

## ZWICHRZENIE SPRĘŻYSTE CIENKOŚCIENNEJ BELKI DWUPRZĘSŁOWEJ\*

ANDRZEJ G A R S T E C K I (POZNAŃ)

### 1. Wprowadzenie

Zagadnienie zwiczenia cienkościennych belek jednoprzęsłowych o różnych typach podpór zostało już dostatecznie zbadane zarówno od strony teoretycznej, jak i doświadczalnej i istnieje szereg efektywnych metod obliczania obciążenia krytycznego. W znacznie mniejszym stopniu zbadano dotąd zagadnienie zwiczenia belek ciągłych. Ze względu na trudności matematyczne, w większości dotychczasowych prac analizowano tylko wybrane przypadki, a w szczególności belki o wąskim, prostokątnym przekroju poprzecznym.

Stateczność belek cienkościennych o przekroju dwuteowym bisymetrycznym, badał TRAHAIR analitycznie [7, 8] i doświadczalnie [9]. Analizował on belki dwuprzęsłowe oraz trójprzęsłowe o symetrycznych przęsłach skrajnych, obciążone siłami skupionymi w środkach rozpiętości. Zaproponował przybliżoną metodę obliczania obciążenia krytycznego. Celem weryfikacji przeprowadził on serię doświadczeń na belkach dwuteowych, walcowanych ze stopu aluminium AA 51 S-T5.

Efektywną metodę obliczania obciążenia krytycznego wieloprzęsłowych belek o stałym przekroju bisymetrycznym za pomocą e.m.c. opracował WISZNIAKOW [10, 11]. Nietety prace WISZNIAKOWA są na razie w Polsce niedostępne.

Autor niniejszej pracy podał metodę obliczania obciążenia krytycznego cienkościennych belek wieloprzęsłowych w przypadku ogólniejszym [3]. Przekrój poprzeczny belki może być dowolny i stały jedynie w przedziałach przęsł. Metodę tę zastosowano do przypadku belki dwuprzęsłowej o przekroju monosymetrycznym i dowolnej rozpiętości przęsł oraz dowolnego obciążenia, co pozwoliło na opracowanie programu obliczeń na maszynie ODRA 1204 [4].

Celem niniejszej pracy było doświadczalne sprawdzenie wartości sił krytycznych obliczonych numerycznie. Dodatkowym celem było sprawdzenie i porównanie różnych metod pomiarowych, niekrępujących swobody przemieszczeń modelu. Cel ten był o tyle ważny, że wielu badaczy w doświadczalnych badaniach stateczności stosuje pomiar przemieszczeń za pomocą czujników zegarowych, lub podobnych, podwyższających obciążenie krytyczne w sposób czasami istotny.

---

\* Praca została nagrodzona na konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Krakowie w 1973 r.

Badania doświadczalne przeprowadzono w trzech grupach:

a) Badania wstępne zwichrzenia dwóch belek jednoprzęsłowych i jednej belki dwuprzęsłowej o numerze 1. Celem ich było sprawdzenie i ewentualne udoskonalenie stanowiska badawczego, metody obciążania i pomiarów.

b) Badania główne zwichrzenia belek dwuprzęsłowych, w trakcie których wykonano pięć prób, oznaczonych numerami 1a, 2, 2a, 3, 3a. Do prób 1a, 2a, 3a użyto powtórnie modeli 1, 2, 3.

c) Badania cechujące dla wyznaczenia sztywności belek.

## 2. Oznaczenia stosowane w pracy

$x, y, z$  prawoskrętny, kartezjański układ osi współrzędnych ( $x, y$  — główne środkowe osie bezwładności przekroju poprzecznego belki),

$I_x, I_y, I_d, I_w$  momenty bezwładności przekroju, kolejno: względem osi  $x$ , względem osi  $y$ , skręcania swobodnego oraz wycinkowy,

$N, M_x, M_y, B$  siły przekrojowe: siła normalna, momenty zginające i bimoment,

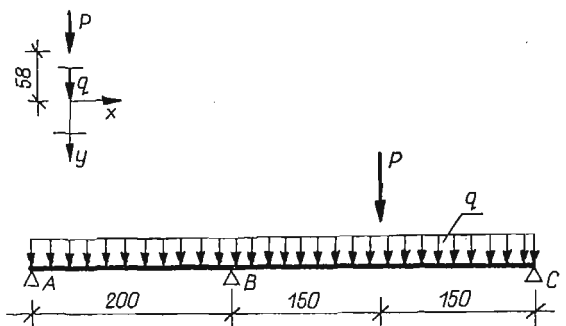
$\xi, \eta, \theta$  przemieszczenia w kierunkach osi  $x, y$  i kąt obrotu względem osi skręcania belki,

$E, G$  stałe sprężystości.

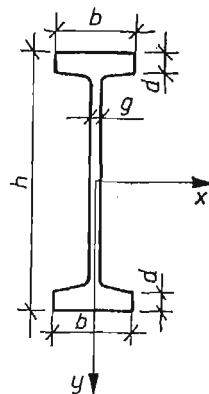
Pozostałe oznaczenia wynikają z rysunków.

## 3. Opis badań

3.1. Modele belek. Modele belek wykonano z dwuteownika stalowego, walcowanego, I NP 80 (stal St 3S). Szerokość stopek zmniejszono poprzez struganie z 42 mm do 25 mm dlatego, by zwichrzenie nastąpiło przy mniejszym obciążeniu i miało charakter sprężysty.



