

STATECZNOŚĆ POJAZDÓW JEDNOŚLADOWYCH
NA KOŁACH PNEUMATYCZNYCH*

JERZY MARYNIAK, ZDOBYSŁAW GORAJ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Na przykładzie roweru przeprowadzono badanie stateczności bocznej pojazdów jednośladowych, z uwzględnieniem podatności poprzecznej pneumatyków. Rower pod względem kinematycznym jest jednym z bardziej skomplikowanych pojazdów. Jest pojazdem niestatecznym, wymagającym ciągłego sterowania ze strony rowerzysty.

ŁOJCJAŃSKI i ŁURIE [19], przy daleko idących uproszczeniach, wyprowadzili równania ruchu i sformułowali prawo jazdy na rowerze. Traktowali koła roweru jako idealnie sztywne dyski, pomijając równocześnie kąt pochylenia kolumny kierowniczej i momenty dewiacyjne pojazdu.

Najpełniejszą analizę stateczności roweru przeprowadzili NEJMARK i FUFAJEW [23] i [24], uwzględniając wpływ podatności pneumatyków według teorii KIEDYSZA [18]. W pracach swych NEJMARK i FUFAJEW, przy wyprowadzeniu pełnych równań ruchu, przeprowadzili rozwiązania i analizy przy daleko idących uproszczeniach, pomijając kolejno poszczególne ruchy roweru. Takie postępowanie rzutuje nie tylko na wyniki ilościowe, ale ma decydujący wpływ na wyniki jakościowe. Autorzy ci przyjęli rower jako układ mechaniczny o dwóch masach, traktując łącznie jako wspólne masy: kierownicę z kolumną i kołem przednim oraz jako drugą masę ramę, rowerzystę i tylne koło. Niewydzielenie wirujących mas kół przedniego i tylnego powoduje pominięcie efektów żyroskopowych, co ma wpływ na stateczność.

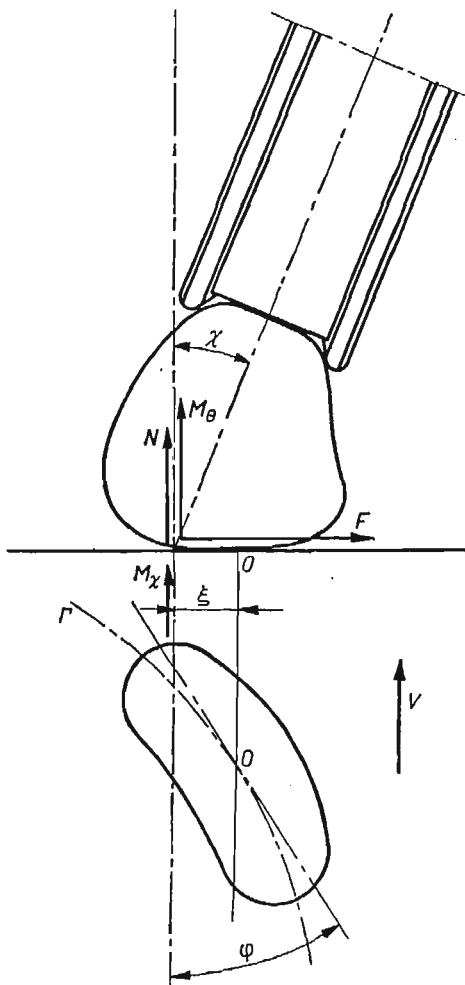
W przedstawionej pracy rower z rowerzystą i bagażem traktowano jako układ mechaniczny o więzach nieholonomicznych, złożony z czterech mas. Uwzględniono cztery stopnie swobody roweru w postaci: przechylenia χ , odchylenia θ , obrotów układu kierownicy ψ i przemieszczeń poprzecznych x . Dodatkowo przyjęto cztery stopnie swobody, wynikające z podatności poprzecznej i skrętnej pneumatyków: tylnego koła ξ_1, φ_1 i przedniego ξ_2, φ_2 . Obliczenia numeryczne wykonano przykładowo dla polskiego roweru turystycznego «Ambasador». Zbadano jaki wpływ na stateczność roweru mają parametry konstrukcyjne, kinematyczne i podatność pneumatyków.

* Fragment pracy był przedstawiony na VI International Conference on Nonlinear Oscillations, Poznań 1972.

2. Dynamika koła z pneumatykiem

Zagadnieniami dynamiki toczącego się pneumatyka zajmowali się: DOHRING [2], ROCARD [25], KIEŁDYSZ [18]. Obecnie zajmuje się tym zagadnieniem szereg badaczy i ośrodków doświadczalnych. Dotychczas najogólniejsza jest teoria KIEŁDYSZA [18], mimo pewnych zastrzeżeń omówionych w dalszej części pracy.

Rozważono zachowanie toczącego się pneumatyka pod działaniem stałego, pionowego obciążenia N . Pneumatyk toczy się bez poślizgu z małymi deformacjami, które charakteryzują się trzema parametrami (rys. 1). Parametr ξ określa boczne znoszenie centrum



Rys. 1. Przemieszczenia, siły i momenty opisujące odkształcenie pneumatyka toczącego się koła w teorii Kiełdysza

pola kontaktu względem śladu średnicowej płaszczyzny koła na płaszczyźnie drogi, kąt χ przechylenia płaszczyzny średnicowej koła względem płaszczyzny pionowej a , kąt skręcenia pneumatyka φ . Siły i momenty, które powodują odkształcenia pneumatyka są funkcjami stanu odkształcenia w postaci:

$$(1) \quad \begin{aligned} F &= F(\xi, \varphi, \chi), \\ M_x &= M_x(\xi, \varphi, \chi), \\ M_\theta &= M_\theta(\xi, \varphi, \chi). \end{aligned}$$

Dla małych odkształceń ξ , φ , χ można funkcje (1) rozwinąć w szereg Maclarena i ograniczyć się tylko do członów liniowych:

$$(2) \quad \begin{aligned} F &= a_{11}\xi + a_{12}\chi + a_{13}\varphi, \\ M_x &= a_{21}\xi + a_{22}\chi + a_{23}\varphi, \\ M_\theta &= a_{31}\xi + a_{32}\chi + a_{33}\varphi. \end{aligned}$$

Korzystając z (2) zgodnie z teorią KIEŁDYSZA [18], układ sił i momentów działających na toczący się pneumatyk (rys. 1) przedstawiono w postaci:

— siła boczna znoszenia F

$$(3) \quad F = a\xi + \sigma N\chi,$$

— moment przechylający M_x

$$(4) \quad M_x = -\sigma N\xi - \varrho_1 N\chi,$$

— moment skręcający M_θ

$$(5) \quad M_\theta = b\varphi,$$

gdzie a , b , ϱ_1 , σ — odpowiednie współczynniki wyznaczone doświadczalnie, N — normalna siła reakcji podłoża.

Siły i momenty (3), (4) i (5) można przedstawić jako pochodne cząstkowe funkcji U_2 względem odpowiednich odkształceń:

$$F = \frac{\partial U_2}{\partial \xi}, \quad M_x = -\frac{\partial U_2}{\partial \chi}, \quad M_\theta = \frac{\partial U_2}{\partial \varphi},$$

gdzie funkcja U_2 jest energią potencjalną pneumatyka i ma postać:

$$(6) \quad U_2(\xi, \chi, \varphi) = \frac{1}{2}(a\xi^2 + b\varphi^2 + \varrho_1 N\chi^2 + 2\sigma N\xi\chi),$$

tak określona energia pneumatyka może być wykorzystana przy obliczaniu całkowitej energii pojazdu.

3. Więzy kinematyczne toczącego się pneumatyka

Z analizy zjawisk toczenia się bez poślizgu KIEŁDYSZ sformułował dwa twierdzenia:

1. Styczna do linii toczenia Γ (rys. 1) pokrywa się z osią powierzchni kontaktu.

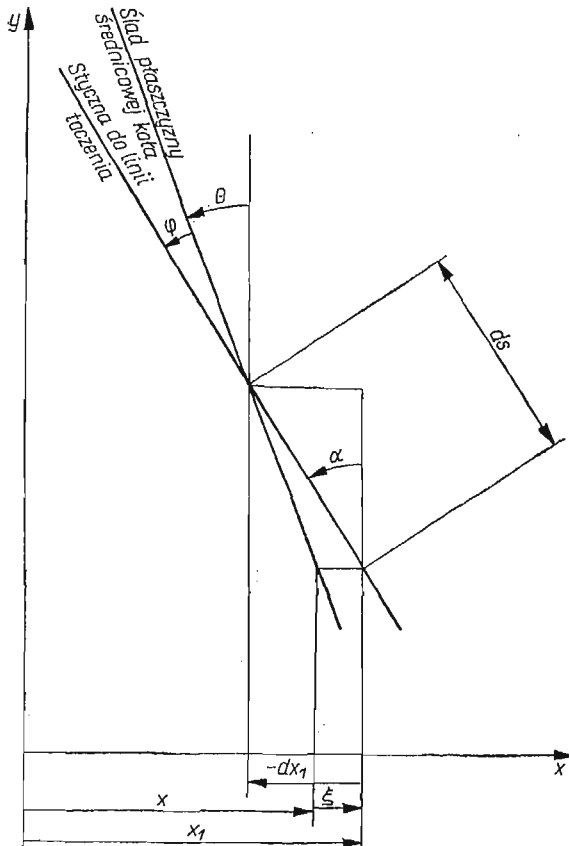
2. Krzywizna K linii toczenia Γ jest jednoznacznie określona funkcją $K(\xi, \varphi, \chi)$. Linia toczenia jest miejscem geometrycznym punktów 0 (rys. 1), będących środkiem linii średnicowej leżącej na powierzchni kontaktu z nawierzchnią. Dla małych odkształceń ξ , φ , χ KIEŁDYSZ określił krzywiznę toru zależnością

$$(7) \quad K = \frac{1}{r} = \alpha\xi - \beta\varphi - \gamma\chi,$$

gdzie α, β, γ są to odpowiednio wyznaczone parametry kinematyczne. W konsekwencji twierdzeń KIELDYSZA odnośnie zjawiska toczenia się bez poślizgu pneumatyka (rys. 2), otrzymano równania więzów w postaci:

$$(8) \quad \varphi + \theta = -\frac{dx_1}{ds},$$

$$(9) \quad K = \frac{1}{r} = -\frac{d^2x_1}{ds^2},$$



Rys. 2. Parametry geometryczne określające ruch pneumatyka toczącego się koła

gdzie zgodnie z rys. 2

$$(10) \quad x_1 = x + \xi.$$

Po wprowadzeniu (10) do (8) oraz uwzględnieniu (8) w (9) i przyrównaniu do (7) otrzymano

