknięcie j_p

$$(4.6) \quad \sigma_0 = \frac{j_p N_1}{F_1} = \frac{j_p P_0}{2F_1 \sin \varphi}.$$

Wprowadzimy nowe oznaczenie

$$(4.7) \quad \beta_1 = \frac{2^m}{(m+1)A_1 j_p^m P_0^m}.$$

Wtedy (4.5) zapiszemy krótko

$$(4.8) \quad t_{**} = \beta_1 F_1^m \sin^m \varphi.$$

Ze związku (4.8) obliczymy F_1 i wprowadzimy do (4.1); otrzymamy wyrażenie na objętość

$$(4.9) \quad V = V(\varphi, F_2) = 2a \left[\left(\frac{t_{**}}{\beta} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} + F_2 \right].$$

Poszukujemy minimum tej funkcji z warunkiem pobocznym (4.4). Rugowanie warunku pobocznego uzyskamy przez stosowną parametryzację. Wprowadzamy mianowicie bezwymiarowy parametr:

$$(4.10) \quad u = \frac{\pi^2 E}{2P_0 j_w \xi a^2} F_2^2 \operatorname{tg} \varphi - 1$$

i wstawiamy go do (4.4), skąd obliczamy $\operatorname{tg} \varphi$

$$(4.11) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{S}{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}},$$

gdzie stała S jest określona wzorem

$$(4.12) \quad S = \frac{P_0 j_w \pi^2}{2a^2 \xi} \left[\frac{n}{\alpha} \right]^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} [A(\alpha+1)]^{\frac{2}{n-\alpha-1}} E^{\frac{n+\alpha+1}{n-\alpha-1}} t_*^{\frac{2}{n-\alpha-1}}$$

i ma znaczenie bezwymiarowej siły.

Wstawiamy $\operatorname{tg} \varphi$ określony wzorem (4.11) i obliczony przekrój F_2 z (4.10) do wyrażenia na objętość (4.9); dzielimy równanie przez $2a \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{1/m}$ i otrzymujemy bezwymiarową objętość

$$(4.13) \quad \tilde{V} = \tilde{V}(S, u) = (u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} \left[1 + \frac{S^2}{(u+1)^2 u^{\frac{4(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}} + \frac{1}{Bu^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}} \right],$$

gdzie B jest pewną stałą, zależną od stałych materiałowych i czasu pracy konstrukcji, określoną następująco:

$$(4.14) \quad B = \left[\frac{En}{\alpha} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1-n}} [A(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha+1-n}} [A_1(m+1)]^{\frac{1}{m}} t_*^{\frac{1}{\alpha+1-n} + \frac{1}{m}}.$$

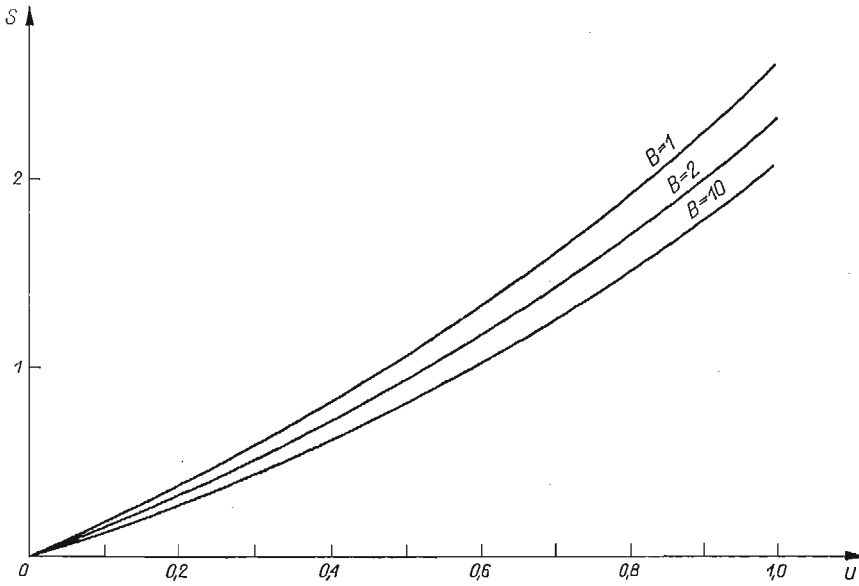
Poszukujemy teraz minimum objętości \tilde{V} jako funkcji jednej zmiennej u bez warunku pobocznego