Rys. 1



Rys. 2

Średnie wymiary przekroju poprzecznego, określone na podstawie pomiarów wykonanych w miejscach co 50 cm, przedstawiono na rys. 1 oraz w tabelicy 1. Długość belek wynosiła 3060 mm.

Tablica 1. Średnie wymiary przekroju poprzecznego belek [mm]

Lp.	Wymiar	Modele do prób o numerach		
		1a	2 i 2a	3 i 3a
1	Wysokość $h$	79,1	78,8	78,9
2	Szerokość pólek $b$	25,10	25,01	25,01
3	Grubość pólek $d$	6,27	6,25	6,33
4	Grubość środka $g$	4,4	4,3	4,3

Modele belek wykazywały niestety pewne odchylenia od założeń teoretycznych. Stwierdzono, że przekrój poprzeczny był symetryczny jedynie w przybliżeniu, tzn. w zakresie tolerancji wymiarów wyrobów walcowanych. Poza tym obróbka skrawaniem wywołała pewien wewnętrzny stan naprężeń i krzywiznę. Krzywiznę tę częściowo usunięto przez prostowanie «na zimno». Dopuszczone do badań modele, w stanie podparcia w dwóch przekrojach, wykazywały maksymalne kąty skręcenia  $\max\theta = (2 \div 15)10^{-3}$  rad oraz maksymalne strzałki ugięcia poziomego  $\max\xi = (0,8 \div 3,7)$  mm, a po zamontowaniu na trzech podporach stanowiska badawczego:  $\max\theta = (0,7 \div 8,1)10^{-3}$  rad,  $\max\xi = (0,5 \div 1,4)$  mm<sup>1</sup>.

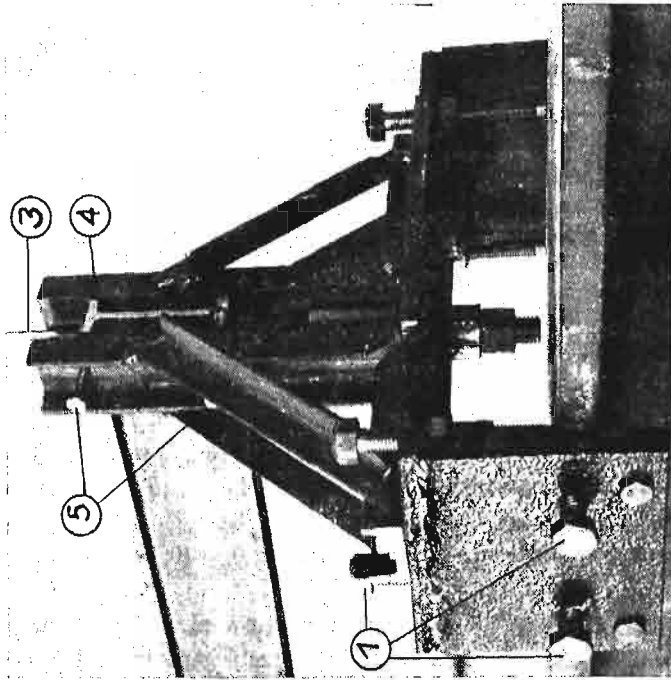
Naprężenia wstępne wywołane obróbką i prostowaniem były typu samorównoważącego się, które jak wiadomo nie wpływają na przebieg próby stateczności w zakresie prawa Hooke'a. Ze względu na nieznanne wartości tych naprężeń, fakt ich istnienia uznać można jednak za niekorzystny.

**3.2. Schemat statyczny belek i stanowisko badawcze.** Schemat statyczny przedstawiono na rys. 2. Obciążenie ciągle pochodziło tylko od ciężaru własnego belki. Obciążenie skupione realizowano za pomocą szalki i odważników talerzowych o ciężarze 17 kG, a w końcowej fazie prób: 5 kG, 2 kG, 1 kG oraz śrutu ołowianego. Przekazywane było ono na belkę za pośrednictwem stalowego ostrza (rys. 6), ustawionego na górnej półce belki i przymocowanego klejem epidianowym. Ostrze usytuowane było w płaszczyźnie symetrii środka belki z dokładnością  $\pm 0,1$  mm. W ostatnich dwóch próbach (tzn. 2a i 3a) zastosowano korektę usytuowania ostrza. Wykonano próbne obciążenie do około 100 kG, i tak przesunięto poprzecznie ostrze (max. do 0,3 mm), by wychylenie modelu z płaszczyzny pionowej było jak najmniejsze.