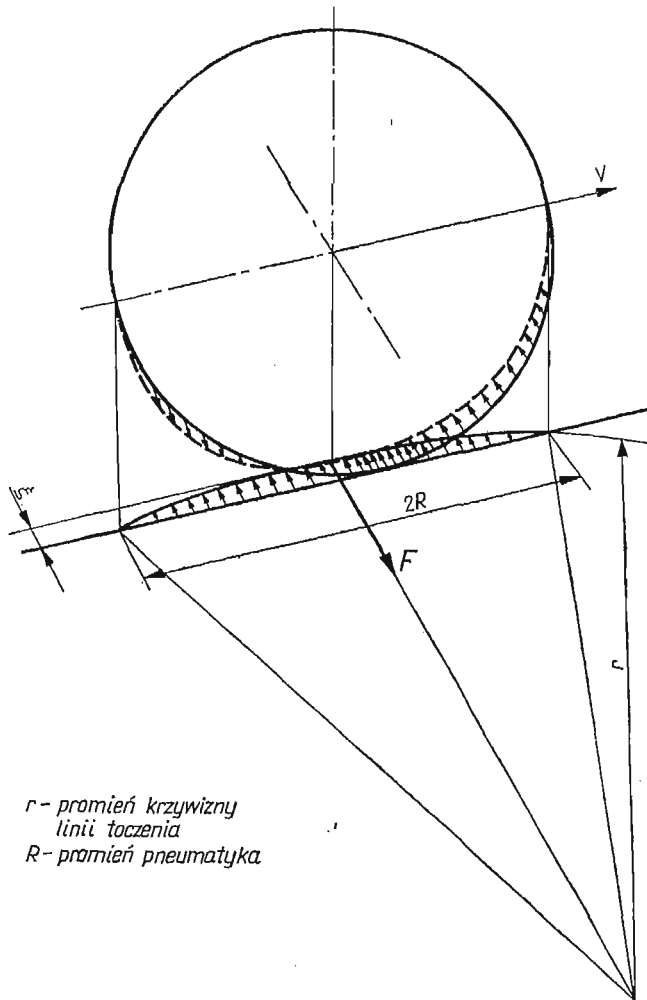
$$(11) \quad \varphi + \theta + \frac{dx}{ds} + \frac{d\xi}{ds} = 0,$$

$$(12) \quad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\theta}{ds} - \alpha\xi + \beta\varphi + \gamma\chi = 0.$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu (11) i (12) oraz uwzględnieniu, że prędkość toczenia się pneumatyka $V = ds/dt$, otrzymano ostatecznie równania więzów nieholonomicznych dla pneumatyków, w postaci:

$$(13) \quad \dot{x} + \dot{\xi} + V\theta + V\varphi = 0,$$

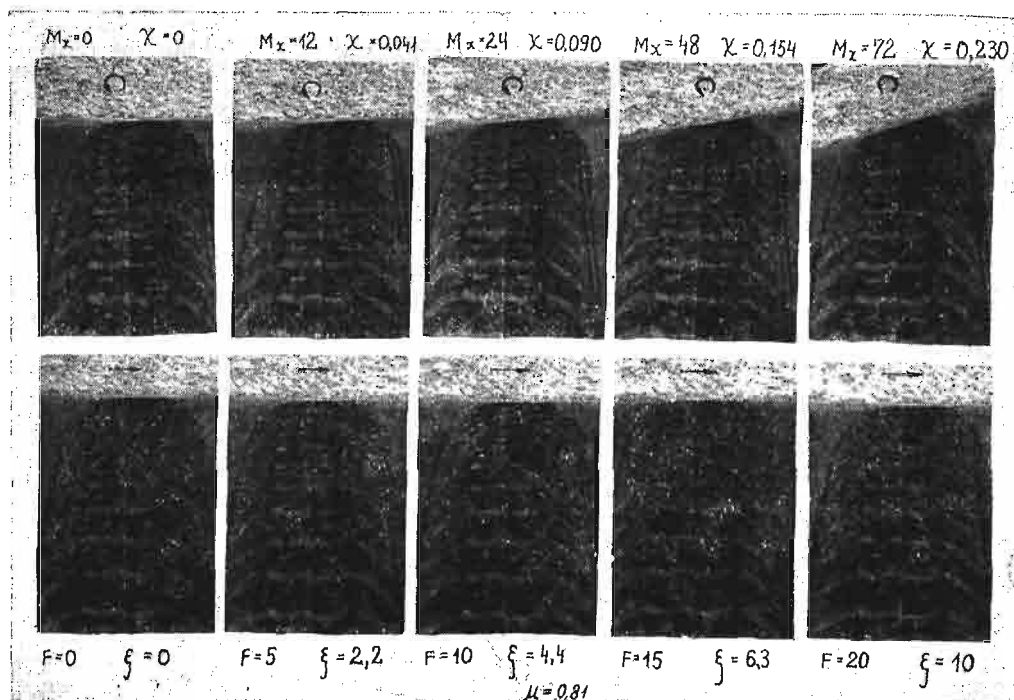
$$(14) \quad \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\xi + \beta V\varphi + \gamma V\chi = 0.$$



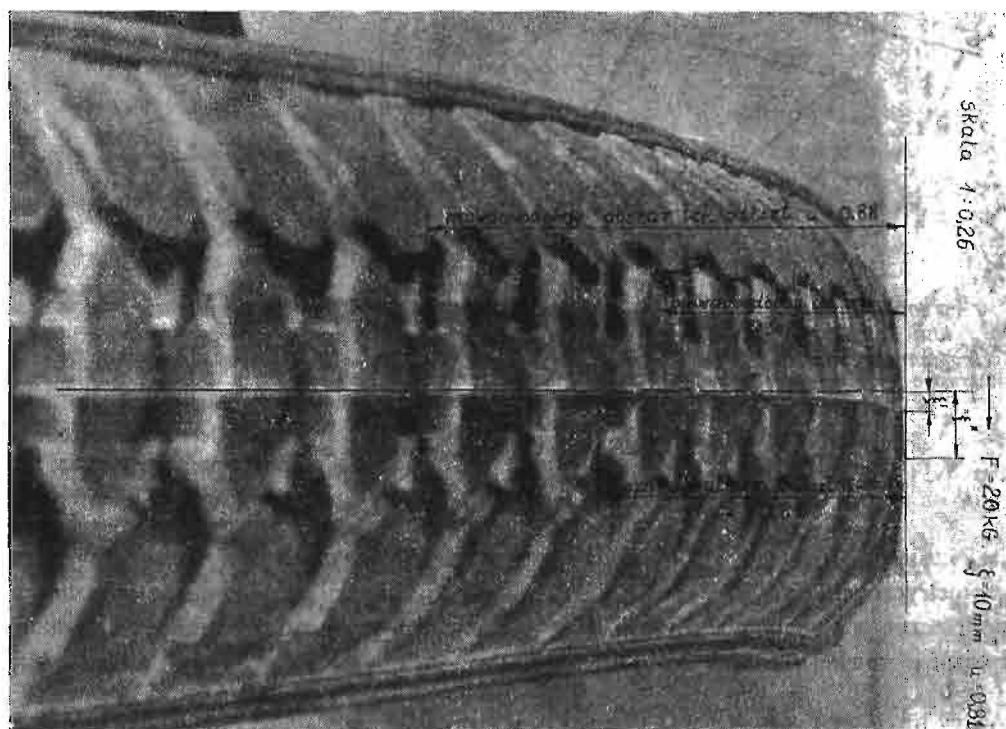
Rys. 3. Geometria toczenia się odkształconego pneumatyka, zgodnie z teorią Kiełdysza

NEJMARK i FUF AJEW [23] zgodnie z KIEŁDYSZEM [18] wyznaczyli z zależności wyłącznie geometrycznych (rys. 3) parametry kinematyczne α , β i γ . Założono, że odkształcenie poprzeczne pneumatyka ξ stanowi wysokość odcinka kołowego o promieniu krzywizny r i cięciwie równej średnicy $2R$

$$(15) \quad \xi = r \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right],$$



Fot. 1. Odształcenie pneumatyka koła rowerowego pod wpływem momentu przechylającego M_x i siły F bocznej znoszenia



Fot. 2. Lokalne odształcenie pneumatyka koła rowerowego pod wpływem siły F bocznej znoszenia

ponieważ $\frac{R}{r} \ll 1$ z (15) otrzymano w przybliżeniu

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r},$$

skąd po porównaniu z równaniem (7), przy założeniu, że $\varphi = \chi = 0$ otrzymano