$$(4.15) \quad \frac{d\tilde{V}}{du} = 0,$$

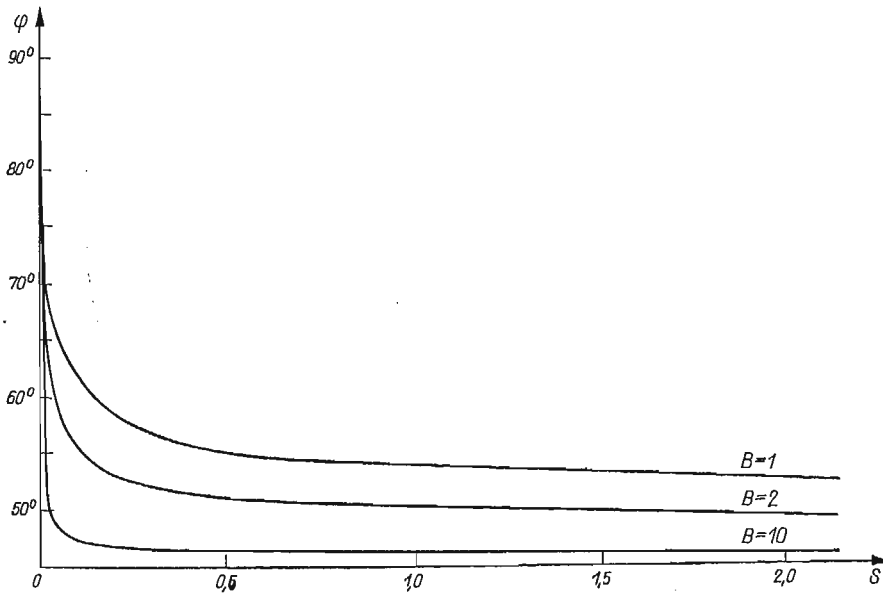
co prowadzi do równania

$$(4.16) \quad S^2 = (u+1)^2 \frac{1}{\frac{4(\alpha+1)}{\alpha+1-n}} \left[1 + \frac{1}{B} u^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1-n}} \frac{(\alpha+1)(u+1) + u(n-\alpha-1)}{2(\alpha+1)(u+1) + u(n-\alpha-1)} \right]$$

Ogólne rozwiązanie równania (4.16) ze względu na poszukiwany parametr u nie jest możliwe. Wyniki przedstawimy jednak graficznie, dysponując funkcją odwrotną $S = S(u)$.



Rys. 4.

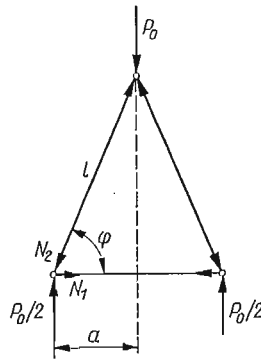


Rys. 5.

Zależność $S = S(u)$ dla ustalonej wartości parametru B ujęto na rys. 4. Zależność $\varphi = \varphi(S)$ dla ustalonego parametru B przedstawiono na rys. 5. Zależność $\varphi = \varphi(S)$ jest zależnością optymalnego kąta φ w funkcji parametru S dla ustalonego B . Wykresy wykonano dla $n = 32, 8$; $\alpha = 9,52$ (tablica 1).

5. Optymalne kształtowanie trójprętowego, symetrycznego, statycznie wyznaczalnego układu kratowego, przedstawionego na rys. 6

Obecnie zajmiemy się optymalnym kształtowaniem kratownicy, omówionej w rozdz. 4, ale poddanej działaniu sił o przeciwnym zwrocie. Tym razem pręt poziomy jest rozciągany, a pręty ukośne — ściskane. Podobnie jak w poprzednio rozpatrywanym problemie,



Rys. 6.

postaramy się określić optymalny kąt φ , tj. taki, który zapewni minimum objętości kratownicy V przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji t_* . Siły działające w prętach kratownicy zapiszemy

$$(5.1) \quad N_1 = \frac{P_0}{2} \operatorname{ctg} \varphi, \quad N_2 = \frac{P_0}{2 \sin \varphi}.$$

Objętość kratownicy określi tu wzór

$$(5.2) \quad V = 2F_2 \frac{a}{\cos \varphi} + 2F_1 a.$$

Siła eulerowska i siła podłużna w pręcie (przy współczynniku bezpieczeństwa j_w) wyrażają się tutaj wzorem

$$(5.3) \quad P_E = \frac{\pi^2 E F_2^2}{\xi a^2} \cos^2 \varphi; \quad P = \frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi}.$$