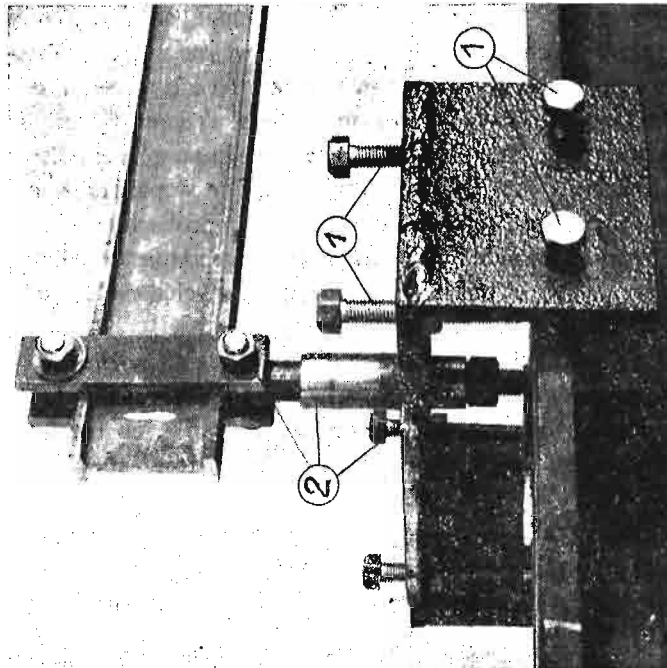
Podpory były typu widelkowego, tzn. takie, które uniemożliwiały przemieszczenia poprzeczne  $\xi$ ,  $\eta$  oraz obrót  $\theta$  wokół podłużnej osi belki. Były one zamocowane do dwuteownika szerokostopowego  $h = 260$  mm, opartego na blokach betonowych. Na rys. 3 przedstawiono podporę *A*, która przenosiła reakcję ujemną, podpory *B*, *C* pokazano na rys. 4.

Podpora *A* wyposażona była w łożyska ślizgowe (2) z tulejami z brązu. Swobodę deplanacji przekroju i swobodę obrotów wokół osi  $x$ ,  $y$  w podporach *B* i *C* zapewniono przez umieszczenie rolek stalowych (3) pomiędzy stopkami belki a ceownikiem (4) oraz

<sup>1</sup> Kąt  $\theta$  mierzono poziomą precyzyjną o dokładności odczytu  $0,15 \cdot 10^{-3}$  rad (dokładność pomiaru  $(0,2 \div 0,3) \cdot 10^{-3}$  rad), przemieszczenie  $\xi$  mierzono teodolitem precyzyjnym Theo 010 (dokładność pomiaru 0,2 mm).



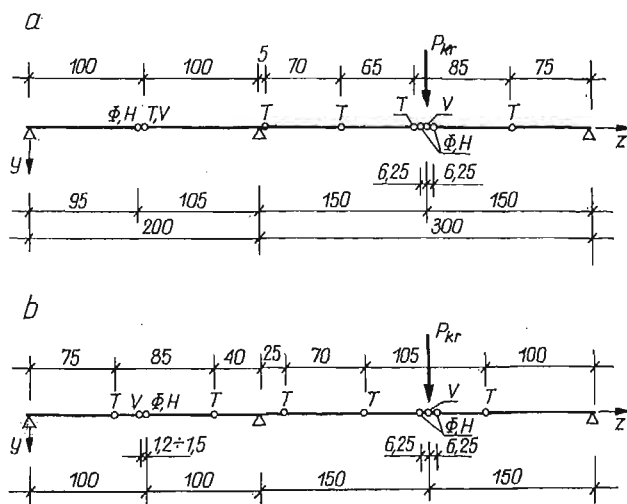
Rys. 4



Rys. 3

przez wygładzenie i pokrycie smarem powierzchni toczenia się rolek i powierzchni ślizgania się wkrętów (5) wybierających luz między belką a drugim ceownikiem. Wszystkie podpory miały śruby (1) służące do regulacji położenia. Dokładność ustawienia podpór i modelu była następująca: przemieszczenie  $\eta \pm 0,5$  mm (niwelator),  $\xi \pm 0,2$  mm (teodolit), kąt  $\theta \pm 3 \cdot 10^{-4}$  rad (poziomica precyzyjna).

3.3. Metody pomiarowe i aparatura. Dla każdego stanu obciążenia modelu mierzone: przemieszczenia pionowe  $\eta$ , poziome  $\xi$ , kąty skręcenia  $\theta$  belki oraz odkształcenia podłużne  $\varepsilon_x$  czterech skrajnych włókien belki (rys. 5). Starano się dobrać takie metody pomiarowe, ażeby każdą ze składowych przemieszczenia mierzyć oddzielnie.



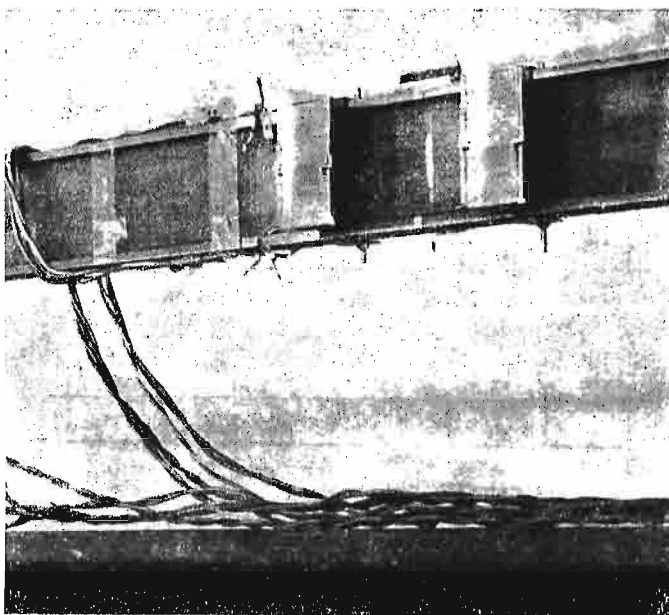
Rys. 5.  $H$  — punkt pomiarowy przemieszczeń poziomych  $\xi$ ;  $V$  — punkt pomiarowy przemieszczeń pionowych  $\eta$ ;  $\Phi$  — punkt pomiarowy kąta skręcenia  $\theta$ ;  $T$  — punkt pomiarowy tensometrii oporowej

Warto wspomnieć, że TRAHAIR [9] mierzył tylko jedno przemieszczenie poziome górnej półki belki, używając do tego specjalnego czujnika o bardzo małej sile oddziaływania na belkę. Przemieszczenie to było sumą wpływu dwóch przemieszczeń  $\xi$  i  $\theta$ .