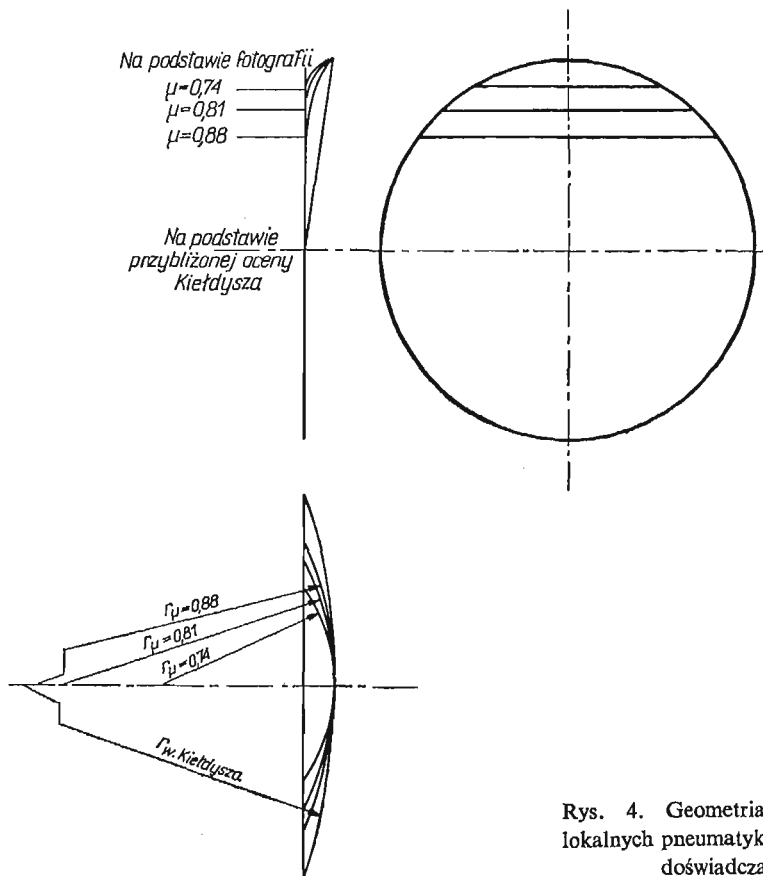
$$(16) \quad \alpha = \frac{2}{R^2}.$$

Analogicznie przy założeniach podanych w [23] wyznaczono pozostałe współczynniki kinematyczne:

$$(17) \quad \beta = \frac{2}{R},$$

$$(18) \quad \gamma = \frac{1}{R}.$$

Tak określone przez NEJMARKA i FUFAJEWA zgodnie z KIEŁDYSZEM i GREJDANUSEM [23] parametry kinematyczne α , β i γ można traktować jako pierwsze przybliżenie.



Rys. 4. Geometria odkształceń lokalnych pneumatyka wyznaczona doświadczalnie

Wykonano pomiary koła z pneumatykiem przy różnych ciśnieniach w pneumatykach. Pneumatyk był obciążony momentem przechylającym i siłą boczną F (fot. 1 i 2). Jak wynika z fotografii odkształcenie pneumatyka jest odkształceniem lokalnym (rys. 4), i nie obejmuje koła aż do średnicy jak przyjęto w [23]. Odkształcenie lokalne i jego obszar zależy od sztywności pneumatyka i ma wpływ na parametry kinematyczne α , β i γ .

Dokładne badania przeprowadzone na kołach rowerowych, z uwzględnieniem zmiany ciśnienia, wykazały znaczne różnice w wartościach współczynników (tablica 1).

Tablica 1

| μ | $a \left[\frac{N}{m} \right]$ | $b \left[\frac{N}{m} \right]$ | σ | $q_1 [m]$ | $\gamma \left[\frac{1}{m} \right]$ | $\alpha \left[\frac{1}{m^2} \right]$ | $\beta \left[\frac{1}{m} \right]$ | |
|-------|--------------------------------|--------------------------------|----------|-----------|-------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|---|
| 0,74 | 2060 | 383 | 2,15 | 0,042 | 2,8 | 16 | 5,6 | K |
| | | | | | | 164 | 18 | E |
| 0,81 | 2354 | 363 | 2,48 | 0,042 | 2,8 | 16 | 5,6 | K |
| | | | | | | 125 | 15 | E |
| 0,88 | 2720 | 245 | 2,45 | 0,042 | 2,8 | 16 | 5,6 | K |
| | | | | | | 74 | 12,2 | E |

K — zgodnie z teorią Kiełdysza,

E — wyznaczone doświadczalnie.

W powyższej tablicy μ jest stosunkiem średnicy pneumatyka ugiętego do średnicy pneumatyka swobodnego; w przypadku idealnie sztywnych pneumatyków $\mu = 1$.

Wartości współczynników α i β mają znaczny wpływ na otrzymane wyniki, określające własności dynamiczne pojazdów. Współczynniki te w dużym stopniu zależą od sztywności pneumatyka, a nie są wyłącznie zależne od promienia koła sztywnego (16), (17) i (18) jak wyznaczono w [23].

4. Dynamiczne równania ruchu

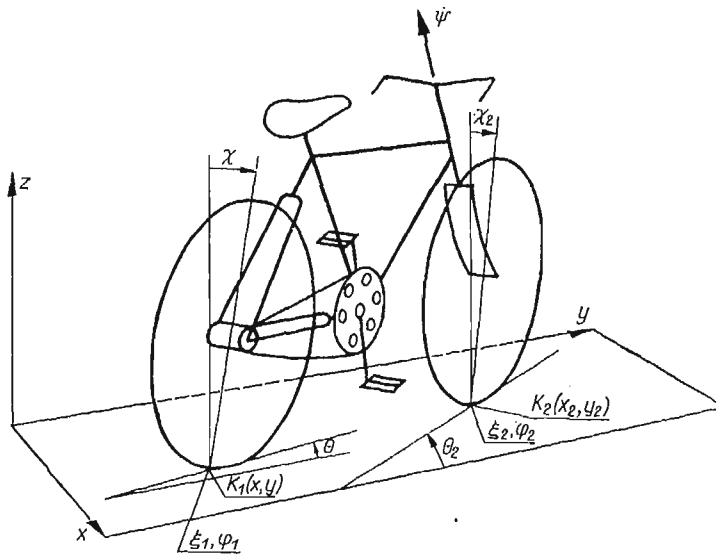
Położenie roweru z rowerzystą określono ośmioma współrzędnymi uogólnionymi (rys. 5):

- x — przemieszczenie poprzeczne, współrzędna punktu przecięcia płaszczyzny średnicowej tylnego koła z płaszczyzną drogi;
- θ — kąt odchylenia roweru, kąt zawarty między osią y przyjętego układu współrzędnych, a śladem płaszczyzny średnicowej tylnego koła;
- χ — kąt przechylenia roweru, kąt zawarty między płaszczyzną średnicową tylnego koła a płaszczyzną pionową yz ;
- ψ — kąt obrotu osi kierownicy;
- ξ_1, ξ_2 — przemieszczenie poprzeczne środków pola kontaktów, odpowiednio tylnego i przedniego koła;

φ_1, φ_2 — skręcanie osi powierzchni kontaktów względem śladu płaszczyzny średnicowej koła tylnego i przedniego.

Równania ruchu roweru toczącego się bez poślizgu na sprężystych pneumatykach, z uwzględnieniem więzów nieholonomicznych, wyprowadzono stosując równania MAGGIEGO [4, 9, 15], w postaci

$$(19) \quad \sum_{\sigma=1}^k C_{i\sigma} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \right] = \sum_{\sigma=1}^k C_{i\sigma} Q_\sigma,$$



Rys. 5. Przyjęty układ odniesienia oraz przemieszczenia kątowe i liniowe roweru na kołach z odkształcalnymi pneumatykami

i równania więzów w postaci

$$(20) \quad \dot{q}_\sigma = \sum_{i=1}^l C_{i\sigma} \dot{e}_i + C_\sigma,$$

gdzie

$$C_{i\sigma} = \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{e}_i},$$

$$Q_\sigma = - \frac{\partial (U_1 + U_2 + F_R)}{\partial q_\sigma},$$

dla $\sigma = 1, 2, k, i = 1, 2, \dots, l,$

przy czym

- q_σ — współrzędne uogólnione,
 \dot{e}_i — kinematyczne charakterystyki układu,
 T — kinetyczna energia układu,
 Q_σ — siły uogólnione potencjalne i niepotencjalne,
 U_1 — potencjalna energia pojazdu bez pneumatyków,
 U_2 — potencjalna energia pneumatyków,
 F_R — dysypacyjna funkcja Rayleigha.

Jeżeli liczbę przyjętych współrzędnych uogólnionych, opisujących jednoznacznie zmiany położenia pojazdu, oznaczymy przez k i jeżeli mamy b równań więzów nieholonomicznych, to liczba niezależnych prędkości uogólnionych równa jest różnicy $l = k - b$ określającej liczbę niezależnych charakterystyk kinematycznych układu \dot{e}_i .

Po obliczeniu energii kinetycznej i potencjalnej układu, wyznaczeniu odpowiednich związków kinematycznych i linearyzacji równań ruchu (19) i więzów (20) z wykorzystaniem (13) i (14), otrzymano układ ośmiu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego ze stałymi współczynnikami.

$$(21) \quad m\ddot{x} - S_y\ddot{\theta} + S_x\ddot{\chi} - \sigma N\chi - S_\psi\ddot{\psi} + \sigma N_2 \sin \lambda \psi - a\xi_1 - a\xi_2 = 0;$$

$$(22) \quad -S_y\ddot{x} + J_y\ddot{\theta} - J_{xy}\ddot{\chi} + V(G_1 + G_3)\dot{\chi} + c\sigma N_2\chi + J_4\ddot{\psi} - VG_3 \sin \lambda \dot{\psi} - c\sigma N_2 \sin \lambda \psi + \\ + ca\xi_2 - b\varphi_1 - b\varphi_2 = 0;$$

$$(23) \quad S_x\ddot{x} - J_{xy}\ddot{\theta} - V(G_1 + G_3)\dot{\theta} + J_x\ddot{\chi} - (gS_x - \rho_1 N)\chi - J_3\ddot{\psi} - VG_3 \cos \lambda \dot{\psi} + \\ + (gS_\psi - \rho_1 N_2 \sin \lambda)\psi + \sigma N_1 \xi_1 + \sigma N_2 \xi_2 = 0;$$

$$(24) \quad -S_\psi\ddot{x} + J_4\ddot{\theta} + VG_3 \sin \lambda \dot{\theta} - J_3\ddot{\chi} + VG_3 \cos \lambda \dot{\chi} + (gS_\psi - \rho_1 N_2 \sin \lambda - c_1 \sigma N_2)\chi + \\ + J_\psi\ddot{\psi} + \delta\dot{\psi} + (gS_0 \sin \lambda + \rho_1 N_2 \sin^2 \lambda + c_1 \sigma N_2 \sin \lambda)\psi - \\ - (\sigma N_2 \sin \lambda + ac_1)\xi_2 - b \cos \lambda \varphi_2 = 0;$$

$$(25) \quad \dot{x} + \xi_1 + V\theta + V\varphi_1 = 0,$$

$$(26) \quad \dot{\theta} + \varphi_1 - \alpha V\xi_1 + \beta V\varphi_1 + \gamma V\chi = 0,$$

$$(27) \quad \dot{x} - c\dot{\theta} + c_1\dot{\psi} + \xi_2 + V\theta + V\psi \cos \lambda + V\varphi_2 = 0,$$

$$(28) \quad \dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda + \dot{\varphi}_2 - \alpha V\xi_2 + \beta V\varphi_2 + \gamma V\chi - \gamma V \sin \lambda \psi = 0.$$

Równania (21)–(24) są równaniami ruchu roweru, natomiast pozostałe cztery równania (25)–(28) są równaniami więzów nieholonomicznych toczącego się roweru na pneumatykach.