Tok obliczeń jest podobny, jak w przypadku poprzednim. Wzór na czas pracy kratownicy (2.9) będzie miał postać

$$(5.4) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha}{En} \right]^{\alpha+1} \left[\frac{2\pi^2 E}{\xi a^2 j_w P_0} F_2^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 1 \right]^{\alpha+1} \left[\frac{2F_2 \sin \varphi}{j_w P_0} \right]^{n-\alpha-1}$$

W przypadku pręta rozciąganego wykorzystamy wzór (2.11), w którym σ_0 wyrazi się następująco:

$$(5.5) \quad \sigma_0 = \frac{j_p N_1}{F_1} = \frac{j_p P_0}{2F_1} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Po obliczeniu F_1 z (2.11) i wprowadzeniu do (5.2) otrzymujemy wyrażenie na objętość kratownicy

$$(5.6) \quad V = V(\varphi, F_2) = 2a \left[\left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{m}} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{F_2}{\cos \varphi} \right].$$

Poszukujemy minimum tej funkcji z warunkiem pobocznym (5.4). Wprowadzimy, podobnie jak poprzednio, bezwymiarowy parametr

$$(5.7) \quad u = \frac{2\pi^2 F}{\xi a^2 j_w P_0} F_2^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 1,$$

uzyskując w ten sposób wyrugowanie warunku pobocznego.

W dalszym ciągu obliczamy F_2 z (5.7), wprowadzamy obliczone $F_2 = F_2(u, \varphi)$, oraz u określone związkiem (5.7) do wyrażenia (5.4) i otrzymujemy równanie

$$(5.8) \quad \frac{\sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{4S}{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}}.$$

Z równania (5.8) możemy obliczyć $\sin \varphi$ jako funkcje S i u

$$(5.9) \quad \sin \varphi = \frac{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}}{8S} \left[\sqrt{1 + \frac{64S^2}{u^{\frac{4(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} (u+1)^2}} - 1 \right].$$

Równanie (5.6) dzielimy stronami przez $2a \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{1/m}$ i do niego wprowadzamy (5.9), otrzymując ostatecznie wyrażenie na bezwymiarową objętość \tilde{V}

$$(5.10) \quad \tilde{V} = \frac{1}{2B\sqrt{S}} \frac{\sqrt{u+1}}{(1 - \sin^2 \varphi)\sqrt{\sin \varphi}} + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi},$$

gdzie $\sin \varphi$ określony jest przez (5.9), a S i B podane są przez (4.12) i (4.14).

Poszukujemy minimum objętości \tilde{V} już jako funkcji (złożonej) tylko jednej zmiennej,

$$\tilde{V} = \tilde{V}(u, \varphi(u)) : \frac{d\tilde{V}}{du} = 0.$$

Otrzymujemy w konsekwencji równanie:

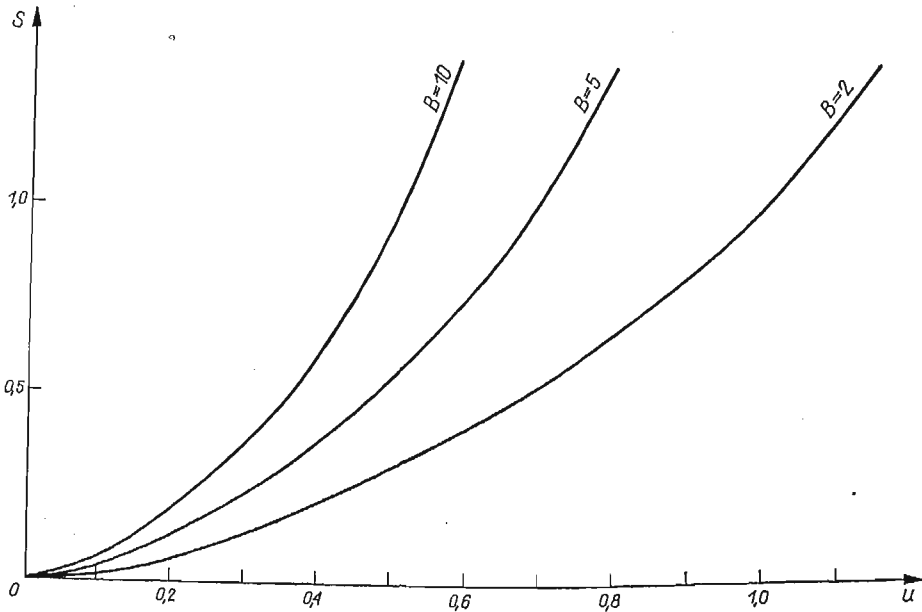
$B =$

$$\frac{\sin^2 \varphi - \frac{(\alpha+1)(u+1)}{2(\alpha+1)(u+1) + u(n-\alpha-1)} (1 - 3\sin^2 \varphi) - \frac{(n-\alpha-1)u}{2(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u} (1 - \sin^2 \varphi)}{u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} (1 - \sin^2 \varphi)},$$