Przemieszczenia pionowe  $\eta$  mierzone katetometrem produkcji Wilda o dokładności odczytu 0,02 mm. Przemieszczenia poziome  $\xi$  mierzone teodolitem precyzyjnym Theo 010 prod. Zeissa (Jena), o dokładności odczytu 1'' i najkrótszej celowej 2,3 m. Punktami pomiarowymi były znaki na pręcikach aluminiowych przyklejonych pod stopką dolną, wzdłuż osi  $y$  (pomiar  $\eta$ ) oraz do środka, wzdłuż osi  $x$  (pomiar  $\xi$ ). O dokładności pomiaru decydowała czytelność znaku na pręciku. Wielokrotnie powtarzane odczyty próbne pozwoliły dokładność tę określić jako równą  $\pm 0,02$  mm.

Kąt skręcenia  $\theta$  mierzone metodą lusterkową. Lusterka były przytwierdzone do modelu za pośrednictwem takiej oprawki i obejm, że możliwa była płynna regulacja ich kątów kierunkowych (rys. 6). Przed rozpoczęciem próby lusterka ustawiono w pozycji pionowej. Przed lusterkami, w przęśle o rozpiętości 3,0 m ustawiono lunetki ekstensometru Martensa, prod. Zeissa (Jena). Dokładność pomiaru kąta wynosiła  $\pm 1 \cdot 10^{-4}$  rad = 20''. Z braku drugiego ekstensometru Martensa, w przęśle o rozpiętości 2,0 m używano niwelatora technicznego Ni 025, Zeiss (Jena), osiągając podobną dokładność.

Przemieszczenie poziome  $\xi$  jest małe w stosunku do odległości linijki od lusterka, wynoszącej 1000 mm, dlatego wpływ jego na odczyt  $\theta$  można pominąć. (Gdy  $\xi = 10$  mm błąd wynosi 5%). Przemieszczenie pionowe  $\eta$  tylko wtedy nie wywierałoby wpływu na odczyt  $\theta$ , gdyby lusterka były dokładnie płaskie. Badania lusterek przeprowadzone za pomocą katetometru z linijką wykazały, że lusterka były wypukłe, a kąt między prostymi normalnymi, wyprowadzonymi z punktów odległych o 1 cm, był równy  $(1,5 \div \div 2,0) \cdot 10^{-4}$  rad. Uznano więc, że nie zachodzi konieczność uwzględnienia wpływu wypukłości lusterka na odczyt kąta  $\theta$ .



Rys. 6

Poza wyżej opisanymi metodami optycznymi zastosowano tensometrię elektrooporową do pomiaru odkształceń  $\varepsilon_z$  czterech skrajnych włókien belki. Stosowano czujniki indywidualne o długości 20 mm (Nr 1-4 na rys. 7). Głównym celem pomiarów tensometrycznych była kontrola maksymalnych naprężeń w belce, dodatkowym celem było zbadanie przydatności tensometrii oporowej do badań zwichrzenia. To ostatnie wymagało rozłożenia odkształceń na stany odpowiadające siłom przekrojowym  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $B$  i  $N$  (rys. 6) oraz wzory (1)

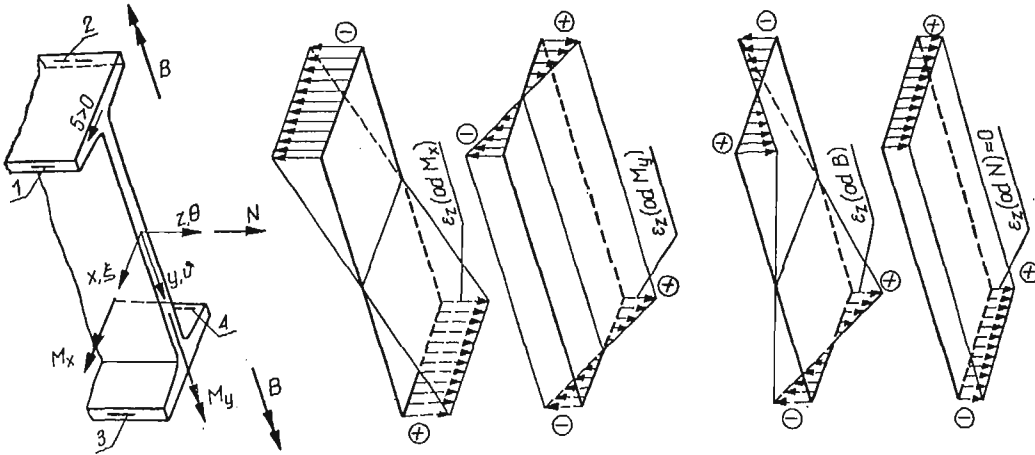
$$(1a) \quad \varepsilon_z(\text{od } M_x) = \varepsilon_{z,x} = \frac{1}{4} (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$(1b) \quad \varepsilon_z(\text{od } M_y) = \varepsilon_{z,y} = \frac{1}{4} (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$(1c) \quad \varepsilon_z(\text{od } B) = \varepsilon_{z,\omega} = \frac{1}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$(1d) \quad \varepsilon_z(\text{od } N) = \varepsilon_{z,z} = \frac{1}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4).$$