Wielkości geometryczne i rozkłady mas podano na rys. 6, natomiast:

m — masa całego układu,

S_x, S_y, S_ψ, S_0 — momenty statyczne,

$J_x, J_y, J_3, J_4, G_1, G_3$ — momenty bezwładności,

N_1, N_2 — reakcje normalne działające na tylne i przednie koła.

Układ równań (21)–(28) można przedstawić w zapisie macierzowym w postaci:

$$(29) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{x} = \text{col}[x, \theta, \chi, \psi, \xi_1, \xi_2, \varphi_1, \varphi_2]$,

A — macierz kwadratowa współczynników bezwładności,

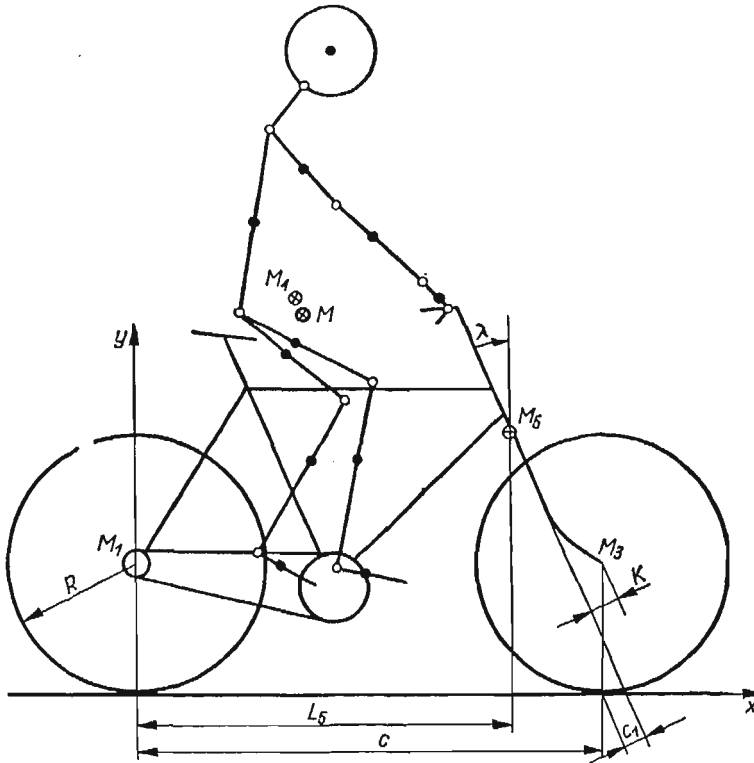
B — macierz kwadratowa współczynników tłumienia,

C — macierz kwadratowa współczynników sztywności.

Po wprowadzeniu dodatkowych funkcji:

$$y_1 = \dot{x}, \quad y_2 = \dot{\theta},$$

$$y_3 = \dot{\chi}, \quad y_4 = \dot{\psi},$$



Rys. 6. Geometria roweru oraz przyjęty rozkład mas rowerzysty i roweru

układ równań (29) sprowadzono do następującej postaci:

$$(30) \quad \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{y} i $\dot{\mathbf{y}}$ są to następujące macierze kolumnowe:

$$\mathbf{y} = \text{col}[y_1, y_2, y_3, y_4, x, \theta, \chi, \psi, \xi_1, \xi_2, \varphi_1, \varphi_2],$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \text{col}[\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2].$$

Po przekształceniu i pomnożeniu lewostronnie przez macierz odwrotną \mathbf{P}^{-1} otrzymano:

$$(31) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\mathbf{y},$$

gdzie macierz stanu \mathbf{R} ma postać:

$$(32) \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}(-\mathbf{Q}).$$

Rozwiązanie układu (31) przewiduje się w postaci:

$$(33) \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \exp \lambda t,$$

gdzie \mathbf{y}_0 jest macierzą kolumnową wartości początkowych.

Podstawiając (33) do układu (31) otrzymano:

$$(34) \quad [\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{y}_0 = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Aby układ równań miał rozwiązanie niezerowe, wartości własne macierzy \mathbf{R} są tymi wartościami parametru λ , dla których

$$(35) \quad \det[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] = 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanu \mathbf{R} .

Wyznaczenie wektorów własnych, odpowiadających ściśle określonym wartościom własnym, pozwala na identyfikację odpowiednich ruchów roweru.

Rozwiązanie ogólne układu równań jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych i ma postać:

$$(36) \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{y}_j \exp \lambda_j t,$$

gdzie

\mathbf{y}_j — jest wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej,

C_j — stałe wyznaczone z warunków początkowych, będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili $t = 0$,

$\lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1}$ — wartości własne macierzy stanu \mathbf{R} ,

$\eta_{j,j+1}$ — częstość oscylacji o okresie $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$,

$\xi_{j,j+1}$ — współczynnik tłumienia, jeżeli wszystkie $\xi_j < 0$, wahania są tłumione, tzn. ruch pojazdu jest stateczny, czas stłumienia amplitudy do połowy $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi_j}$,

przy czym liczba własności własnych λ_j i odpowiadających im wektorów własnych \mathbf{y}_j jest równa $n = 2\sigma - b$, tzn. liczbie równań różniczkowych (30) rzędu pierwszego, otrzymanych z przekształcenia układu równań (29).

5. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej roweru

W celu wyjaśnienia wpływu liczby przyjętych stopni swobody i uproszczeń wynikających z pominięcia podatności pneumatyków, wyprowadzono równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej roweru.

Koła roweru traktowano jako cienkie tarcze, idealnie sztywne [9, 23]. Kontakt kół z powierzchnią drogi sprowadza się do styku punktowego. Na koła działają wyłącznie reakcje normalne N , natomiast nie mogą wystąpić siły styczne F , momenty przechylające M_x i momenty odchylające M_θ .

Równania ruchu wyprowadzono z równań Lagrange'a I rodzaju [4] w postaci

$$(37) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^b \mu_\beta a_{\beta\sigma},$$

dla $\sigma = 1, 2, 3, 4$; $\beta = 1, 2$; gdzie

T — energia kinetyczna układu, wyrażona we współrzędnych uogólnionych q_σ ,

Q_σ — siły odpowiadające współrzędnym uogólnionym,

μ_β — mnożniki Lagrange'a,

$a_{\beta\sigma}$ — współczynniki więzów nieholonomicznych,

przy czym

$$(38) \quad \sum_{\sigma=1}^k a_{\beta\sigma} \dot{q}_\sigma + a_{\beta 0} = 0.$$

Równania więzów nieholonomicznych dla roweru o idealnie sztywnych kołach otrzymano, po przekształceniu równań zgodnie z [23], w postaci

$$(39) \quad \begin{aligned} \dot{x} + V\theta &= 0, \\ c\dot{\theta} - c_1\dot{\psi} - V\psi \cos \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Na podstawie (38) z równań (39) otrzymano macierz współczynników więzów nieholonomicznych w postaci:

$$(40) \quad [a_{\beta\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -c_1 \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu energii kinetycznej i sił uogólnionych, jak w rozdziale 4, i wprowadzeniu do równań (37) mnożników μ_1, μ_2 i współczynników (40), otrzymano następujący układ różniczkowych równań ruchu:

$$(41) \quad m\ddot{x} - S_y\ddot{\theta} + S_x\ddot{\chi} - S_\psi\ddot{\psi} = \mu_1,$$

$$(42) \quad -S_y\ddot{x} + J_y\ddot{\theta} - J_{xy}\ddot{\chi} + V(G_1 + G_3)\dot{\chi} + J_4\ddot{\psi} - VG_3\dot{\psi} \sin \lambda = \mu_2 c,$$

$$(43) \quad S_x\ddot{x} - J_{xy}\ddot{\theta} - V(G_1 + G_3)\dot{\theta} + J_x\ddot{\chi} - J_3\ddot{\psi} - VG_3\dot{\psi} \cos \lambda = gS_x\chi - gS_\psi\psi,$$

$$(44) \quad \begin{aligned} -S_\psi\ddot{x} + J_4\ddot{\theta} + VG_3\dot{\theta} \sin \lambda - J_3\ddot{\chi} + VG_3\dot{\chi} \cos \lambda + J_\psi\ddot{\psi} = \\ = -gS_0\psi \sin \lambda - gS_\psi\chi - \delta\dot{\psi} - \mu_2 c_1. \end{aligned}$$

Powyższe równania ruchu wraz z równaniami więzów nieholonomicznych (39) opisują ruch roweru na sztywnych kołach.