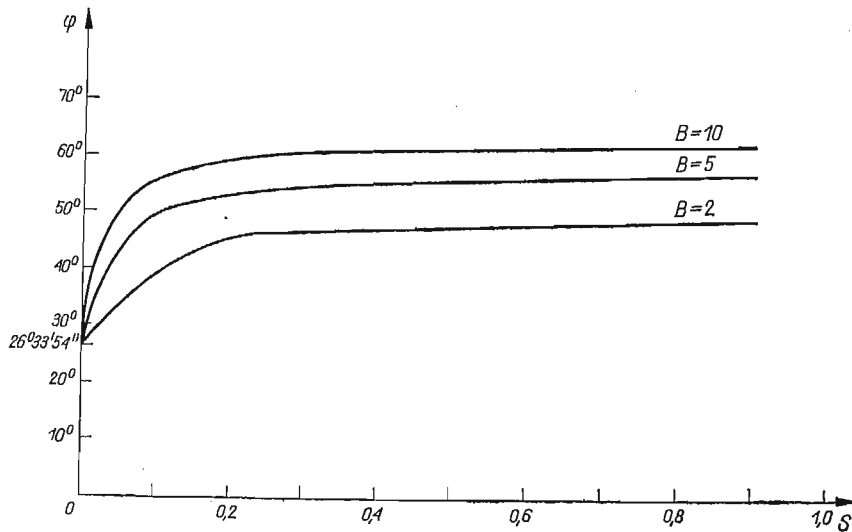
w którym $\sin \varphi$ określony jest przez (5.9).

Podobnie, jak poprzednio, równanie to nie daje się rozwiązać względem u , lecz korzystając z funkcji odwrotnej względem poszukiwanej sporządzono wykresy: $S = S(u)$, rys. 7 i $\varphi = \varphi(S)$, rys. 8.

Obliczenia wykonano, podobnie jak poprzednio dla $n = 32,8$; $\alpha = 9,52$. Zależność $\varphi = \varphi(S)$ dla ustalonego B jest zależnością optymalną kąta φ w funkcji parametru S .



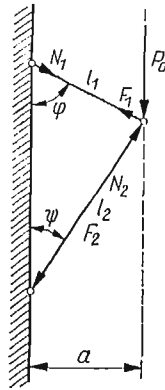
Rys. 7.



Rys. 8.

6. Optymalne kształtowanie dwuprętowego, statycznie wyznaczalnego układu kratowego, przedstawionego na rys. 9

Odległość a przyjmijmy za ustaloną, optymalne kształtowanie sprowadza się do doboru kątów φ i ψ oraz powierzchni przekrojów F_1 i F_2 . Problem jest o tyle trudniejszy od poprzednio rozważonych, że układ nie jest symetryczny i mamy tu o jedną niewiadomą



Rys. 9.

więcej (kształtowanie parametryczne o dwóch stopniach swobody). Postaramy się określić optymalne kąty φ i ψ , takie, które zapewnią minimum objętości kratownicy V przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji t_* . Siły podłużne w prętach kratownicy wyrażają się następująco:

$$(6.1) \quad N_1 = \frac{P_0}{\sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}, \quad N_2 = \frac{P_0}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Objętość V można wyrazić wzorem

$$(6.2) \quad V = F_1 \frac{a}{\sin \varphi} + F_2 \frac{a}{\sin \psi}.$$

Siłę eulerowską i siłę podłużną w pręcie (przy współczynniku bezpieczeństwa j_w) zapiszemy następująco:

$$(6.3) \quad P_E = \frac{\pi^2 E F_2^2}{\xi a^2} \sin \psi; \quad P = j_w N_2 = \frac{j_w P_0}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Podobnie jak poprzednio, wprowadzimy (6.3) do (2.9) i czas pracy konstrukcji związany z wyboczeniem pelzającym prętów ściskanych zapiszemy

$$(6.4) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left(\frac{\alpha}{En} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\pi^2 E}{j_w P_0 \xi a^2} F_2^2 \sin^3 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) - 1 \right]^{\alpha+1} \left[\frac{F_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}{j_w P_0} \right]^{n-\alpha-1}.$$