Rozmieszczenie tensometrów na belkach 1, 2 i 3 (rys. 5a) było inne niż na belkach 1a, 2a i 3a (rys. 5b). Wynikało to z faktu, że do prób 1a, 2a, 3a użyto powtórnie belek 1, 2, 3 z ich czujnikami, przy czym modele obracano końcami, celem zmniejszenia wpływu ewentualnych krzywizn wywołanych pierwszą próbą.



Rys. 7

**3.4. Przebieg doświadczeń.** Wstępne próby, przeprowadzone na belkach jednoprzęsłowych i na modelu 1 belki dwuprzęsłowej oraz próbę 2, należącą do serii głównej, kontynuowano aż do chwili wyczerpania nośności. Próby 3, 1a, 2a, 3a przerwano w stanie dużych przemieszczeń  $\xi = 30$  mm i  $\theta = 75$  mrad. Pomiaru przemieszczeń dokonywano po upływie 1 minuty od ułożenia obciążnika na szalce. Wyniki przedstawiono na wykresach, z których trzy pokazano na rys. 8, 9, 10. Przy opisie osi odciętych stosowano zasady znakowania wynikające z prawoskrętnego układu osi współrzędnych (por. rys. 2, 5, 7). Ponieważ pewne przemieszczenia (np. kąt skręcenia  $\theta$ ) przez długi czas były bardzo małe, a w końcowej fazie próby wzrastały bardzo szybko, na wykresach zastosowano taką podziałkę by czytelna była początkowa i środkowa część wykresu, nie zamieszczając tym samym ostatnich odczytów.

Do opisu osi rzędnych użyto jednostek siły układu technicznego (kG) i układu SI (daN). Ponadto na osi tej zaznaczono następujące punkty:

$H$  — obciążenie, przy którym naprężenia, wyznaczone z pomiaru tensometrycznego, przekroczyły 2000 at,

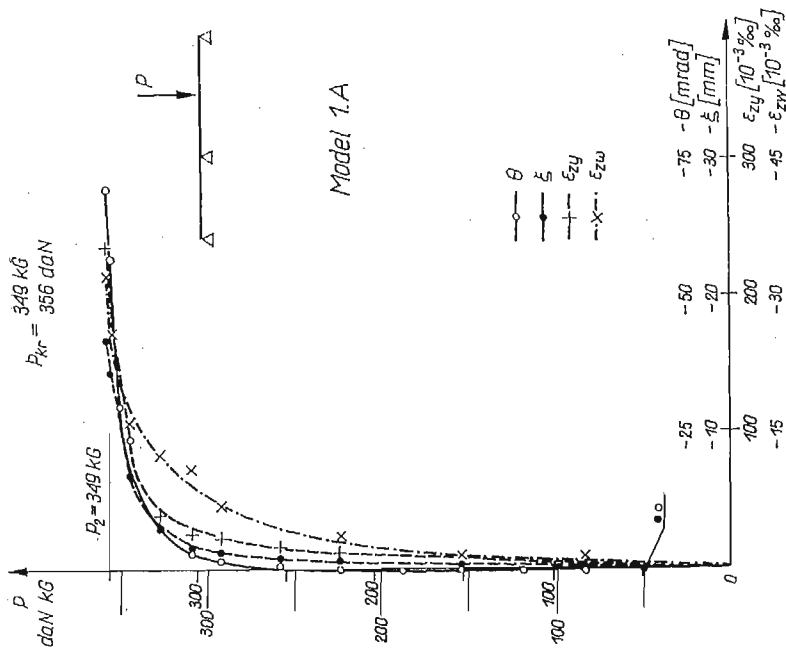
$P_2$  — przerwanie próby w przypadku prób 1a, 3a,

$P_3$  — granicę nośności w przypadku próby 2.

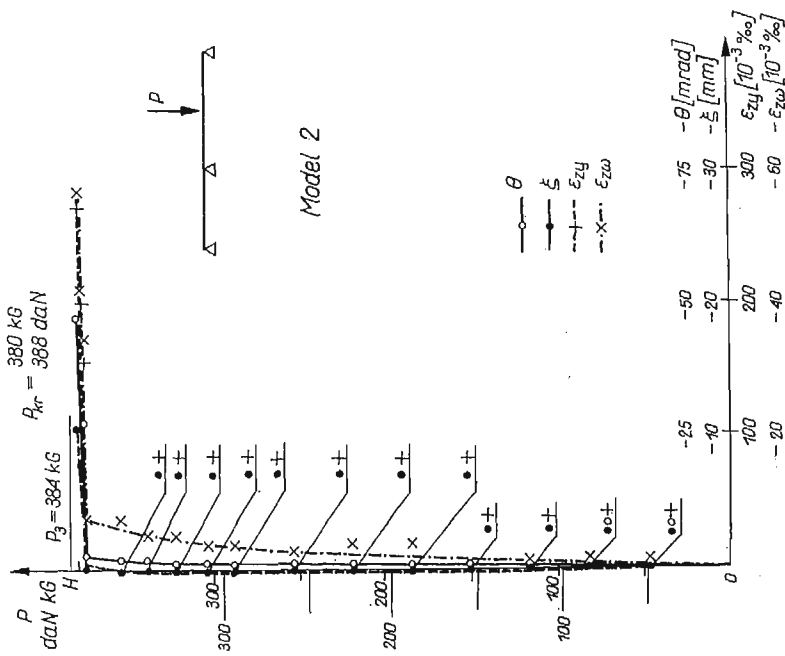
Na rys. 9 punktu  $H$  nie zaznaczono, gdyż naprężenia nie osiągnęły wartości 2000 at.