5.1. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej z uwzględnieniem przechylania i obrotów kierownicy. Eliminując z równań ruchu (41)–(44) mnożniki Lagrange'a i wyznaczając z rów-

nań więzów x i θ otrzymano równania uproszczonej stateczności bocznej, sprzęgające ruchy przechylające roweru χ z obrotami kierownicy ψ .

$$(45) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \text{col}[\chi, \psi],$$

przy czym wyrazy macierzy współczynników \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} są następujące:

$$a_{11} = cJ_x,$$

$$a_{12} = a_{21} = -cJ_3 - c_1 J_{xy},$$

$$a_{22} = c_1 J_4 + cJ_\psi + c_1 J_y \frac{c_1}{c} + cJ_4,$$

$$b_{11} = 0,$$

$$b_{12} = -V[c_1 S_x + J_{xy} \cos \lambda + (G_1 + G_3)c_1 + cG_3 \cos \lambda],$$

$$b_{21} = V[cG_3 \cos \lambda + c_1(G_1 + G_3)],$$

$$b_{22} = V\left[c_1 S_\psi + J_4 \cos \lambda + c_1 S_y \frac{c_1}{c} + J_y \frac{c_1}{c} \cos \lambda\right] + c\delta,$$

$$c_{11} = -cgS_x,$$

$$c_{12} = V^2 S_x \cos \lambda + (G_1 + G_3)V \cos \lambda - cgS_\psi,$$

$$c_{21} = gS_\psi,$$

$$c_{22} = V^2 \left(S_\psi \cos \lambda + G_3 \sin \lambda \cos \lambda + S_y \frac{c_1}{c} \cos \lambda \right) + cgS_0 \sin \lambda.$$

5.2. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej z uwzględnieniem odchylenia i obrotów kierownicy. Założono, że zmiany przemieszczeń bocznych x i przechylania χ są małe i pomijalne w stosunku do ruchów odchylenia roweru θ i towarzyszących im obrotów kierownicy ψ . Eliminując z równań ruchu (41)–(44) i równań więzów (39) składniki odpowiadające pomijanym zmianom otrzymano różniczkowe równania ruchu roweru, opisujące wężykowanie.

Macierz kolumnowa składowych wektora \mathbf{x} równania (45) ma postać

$$\mathbf{x} = \text{col}[\theta, \psi],$$

przy czym wyrazy macierzy współczynników bezwładności \mathbf{A} , tłumienia \mathbf{B} i sztywności \mathbf{C} mają postać:

$$a_{11} = cJ_4 + c_1 J_y,$$

$$a_{12} = cJ_\psi + c_1 J_4,$$

$$a_{21} = a_{22} = c_{11} = c_{21} = 0,$$

$$b_{11} = V[c(S_\psi + G_3 \sin \lambda) - c_1 S_y],$$

$$b_{12} = c\delta - c_1 V G_3 \sin \lambda,$$

$$b_{21} = c,$$

$$b_{22} = -c_1,$$

$$c_{12} = cgS_0 \sin \lambda,$$

$$c_{22} = -V \cos \lambda.$$

5.3. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej z uwzględnieniem odchylenia, przechylenia i obrotów kierownicy. Pominęto przemieszczenia boczne x przy założeniu, że pozostałe trzy ruchy, tj.: odchylenie θ , przechylenie χ i obroty kierownicy ψ , są ruchami decydującymi i wzajemnie sprzężonymi. Z równań ruchu (41)–(44) i równań więzów (39) otrzymano równania opisujące tak zmodelowany rower w postaci (45), którego wektor \mathbf{x} posiada następujące składowe:

$$\mathbf{x} = \text{col}[\theta, \chi, \psi],$$

a wyrazy współczynników \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} mają następującą postać:

$$a_{12} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_{22} = b_{32} = c_{21} = c_{31} = c_{32} = 0,$$

$$a_{11} = J_4 + J_y \frac{c_1}{c},$$

$$a_{13} = J_\psi + \frac{c_1}{c} J_4,$$

$$a_{21} = -J_{xy},$$

$$a_{22} = J_x,$$

$$a_{23} = -J_3,$$

$$b_{11} = VG_3 \sin \lambda,$$

$$b_{12} = V \left[G_3 \cos \lambda + \frac{c_1}{c} (G_1 + G_3) \right],$$

$$b_{13} = \delta - \frac{c_1}{c} VG_3 \sin \lambda,$$

$$b_{21} = -V(G_1 + G_3),$$

$$b_{23} = -VG_3 \cos \lambda,$$

$$b_{31} = 1,$$

$$b_{33} = -\frac{c_1}{c},$$

$$c_{11} = -J_3 - \frac{c_1}{c} J_{xy},$$

$$c_{12} = gS_\psi,$$

$$c_{13} = gS_\psi \sin \lambda,$$

$$c_{22} = -gS_x,$$

$$c_{23} = gS_\psi,$$

$$c_{33} = -\frac{V}{c} \cos \lambda.$$

Wykonanie obliczeń numerycznych dla uproszczonych modeli roweru i dla modelu przyjętego w rozdziale 4 pozwala na porównanie wyników i ich analizę. Pozwala to wyciągnąć wnioski odnośnie słuszności stosowanych modeli roweru przez szereg badaczy, jak ŁOJCJAŃSKI, ŁURIE, NEJMARK i FUFAJEW, jak również umożliwia określenie wpływu założeń upraszczających na poprawności wyników.

6. Wyniki obliczeń numerycznych i wnioski

Obliczenia przykładowe wykonano dla roweru turystycznego «Ambasador». Rozwiązano pełny układ równań (21)–(28), jak również równania stateczności uproszczonej wprowadzone w punktach 5.1, 5.2 i 5.3.

Wszystkie obliczenia wykonano według własnych programów na EMC GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

Jako parametry zmienne traktowano:

- δ — tłumienie w kolumnie kierowniczej,
- k — odsadzenie przedniego koła względem osi obrotu,
- R — promień kół roweru,
- L_5 — długość roweru,
- λ — kąt pochylenia osi kierownicy,
- V — prędkość jazdy roweru,
- μ — współczynnik określający ciśnienie w pneumatykach.

Wyniki przedstawiono w postaci wykresów, na których linią ciągłą naniesiono zmiany współczynników tłumienia ξ_j , a przerywaną częstości oscylacji η_j . Jednakowymi indeksami oznaczono na wszystkich wykresach odpowiadające sobie wartości własne, charakteryzujące te same ruchy roweru:

$\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$ — oscylacje lub ruchy aperiodyczne odpowiadające obrotom kierownicy ψ ,

lub

$$\lambda_1 = \xi_1$$

$$\lambda_2 = \xi_2$$

$$\lambda_3 = \xi_3$$

$$\lambda_4 = \xi_4$$

$\lambda_{5,6} = \xi_{5,6} \pm i\eta_{5,6}$ — szybkie oscylacje odpowiadające ruchom odchyłającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_1 pneumatyka tylnego koła,

$\lambda_{7,8} = \xi_{7,8} \pm i\eta_{7,8}$ — szybkie oscylacje odpowiadające ruchom odchyłającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_2 pneumatyka przedniego koła,

$\lambda_9 = \xi_9$ — aperiodyczne ruchy odchyłające roweru θ lub ruchy harmoniczne, odpowiadające obrotom kierownicy ψ , sprzężonym z odchyłaniem roweru θ ,

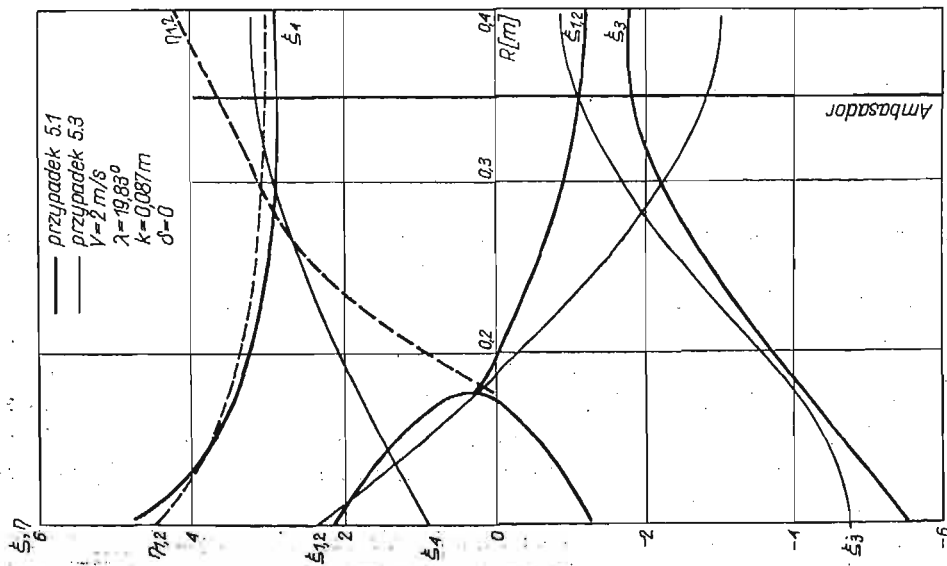
$$\lambda_{3,9} = \xi_{3,9} \pm i\eta_{3,9}$$

$$\lambda_{10} = \xi_{10}$$

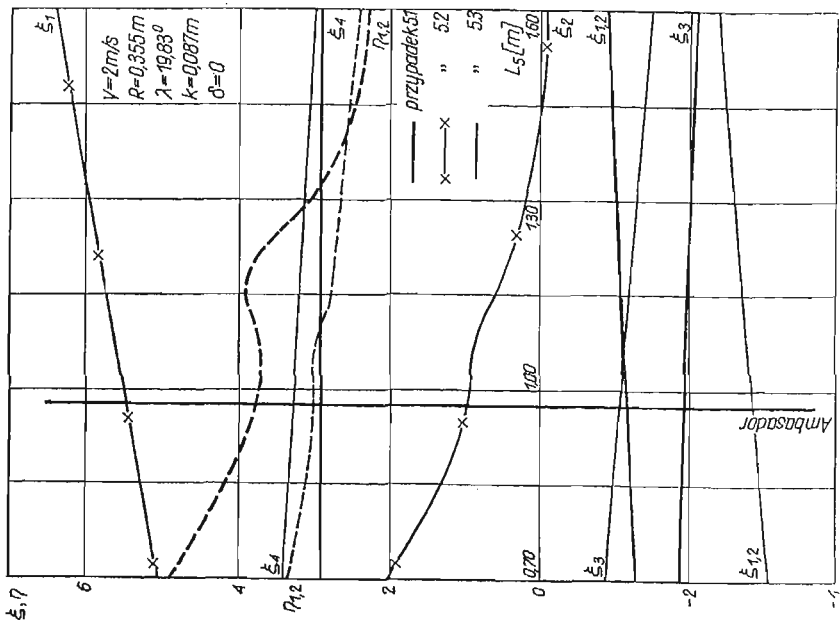
— aperiodyczne ruchy odchyłające roweru θ lub oscylacji, odpowiadające ruchom przechyłającym roweru χ sprzężonym z odchyłaniem θ .