W przypadku pręta rozciąganego aktualny jest wzór (2.11), ale σ_0 wyraża się teraz przez

$$(6.5) \quad \sigma_0 = \frac{j_p N_1}{F_1} = \frac{j_w P_0}{F_1 \sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Obliczone F_1 z (2.11) wprowadzamy do (6.2):

$$(6.6) \quad V = a \left[2 \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} + \frac{F_2}{\sin \psi} \right] = V(\varphi, \psi, F_2).$$

Poszukujemy minimum tej funkcji trzech zmiennych z jednym warunkiem pobocznym (6.4). Podobnie jak poprzednio, wprowadzimy bezwymiarowy parametr u :

$$(6.7) \quad u = \frac{\pi^2 E F_2^2 \sin^3 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}{a^2 j_w P_0 \xi} - 1$$

i z (6.7) obliczamy F_2 , a następnie obliczone F_2 i (6.7) wstawiamy do (6.4) otrzymując związek

$$(6.8) \quad \frac{\sin \psi}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi} = \frac{u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} (u+1)}{8S},$$

w którym S podane jest przez (4.12).

Obliczony przekrój F_2 z (6.7) wstawiamy do (6.6) i po podzieleniu równania przez $a \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{m}}$ otrzymujemy bezwymiarową objętość kratownicy \tilde{V}

$$(6.9) \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\varphi, \psi, u) = \frac{2}{\sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} + \frac{1}{B \sqrt{2S}} \frac{1}{\sin^2 \psi} \sqrt{\frac{u+1}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}}.$$

Równanie (6.8) pozwala obliczyć $\sin \varphi$ i $\operatorname{ctg} \varphi$ jako funkcje ψ i u , a więc wyrugować φ ; po wprowadzeniu obliczonych z (6.8) $\sin \varphi$ i $\operatorname{ctg} \varphi$ do (6.9) otrzymujemy $\tilde{V} = \tilde{V}(u, \psi)$:

$$(6.10) \quad \tilde{V} = \frac{16S \sin \psi}{(u+1)u} - 4 \operatorname{ctg} \psi + \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{4S \sin^3 \psi} \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right].$$

Poszukujemy $\tilde{V} = \tilde{V}_{\min}$, przy czym \tilde{V} jest teraz funkcją dwu zmiennych niezależnych ψ i u . Obliczamy zatem

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} = 0,$$

co zapiszemy następująco:

$$(6.11) \quad \frac{16S \cos \psi}{(u+1)u} + \frac{4}{\sin^2 \psi} + \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{4S} \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right] (-3) \frac{\cos \psi}{\sin^4 \psi} = 0,$$

$$(6.12) \quad 16S \sin \psi (-1) \left[u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} (u+1) \right]^{-2} \left[\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1} (u+1) u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}-1} + u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} \right] + \\ + \frac{1}{4S \sin^3 \psi} \left\{ \left[\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1} (u+1) u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}-1} + u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \right] \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right] + \right. \\ \left. + (u+1) u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \frac{\alpha+1}{n-\alpha-1} u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}-1} \right\} = 0.$$

Równanie (6.12) pozwala wyrazić $\sin^2\psi$ jako funkcję zmiennej u , parametrów S i B

$$(6.13) \quad \sin^2\psi = \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{8S} \left[u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \frac{(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u}{2(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u} \right]^{1/2}.$$

Równania (6.12) i (6.13) pozwalają określić parametr smukłości S i funkcję kąta ψ jako funkcje zmiennej u i parametru B

$$(6.14) \quad S(u, B) = \frac{4(WU^2 - Z)^2}{(WU^2 - Z)^2 - 16U^2},$$

$$(6.15) \quad \sin\psi = 1 - \frac{16U^2}{(WU^2 - Z)^2}.$$

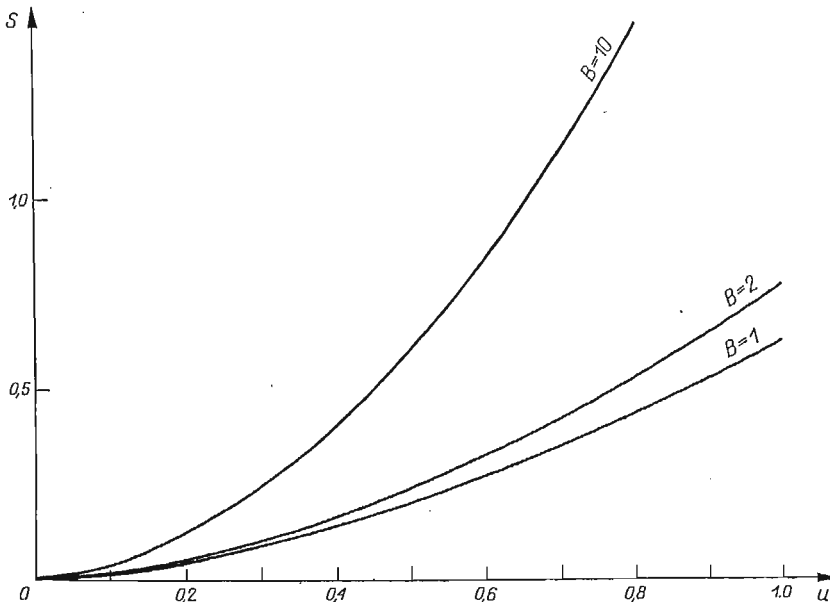
w których U , W i Z określane są następująco:

$$U = U(u, B) = \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{8} \left[u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \frac{(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u}{2(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u} \right]^{1/2},$$

$$(6.16) \quad W = W(u) = \frac{16}{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}},$$

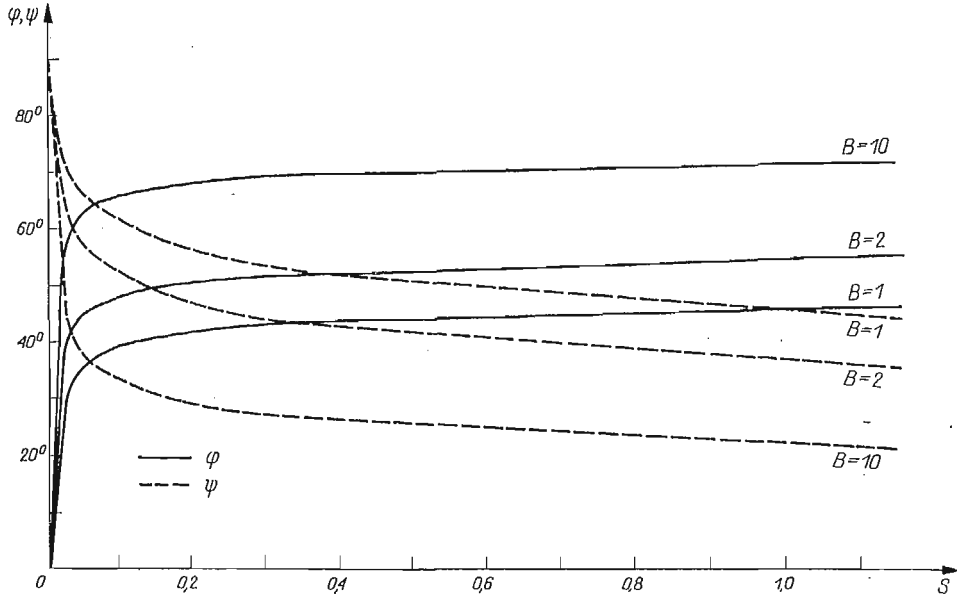
$$Z = Z(u, B) = \frac{3u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}(u+1)}{4} \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right].$$

Są to wielkości stałe, zależne od stałych materiałowych i geometrii układu.



Rys. 10.

Związek pomiędzy kątem ψ i φ podany jest przez (6.8). Na podstawie uzyskanych wzorów i zależności sporządzono wykresy: $S = S(u)$ przy ustalonej wartości parametru B (rys. 10) oraz $\varphi = \varphi(S)$ i $\psi = \psi(S)$ też przy ustalonej wartości B (rys. 11).



Rys. 11.

Uzyskane wartości φ i ψ w funkcji smukłości S dla ustalonego parametru B są wartościami optymalnymi. Na podstawie obliczeń i wykresu (rys. 11) zauważamy, że dla małych smukłości S optymalny kąt ψ zmierza bardzo szybko do 90° , a optymalny kąt φ do 0. Ze wzrostem smukłości kąt ψ maleje, a kąt φ rośnie.

8. Uwagi końcowe

Rozpatrzone układy kratowe są najprostsze z możliwych. Stanowią one jednak podstawę do optymalnego kształtowania z uwzględnieniem pełzania bardziej złożonych układów kratowych. Można przypuszczać, iż otrzymamy bardziej skomplikowane równania, których rozwiązanie będzie wymagało stosowania metod numerycznych.

Analizę otrzymanych wyników można przeprowadzić na drodze porównania optymalnych wartości kątów w funkcji parametru smukłości w przypadku, gdy dany układ kratowy jest kształtowany w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego [23] i w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu teorii pełzania KEMPNERA-HOFFA [30] i przy wykorzystaniu «teorii wzmocnienia».