Na wykresie przemieszczeń modelu nr 2 (rys. 8) występuje wyraźne «załamanie się» krzywych przy obciążeniu  $P = 375$  kG, co tłumaczy się prawdopodobnym, lekkim potrąceniem modelu w chwili dodawania obciążenia. Wyniki badań wszystkich pozostałych modeli tworzą krzywe regularne.

Poza wykresem dla modelu nr 2, w pracy zamieszczono wykres dla modelu 3A — jako najlepszy i dla modelu 1A — jako najgorszy.



Rys. 9

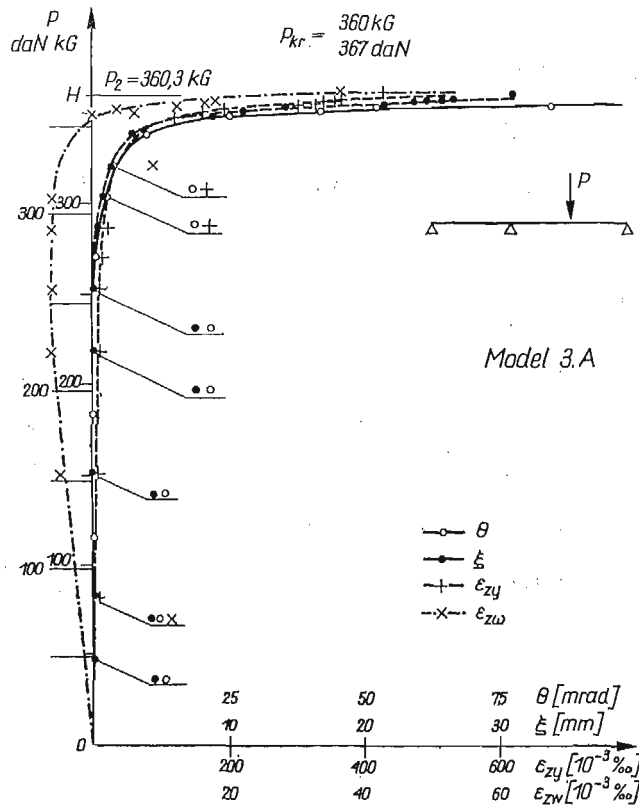


Rys. 8



Przy wyznaczaniu siły krytycznej z wykresu napotyka się zwykle pewne trudności. Jak wiadomo, nie zostało dotąd rozwiązane teoretycznie zagadnienie nośności nadkrytycznej oraz zagadnienie zwiczenia belki ciągłej z małymi mimośrodami. Nieliczne prace doświadczalne nie dały odpowiedzi ostatecznej odnośnie istnienia nadkrytycznego wzrostu nośności, stąd zdania badaczy są podzielone [5, 7].

Podczas badań stwierdzono, że wyczerpanie nośności belek następuje dopiero przy dużych przemieszczeniach powodujących nawet lokalne wystąpienie odkształceń plastycznych. Utrata nośności poprzedzona była pewnym zakresem prawie liniowej zależności



Rys. 10

między obciążeniem a przemieszczeniami. Ten quasi-liniowy wzrost nośności, wynoszący około 3÷5% obciążenia, można by uważać za wzrost nośności nadkrytycznej. Do jednoznacznych wniosków potrzebne byłyby jednak dalsze badania, poświęcone specjalnie temu zagadnieniu.

W opisywanych badaniach za szacowaną wartość siły krytycznej przyjęto średnią z obciążenia  $P$ , odpowiadającego początkowi quasi-liniowego wzrostu nośności i z obciążenia niszczącego. W przypadku, gdy próbę przerwano wcześniej, wartość obciążenia niszczącego ekstrapolowano na podstawie zmierzonych przemieszczeń. Należy to traktować jako sposób przybliżony, jednak błędy wynikające stąd nie są duże.

Szacowane wartości  $P_{kr}$  zestawiono w tablicy 3. Granice maksymalnego błędu przyjęto równe zakresowi procesu quasi-liniowego bądź większe od niego, w zależności od przebiegu krzywych.

**3.5. Badania cechujące.** Sztywności  $EI_y$  i  $GI_d$  wyznaczono na podstawie pomiarów ugięć i kątów skręcenia dokonanych podczas prób zginania i skręcania swobodnego belek o długości 1,5 m, wyciętych z modeli badanych wcześniej na zwichrzenie. Każdą belkę obciążano czterokrotnie, mierząc przemieszczenia zarówno przy obciążaniu jak i odciążaniu.