Ruch roweru niekierowanego jest ruchem niestatecznym ze względu na przechyłanie χ . Wartość własna λ_4 i $\lambda_{4,10}$ charakteryzująca przechyłanie posiada część rzeczywistą — współczynnik tłumienia zawsze dodatni $\xi_4 > 0$ i $\xi_{4,10} > 0$ (rys. 7–13 i rys. 15).

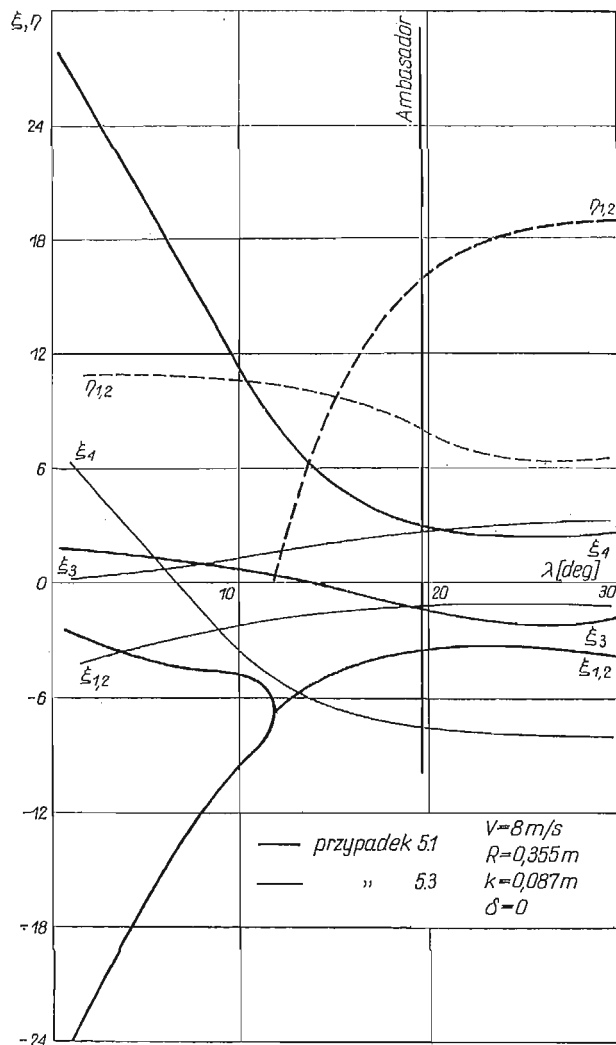
6.1. Wpływ parametrów konstrukcyjnych na stateczność. Jako zmienne parametry konstrukcyjne zgodnie z rys. 6 przyjęto: promień koła R , długość roweru L_5 , kąt pochylenia kolumny kierowniczej λ , wyprzedzenie przedniego koła k i tarcie w kolumnie kierownicy δ .



Rys. 7. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji promienia kół roweru R



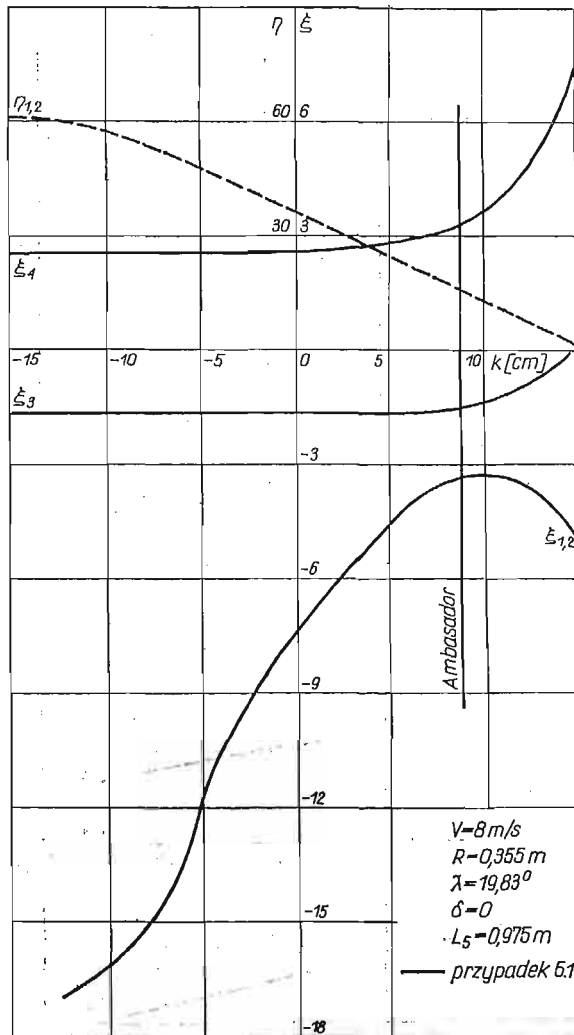
Rys. 8. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji długości roweru L_s



Rys. 9. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta pochylenia λ kolumny kierownicy

Wzrost promieni kół roweru R wpływa równocześnie na zwiększenie jego wysokości, powoduje ustatecznienie ruchów roweru (rys. 7). Powoduje przejście z nietłumionych aperiodycznych ruchów kierownicy $\xi_1 > 0$ i $\xi_2 < 0$ do tłumionych oscylacji $\xi_{1,2} < 0$ o wzrastającej częstości ($\eta_{1,2}$ rośnie). Równocześnie następuje ustatecznienie przechylenia (ξ_4 maleje) i zmniejszenie tłumienia aperiodycznych obrotów kierownicy (ξ_3 rośnie). Koła o małych promieniach powodują niestateczność roweru, co potwierdzają również doświadczenia.

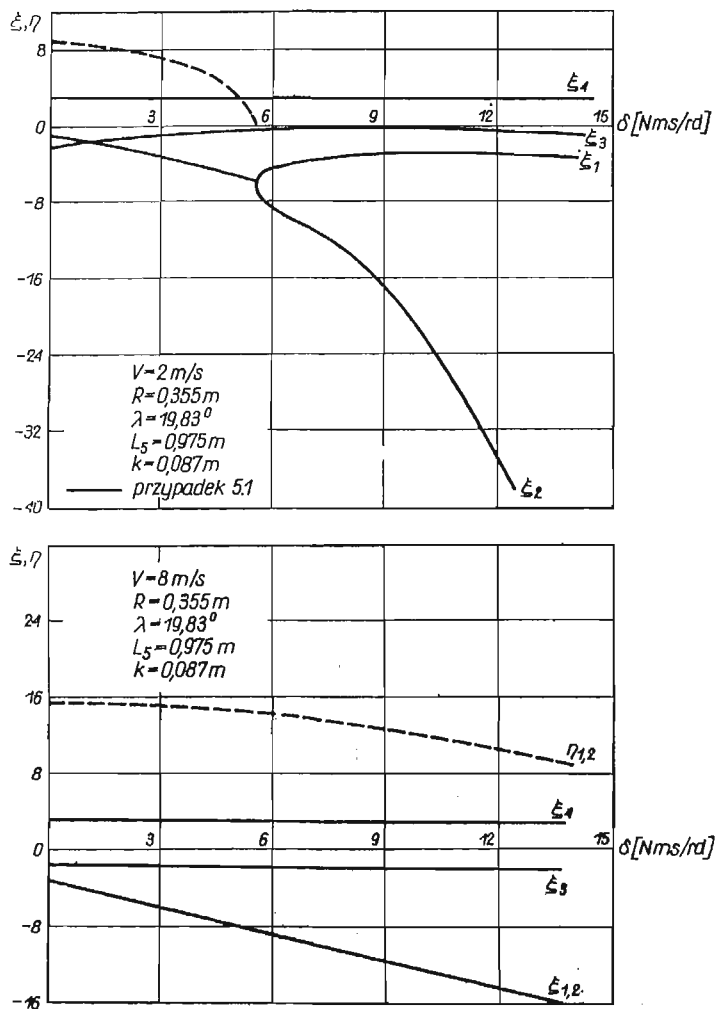
Wzrost długości roweru L_5 wpływa na zmniejszenie częstości oscylacji $\eta_{1,2}$ ruchów obrotowych kierownicy przy niewielkim spadku tłumienia $\xi_{1,2}$ (rys. 8). Na pozostałe ruchy nie ma istotnego wpływu.



Rys. 10. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji odsadzenia k przedniego koła względem osi kierownicy

Kąt pochylenia kolumny kierowniczej λ (rys. 6) ma decydujący wpływ na stateczność roweru. Wzrost kąta λ powoduje ustatecznienie roweru. Aperiodyczne ruchy kierownicy z rozbieżnych przechodzą w tłumione ξ_3 (rys. 9), a aperiodyczne obroty kierownicy roweru $\xi_1 < 0$ i $\xi_2 < 0$ na tłumione oscylacje $\xi_{1,2} < 0$ o ustalającej się częstości wahań $\eta_{1,2}$. Wzrost kąta λ wpływa silnie ustateczniająco na ruchy przechylające roweru, współczynnik tłumienia ξ_4 maleje. Widać wyraźnie rysujący się zakres optymalnych kątów pochylenia, stosowany właśnie przy współczesnych rowerach, określony na drodze eksperymentu.