I tak w przypadku najprostszego, dwuprętowego układu kratowego, przedstawionego na rys. 1, optymalny kąt φ w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu «teorii wzmocnienia» rys. 2, zawiera się w granicach

$$26^\circ 33' 54'' \leq \varphi \leq 35^\circ 15' 52''$$

(Norton).

W przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu teorii KEMPNERA-HOFFA (rys. 3 [30]) optymalny kąt φ zawiera się w przedziale

$$0 \leq \varphi \leq 35^{\circ}15'52'',$$

a w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego (rys. 3 [23])

$$26^{\circ}33'54'' \leq \varphi \leq 45^{\circ}.$$

Z powyższego porównania wynika, że dolne ograniczenie kąta φ jest to samo w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego i w warunkach wyboczenia pełzającego typu RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA, natomiast górne ograniczenie kąta φ jest to samo w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego obu typów.

Celem dokładnego porównania otrzymanych wyników wykonano w przypadku najprostszego układu kratowego obliczenia numeryczne.

Przyjęto następujące dane: $P_0 = 40\,000$ kG; $j_w = 1,5$; $\xi = 10$ (przekrój dwuteowy); $\eta = 0,4$; $\gamma = 8,94 \cdot 10^3$ kG/m³; $E = 12\,400 \cdot 10^6$ kG/m²; $a = 7$ m; $V = 0,4$ m³; $Q = 3,5$ kG/m³ (granica plastyczności).

Wartości parametru $\beta = 0,146$, $n = 3$, $\alpha = 0$ odpowiada optymalny kąt $\varphi = 32^{\circ}30'$; wartościom parametrów $\mu_1 = 0,172$ i $\lambda = 0,146$ odpowiada optymalny kąt $\varphi \cong 26^{\circ}$ (wzory (3.12) i (3.13), rys. 5. [30]), i wartości $\Lambda = 0,815$ (wzór (3.11) str. 354 [23]) odpowiada optymalny kąt $\varphi \cong 31^{\circ}50'$ (rys. 3, str. 355 [23]).

Podobną analizę uzyskanych wyników można by przeprowadzić w przypadku pozostałych układów kratowych w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego i w warunkach wyboczenia pełzającego typu RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA. W przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego typu KEMPNERA-HOFFA [30] dla dalszych typów urządzeń kratowych nie przeprowadzono obliczeń numerycznych ze względu na trudności matematyczne jakie napotykamy przy rozwiązywaniu równań.

Literatura cytowana w tekście

1. М. АХМАДАЛИЕВ, Алгоритм расчёта статически неопределимых ферм наименьшего объёма на РСВМ методом последовательных приближений, Изв. АН УССР, серия Техн. Наук, 1966, 3, 39—40.
2. И. А. ФЕДОРОВ, К вопросу о ферме наименьшего веса, Строит. Мех. и Расч. Сооруж., 1967, 6, 11—14.
3. А. М. FREUDENTHAL, Some time effects in structural analysis, Rep. Sixth, Int. Congr. Appl. Mech., Paris 1946 (nie opublikowane).
4. G. A. HEGEMIER, W. PRAGER, On Michell trusses, Int. J. Mech. Sci., 11, (1969), 209.
5. N. J. HOFF, A survey of the theories of creep buckling, Proc. of third US nat. Congr. of Appl. Mech. Brown Univ. 1958, Pergamon Press, 1958, 29—49.
6. J. A. HULT, Creep buckling, Inst. Halfasthetslara Kungl., Tekniska Hogskolan, Publ. nr 111, Stockholm 1955.
7. Л. М. КАЧАНОВ, О времени разрушения в условиях ползучести, Изв. АН УРСР, ОТН, Мех. и Маш., 8 (1958), 26—31.
8. Л. М. КАЧАНОВ, О времени разрушения в условиях ползучести, Изв. АН УССР, ОТН, Мех. и Маш. (1960), 88—92.