Sztywność  $EI_\omega$  obliczono mnożąc  $I_\omega$  przez  $E$ .  $I_\omega$  a także  $I_x$ ,  $I_y$ , określono na podstawie wyników inwentaryzacji belek (tablica 1). Do obliczenia  $E$  wykorzystano wyznaczone uprzednio sztywności  $EI_y$  i  $EI_x$ , gdzie  $EI_x$  wynikało z ugięć  $\eta$  zmierzonych w czasie prób stateczności. Wyniki zamieszczono w tablicy 2.

Tablica 2. Wyniki badań cechujących\*

Model	Układ jedn.	$EI_x$	$EI_y$	$GI_d$	$EI_\omega$
		10 <sup>6</sup> · kG · cm <sup>2</sup> kN · m <sup>2</sup>			10 <sup>6</sup> · kGcm <sup>4</sup> Nm <sup>4</sup>
1 i 1a	Tech.	108,31	3,509 ± 0,121 3,45%	0,5891 ± 0,0049 0,83%	43,40
	SI	106,22	3,441 ± 0,118	0,5777 ± 0,0048	4,256
2 i 2a	Tech.	108,77	3,4675 ± 0,113 3,26%	0,5934 ± 0,0045 0,76%	42,81
	SI	106,67	3,400 ± 0,111	0,5819 ± 0,0044	4,198
3 i 3a	Tech.	109,17	3,410 ± 0,147 4,31%	0,5829 ± 0,0064 1,10%	43,40
	SI	107,06	3,344 ± 0,144	0,5716 ± 0,0063	4,256

\* Błędy pomiarów obliczono według rozkładu Studenta i Fishera przy trzech stopniach swobody i poziomie ufności 0,99.

Wartości błędu wskazują na to, że najdokładniejszy był pomiar sztywności skręcania, wykonany metodą lusterkową (baza pomiarowa równa 100 cm).

Z badań cechujących oraz przeprowadzonego dodatkowo rozciągania sześciu próbek wyciętych ze środka i półek belek wyciągnięto wniosek, że próby stateczności w zakresie naprężeń do 2000 at można uważać za sprężyste.

#### 4. Porównanie wyników doświadczalnych z wynikami numerycznymi

Wyniki badań zestawiono w tablicy 3 i porównano je z wynikami numerycznymi, obliczonymi metodą zaproponowaną przez autora [3, 4]. W metodzie tej rozwiązanie równań stateczności Własowa przedstawiono w postaci szeregu skończonego o wyrazach złożonych z członów trygonometrycznych i wielomianowych. Minimalizację błędu przeprowadzono metodą ortogonalizacji, co doprowadziło do uogólnionego zagadnienia wartości własnych. Całość obliczeń wykonuje się na maszynie cyfrowej.

Szczegółowy opis omawianej metody zawarto w pracy [3]. Z przeanalizowanych tam przykładów wynika, że granicę błędu wyników numerycznych zawartych w tablicy 3 oszacować można jako równą  $\pm 1\%$ . Szacowanie to nie uwzględnia błędu spowodowanego upraszczającymi założeniami Własowa, a także błędów inwentaryzacji i badań cechujących.

Tablica 3. Porównanie wyników

Seria	Próba	Sily krytyczne			$\frac{P_{kr}^{dośw.} - P_{kr}^{num.}}{P_{kr}^{dośw.}} \cdot 100$ %
		Wartości górne w kG		Wyniki doświadczeń	
		Wartości dolne w daN.			
		Wyniki numeryczne $P_{kr}$	$P_{kr}$	Maks. możliwy rozrzut wyników (w przybliżeniu)	
Główna (weryfikacyjna)	2	357,7	380	375 ÷ 385	5,9
		350,8	372,7		
	3	351,7	370	360 ÷ 380	5,0
		344,9	362,8		
	1a	358,3	349	341 ÷ 360	-2,7
2a	357,7	370	362 ÷ 380	3,3	
	350,8	362,8			
3a	351,7	360	352 ÷ 368	2,3	
	344,9	353,0			
Średni błąd pojedynczego pomiaru					3,2
Średni błąd pojedynczego pomiaru z wykluczeniem próby 1a					3,9

Wyniki doświadczalne we wszystkich przypadkach, z wyjątkiem próby 1a, są wyższe od wyników numerycznych. Wyniki prób 2a i 3a są niższe od wyników prób 2, 3, co tłumaczyć można pewnymi krzywiznami modeli wynikającymi z uprzedniego ich użycia. Model 1 użyty był wcześniej do wstępnej serii badań, kontynuowanej do całkowitej utraty nośności, dlatego krzywizny modelu w próbie 1a były większe niż w pozostałych próbach, co mogło być przyczyną zaniżenia wyniku próby 1a.

Fakt, że wyznaczone doświadczalnie siły krytyczne wypadły większe od wartości określonych numerycznie jest zgodny z przewidywaniami. W metodzie numerycznej wykorzystano bowiem równania stateczności Własowa [10], wyprowadzone, jak wiadomo, z warunku równowagi pręta prostego doznającego jedynie nieskończone małych przemieszczeń i odkształceń. W rzeczywistości, w chwili utraty stateczności belka jest już ugięta pod obciążeniem, przez co punkt przyłożenia siły  $P$  obniża się, czyniąc układ bardziej statecznym. Zgodnie z analizą teoretyczną i badaniami doświadczalnymi [1, 2, 4, 5, 11]

założenie, że oś belki jest prosta, powoduje obniżenie wartości siły krytycznej o około 3÷5%. Procent ten zależy oczywiście od schematu statycznego belki i wymiarów przekroju poprzecznego.