Wyprzedzenie koła przedniego k (rys. 6) jest stosowane w celu zmniejszenia stateczności aby polepszyć sterowność pojazdów kołowych. Jak wynika z rys. 10 cel ten został



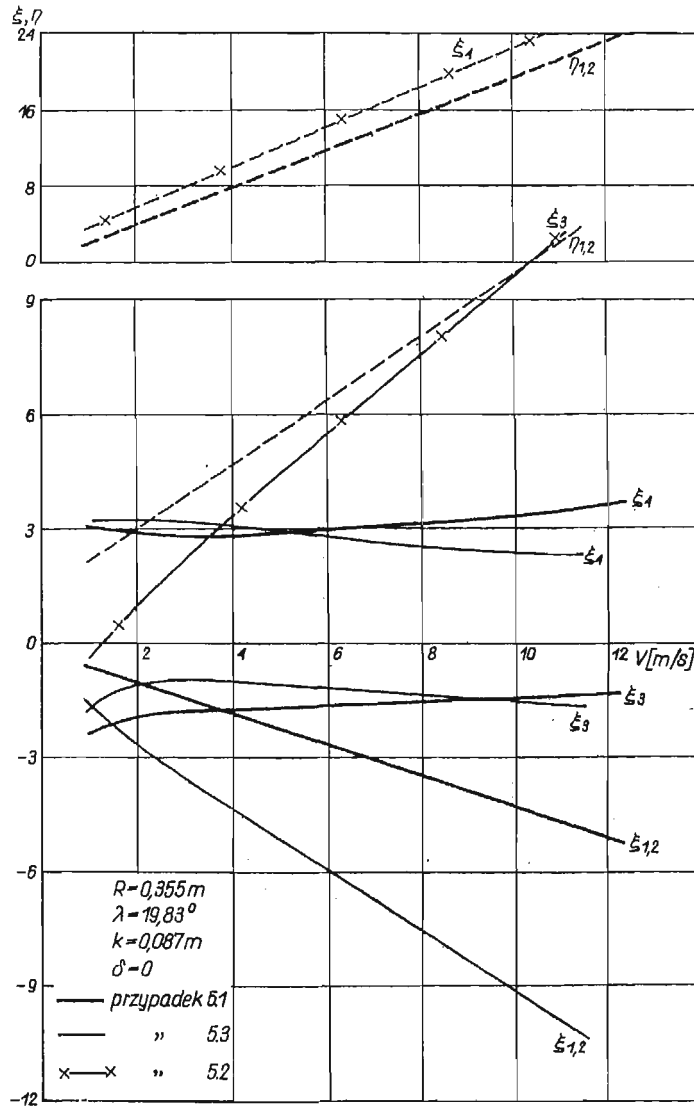
Rys. 11. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji tłumienia wiskotycznego δ w kolumnie kierownicy

osiągnięty, bowiem dodatnie wyprzedzenie, tzn. do przodu, zmniejsza tłumienie oscylacji kierownicy (współczynnik tłumienia $\xi_{1,2}$) przy równoczesnym spadku częstości ($\eta_{1,2}$). Wielkości odsadzeń stosowane przy rowerach są w zakresie odsadzeń optymalnych.

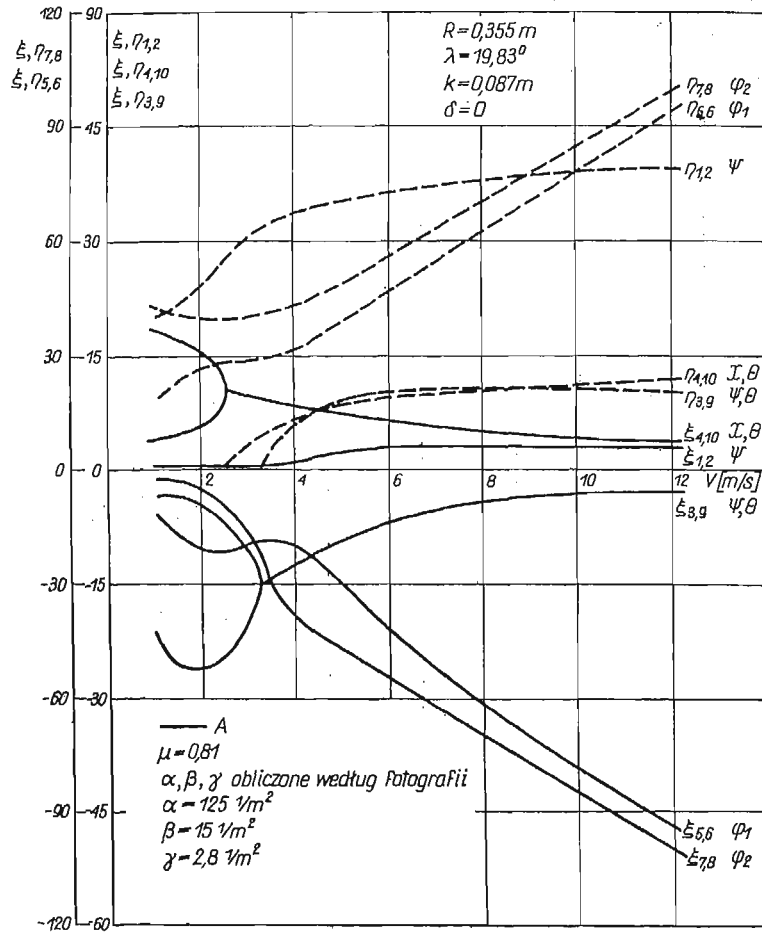
Wpływ tarcia wiskotycznego w kolumnie kierownicy na stateczność przedstawiono na rys. 11. Wzrost tarcia wyraźnie ustatednia ruchy obrotowe kierownicy i zależy również od prędkości jazdy. Nie ma natomiast wpływu na ruchy przechylające ξ_4 i aperiodyczne ruchy kierownicy ξ_3 . Przy małych prędkościach jazdy tłumione ($\xi_{1,2} < 0$) oscylacje $\eta_{1,2}$ przechodzą w ruchy aperiodyczne $\xi_1 < 0$ i $\xi_2 < 0$ bardzo silnie tłumione. Natomiast przy prędkościach większych występują wyłącznie oscylacje układu kierowniczego $\eta_{1,2}$ charakteryzujące się wzrostem tłumienia $\xi_{1,2}$.

6.2. Wpływ parametrów kinematycznych na stateczność. Rozpatrywano wpływ prędkości jazdy V na stateczność roweru, dokonując obliczeń trzech przypadków stateczności uproszczonej (rys. 12) i pełnej z uwzględnieniem podatności pneumatyków (rys. 13).

Wzrost prędkości jazdy wpływa ustateczniająco na ruchy roweru jako układu idealnie sztywnego (rys. 12), jak również z uwzględnieniem podatności pneumatyków (rys. 13). Szczególnie zaznacza się silny wpływ na szybkie oscylacje roweru, odpowiadające ruchom odchyłającym na przednim pneumatyku $\xi_{7,8}$, $\eta_{7,8}$ i tylnym pneumatyku $\xi_{5,6}$ i $\eta_{5,6}$. Wzrost prędkości powoduje zwiększenie tłumienia ($\xi_{5,6}$ i $\xi_{7,8}$ silnie maleją) przy równoczesnym wzroście częstości oscylacji ($\eta_{5,6}$ i $\eta_{7,8}$ rosną). Szybka jazda jest korzystniejsza.

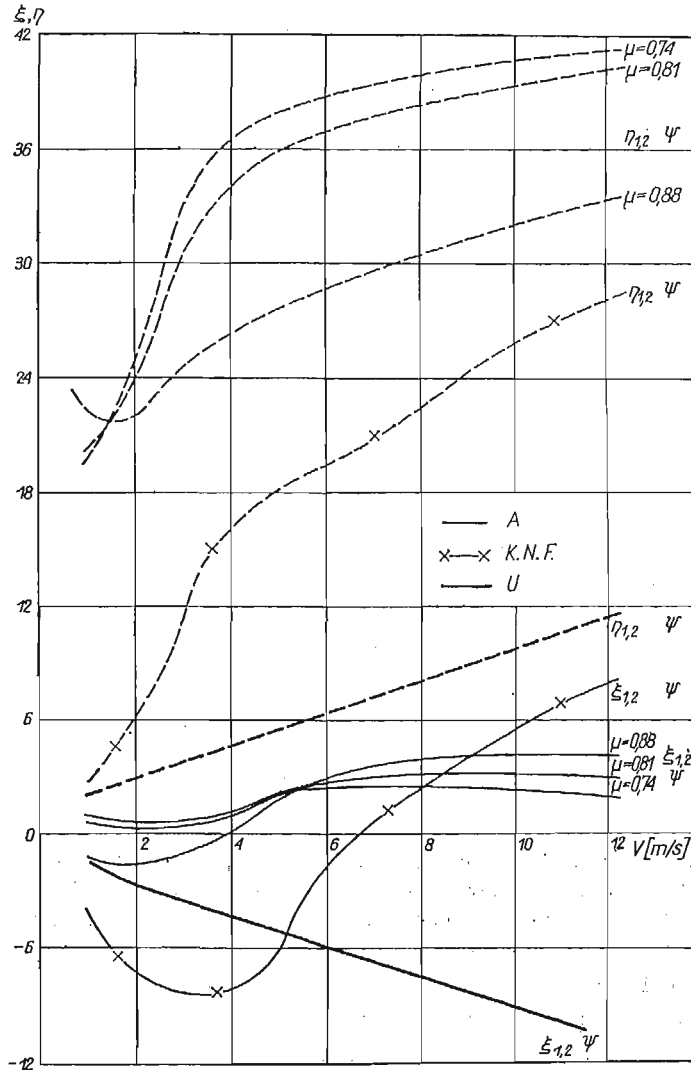


Rys. 12. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji prędkości jazdy V i ich porównanie przy różnych uproszczeniach modelu fizycznego sztywnego roweru