9. L. KIRSTE, *Beitrag zum Problem des Tragwerks-Mindestgewichts*, Z. Flugwiss, 8, 12, (1960), 352—359.
10. L. KIRSTE, *Ein weiterer Beitrag zum Problem des Tragwerks-Mindestgewichts*, Z. Flugwiss, 9, II, (1961), 343—347.
11. L. MARTINI, *Slupy linii energetycznych z elementów iglicowych*, Arch. Inż. Łąd., 3 (1969), 541.
12. A. G. MICHELL, *The limits of economy in frame-structures*, Phil. Mag., 8 (1904), 589.
13. P. PEDERSEN, *On the optimal layout of multi-purpose trusses*, Int. Journ. Comp. Struct., 2, 5/6 (1972).
14. И. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержневой и пластинки в условиях ползучести*, Прикл. мат. и мех., ОТН АН УССР, 3, 21 (1957), 406—412.
15. Ю. А. РАДЦИГ, А. Ш. АРСЛАМОВ, *Расчёт статически неопределённых ферм наименьшего веса с учётом устойчивости стержневой*, Сборник Всесоюз. Конф. по проблемам Устойчивости, Вильнюс 1967, 120.
16. А. Н. РАВЕСКИЙ, *Расчёт металлических ферм с обеспечением равноустойчивости всех сжатых элементов*, Сборник Всесоюз. Конф. по Пробл. Устойч., Вильнюс, 1961, 120—121.
17. М. И. РЕЙТМАН, Г. С. ШАПИРО, *Теория оптимального проектирования в строительной механике*, Теории упругости и пластичности, Итоги Науки, Механика, Упругость и Пластичность, 1964, Москва 1966, 8—24.
18. A. D. ROSS, *The effects of creep on instability and indeterminacy investigated by plastic models*, Struct. Eng., 24 (1946) 413; 25 (1947), 179.
19. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механических систем деформирующихся по времени*, Гостехиздат, Москва—Ленинград 1949.
20. C. J. SHEU, W. PRAGER, *Recent developments in optimal structural design*, Applied Mechanics, Reviews, 10, 21 (1968), 985—992.
21. L. A. SCHMIDT, Jr, W. M. MORROW, *Structural synthesis with buckling constraints*, Proc. ASCE, 89 (1963), 107—126.
22. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji*, Rozpr. Inż. 2, 10 (1962), 309—332.
23. R. WOJDANOWSKA-ZAJĄC, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie kratownic przy uwzględnieniu warunków stateczności*. Rozpr. Inż. 2, 17, (1969).
24. А. М. ЖУКОВ, И. Н. РАБОТНОВ, Ф. С. ЧУРИКОВ, *Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести*. Инж. Сборник 21 (1953).
25. M. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd i klasyfikacja prac nad wyboczeniem pełzającym*, Czasopismo Techniczne 1, 65 (1960), 1—7.
26. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, Praca zreferowana na Kongresie Mechaniki w Stanford, sierpień 1968.
27. M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe przy uwzględnieniu warunków stateczności. Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych*, cz. I. Wyd. PAN, Wrocław—Warszawa—Kra-ków 1968.
28. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, J. Appl. Mech., 38 (1971).
29. M. ŻYCZKOWSKI, R. WOJDANOWSKA-ZAJĄC, *Optimal structural design with respect to creep buckling*, Proc. Symp. IUTAM Creep in structures, II, Goteborg 1970.
30. R. WOJDANOWSKA, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie w warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wyboczenia Kempnera-Hoffa*, Arch. Inż. Łąd., 4, 18 (1972).

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ФЕРМ РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В ОТНЕСЕНИИ К ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА РАБОТНОВА-ШЕСТЕРИКОВА

В работе рассматривается оптимальное конструирование ферм работающих в условиях ползучести. Определена оптимальная конфигурация четырех простых ферм, приведенных на рис. 1, 3, 6 и 9. В качестве критерия оптимизации принят минимальный объем фермы. Для сжимаемых

стержней краевые условия сформулированы на основе теории продольного изгиба ползучести Работнова-Шестерикова, а для растягиваемых стержней на основе теории растрескивания при ползучести (Качанов). Диаграмма показывает зависимость оптимального угла φ в функции безразмерного коэффициента гибкости S . Вычисления проведены для простейшей фермы. Результаты сравнены с полученными прежде для продольного упруго-пластического изгиба в работе [22] и продольного изгиба при ползучести на основе теории Кемпнера-Гоффа (работа [29]).

S u m m a r y

OPTIMAL DESIGN OF TRUSS STRUCTURES IN CREEP CONDITIONS WITH REFERENCE TO THE RABOTNOW-SHESTERIKOW THEORY OF BUCKLING

In this paper are considered the optimal truss structures under the conditions of creep. Optimal configurations are determined for the four simple trusses (see Fig. 1, 3, 6 and 9). Minimal volume of the truss structures is taken as the criterion.

For the compression bars the constraint is given on the basis of the creep buckling theory. The Kachanow theory of creep rupture is used for bars in tension. The results are represented in the form of diagrams showing the optimal angle φ in terms of the dimensionless slenderness coefficient. Numerical calculations are given for the simplest lattice structure. Results are compared with the results of papers [22] concerning elastic-plastic buckling and of [29], concerning the creep buckling on the basis of the Kempner—Hoff theory.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1973 r.