### 5. Wnioski

1. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń zwichrzenia sprężystego belek dwuprzęsłowych potwierdziły poprawność zaproponowanej przez autora metody numerycznej obliczania siły krytycznej.

2. Zastosowanie i wzajemne porównanie różnych metod pomiarowych pozwala na następujące uszeregowanie ich pod względem przydatności do omawianego typu doświadczeń: lusterkowy pomiar kąta skręcenia  $\theta$ , optyczny pomiar przemieszczenia poziomego  $\xi$  (teodolitem lub katetometrem), pomiar tensometrią elektrooporową wydłużeń  $\varepsilon_z$  wywołanych zginaniem poziomym, pomiar jw. lecz wydłużeń  $\varepsilon_z$  wywołanych bimoto-mentem.

Zaletami metody lusterkowej jest bardzo duża dokładność, łatwość i szybkość odczytu. Dodatkową zaletą jest zaobserwowane we wszystkich próbach zjawisko wolnego wzrastania kąta skręcenia w początkowej fazie próby i gwałtownego przyrostu w fazie końcowej, co bardzo ułatwia określenie siły krytycznej. Charakterystyczne jest, że we wszystkich próbach kąt skręcenia wzrastał monotonicznie, podczas gdy przemieszczenie poziome  $\xi$  i odkształcenia  $\varepsilon_z$  w czasie pewnych prób zmieniały nawet znak.

Zmniejszenie błędu pomiaru  $\varepsilon_z$  metodą tensometrii oporowej można by osiągnąć przez zmostkowanie czujników w układy samokompensacyjne zgodnie z wzorami (1b) i (1c).

### Literatura cytowana w tekście

1. А. Н. ДУННИК, *Известия Донского Политехнического Института*, т. 2, 1913.
2. K. FEDERHOFER, *Sitzberichte Akad. Wiss., Wien* 1931, B. 140, s. 237.
3. A. GARSTECKI, *Pewne przypadki przestrzennej utraty stateczności prętów cienkościennych. Stateczność sprężysta prętów ciągłych*. Rozprawa doktorska. Politechnika Poznańska, 1973.
4. A. GARSTECKI, *Zastosowanie e.m.c. do analizy przestrzennej utraty stateczności cienkościennych belek I- i 2-przęsłowych*, Sympozjum Met. Komputerowe w Mech. Bud., Poznań 17—18. V. 1973.
5. E. F. MASUR, K. P. MILBRADT, *Collapse strength of redundant beams after lateral buckling*, *J. of Applied Mechanics*, ASME, 24, 2 (1957), 283.
6. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill Book Company, New York-London-Toronto 1961. Polskie tłumaczenie: *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
7. N. S. ТРАНАИР, *Stability of I-beams with elastic end restraints*, *J. of the Institution of Engineers of Australia*, 37, 6 (1965), 157.
8. N. S. ТРАНАИР, *Elastic stability of I-beams elements in rigid-jointed frames*, *J. of the Institution of Engineers of Australia*, 38, 7/8 (1966), 171.
9. N. S. ТРАНАИР, *Elastic stability of continuous beams*, *J. Struct. Div. Proc. ASCE*, 95, 6 (1969), 1295—1312.
10. Г. Ф. Вишняков, *Применение матриц влияния к расчёту неразрезных тонкостенных стержней открытого профиля на устойчивость групповым способом Вянелло*, Тр. Ташк. Инст. Инж. Жель-дорож. Трансп., 1969, вып. 62, с. 84—96.

11. Г. Ф. Вишняков, *Решение задач устойчивости неразрезных тонкостенных балок постоянно поперечного сечения с применением ЕСВМ*, Тр. Ташк. Инст. Инж. Жель.-дорож. Трансп., 1970, вып. 68, с. 113—128.
12. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Физматгиз, Москва 1959.
13. S. WEISS, *Uwagi w sprawie kryteriów stateczności w przypadku zgięcia pręta cienkościennego*, Arch. Inż. Łąd., 15, 3 (1969).

## Р е з ю м е

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ  
ТОНКОСТЕННОЙ ДВУХПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

В работе описаны эксперименты, проведенные на сплошных двухпролетных стальных балках двутаврового сечения, нагруженных сосредоточенной нагрузкой, приложенной по середине одного из пролетов.

Основной целью работы являлось определение значения критического усилия и проверка численного метода расчета критической нагрузки многопролетных сплошных балок, предложенного автором.

Приводятся заключения относительно согласуемости экспериментальных и вычислительных результатов и пригодности различных измерительных методов, применяемых при описываемых исследованиях.

## S u m m a r y

## ELASTIC STABILITY OF TWO-SPAN THIN-WALLED CONTINUOUS BEAMS

The tests carried out on steel I-beams loaded with a concentrated force are described in the paper. The main aim of the experimental investigation was to verify the numerical method given by the author and serving to the evaluation of the critical loads of multi-span continuous beams.

Several conclusions have been drawn concerning the agreement of the theoretical and experimental results and the accuracy of various measuring methods applied to the tests.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.*

---