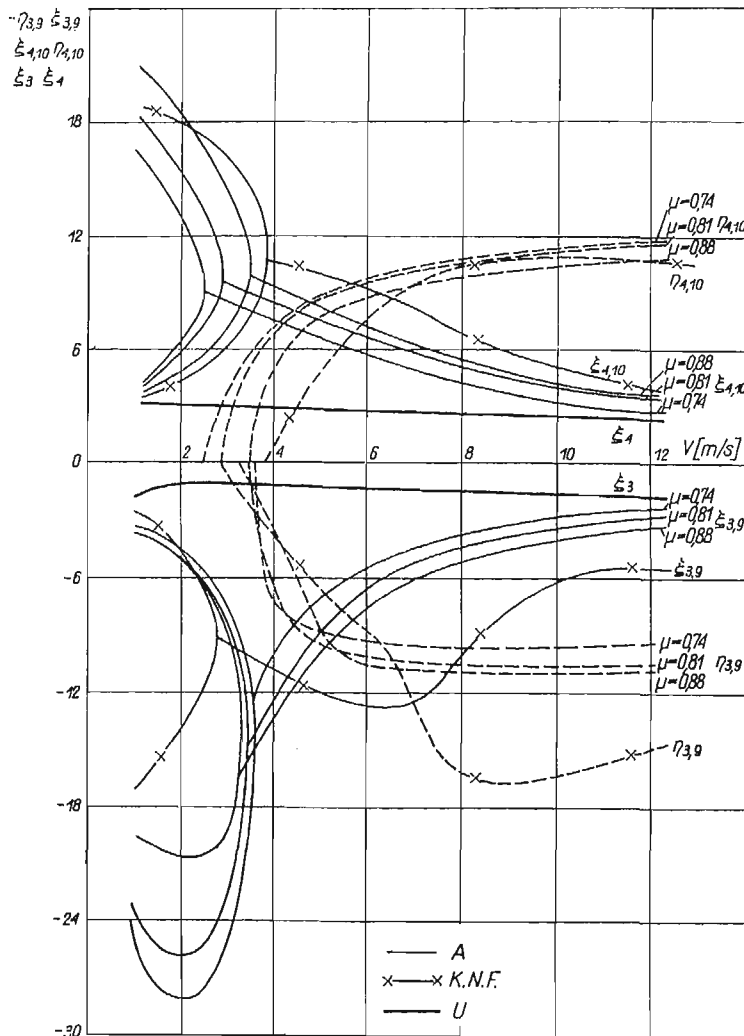


Rys. 13. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji prędkości jazdy V dla roweru na odkształcalnych pneumatykach

6.3. Wpływ podatności pneumatyków na stateczność. Uwzględnienie podatności poprzecznej pneumatyków daje w rozwiązaniu pełnym oprócz wartości własnych charakteryzujących układ sztywny $\lambda_{1,2}$, λ_3 i λ_4 , dwie nowe pary wartości własnych zespolonych sprzężonych $\lambda_{5,6}$ i $\lambda_{7,8}$ (rys. 13, 16, 17) charakteryzujące szybkie oscylacje $\eta_{5,6}$ i $\eta_{7,8}$ zawsze silnie tłumione $\xi_{5,6} < 0$ i $\xi_{7,8} < 0$, odpowiadające ruchom wywołanym skręcaniem pneumatyków tylnego φ_1 i przedniego φ_2 .



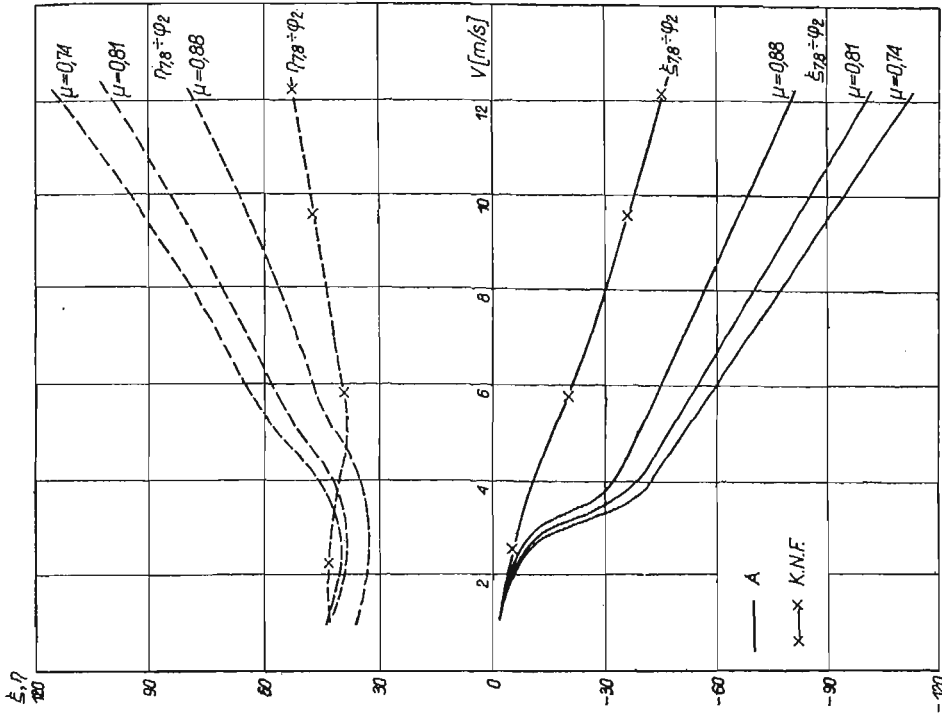
Rys. 14. Porównanie tłumienia $\xi_{1,2}$ i częstości oscylacji $\eta_{1,2}$ w funkcji prędkości V , odpowiadających ruchom obrotowym kierownicy ψ



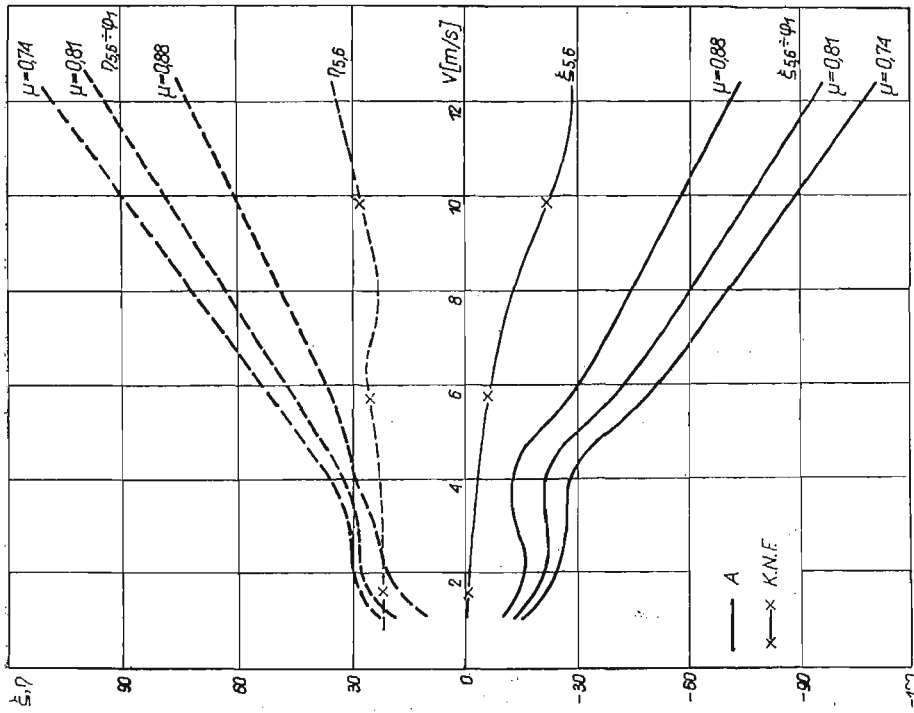
Rys. 15. Porównanie tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji prędkości jazdy V , odpowiadających ruchom harmonicznym kierownicy ψ sprzężonym z odchyleniem roweru θ ($\eta_{3,3}$, $\xi_{3,3}$) oraz ruchom przechylającym roweru χ sprzężonym z odchyleniem θ ($\eta_{4,10}$, $\xi_{4,10}$)

Stopnie swobody, wynikające z podatności pneumatyków, wprowadzają dodatkowe sprzężenia między kinematycznymi stopniami swobody $\lambda_{3,9}$ i $\lambda_{4,10}$ (rys. 12, 13, i 15), co nie tylko ma wpływ na wyniki ilościowe ale również wpływa na charakter obliczonego ruchu.

Wyniki rozwiązań, uwzględniające wpływ deformacji pneumatyka, przedstawiono na rys. 14–15 dla współczynników kinematycznych α , β i γ , obliczonych według teorii KIELDYSZA i zgodnie z NEJMARKIEM i FUFAJEWEM «K–N–F» oraz porównano z wynikami otrzymanymi po zmodyfikowaniu obliczeń przez autorów «A» w oparciu o doświadczenia, jak również podano wyniki stateczności uproszczonej «U».



Rys. 17. Porównanie tłumienia $\xi_{7,8}$ i częstości oscylacji $\eta_{7,8}$ w funkcji prędkości jazdy V , odpowiadających szybkim oscylacjom odchylającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_2 pneumatyka przedniego koła



Rys. 16. Porównanie tłumienia $\xi_{5,6}$ i częstości oscylacji $\eta_{5,6}$ w funkcji jazdy V , odpowiadających szybkim oscylacjom odchylającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_1 pneumatyka tylnego koła

7. Wnioski ogólne

Jak wynika z przedstawionej pracy, stosowane przez wielu autorów (ŁOJCJAŃSKI, ŁURIE, KIBLDYSZ, NEJMARK, FUFAJEW) uproszczenia modeli fizycznych lub równań ruchu w celu ułatwienia obliczeń przez obniżenie stopnia równania charakterystycznego nie zawsze mogą być stosowane. Uproszczenia takie mogą prowadzić do błędnych rozwiązań i błędnej interpretacji wyników, charakteryzujących przyjęty model fizyczny, a niejednokrotnie utożsamiany z rzeczywistym pojazdem.

Współczynniki kinematyczne α i β wyznaczone zgodnie z «K-N-F» zależą wyłącznie od promienia nieodkształcalnego koła

$$\alpha = \frac{2}{R^2}, \quad \beta = \frac{2}{R}$$

i nie uwzględniają podatności pneumatyka — teoria półsztywnego koła (określenie autorów). Natomiast uwzględnienie podatności pneumatyka poprzez przyjęty współczynnik μ i wyznaczenie doświadczalnie lokalnej deformacji pneumatyka ma wpływ na współczynniki kinematyczne (tablica 1), a tym samym na tłumienie i częstości oscylacji drgań pojazdu (rys. 14-17).

Z powyższego wynika, że: *przy wyznaczaniu współczynników kinematycznych, należy określić lokalny obszar deformacji pneumatyka.*

Z obliczeń wynika, że dla przykładowo obranego roweru «Ambasador» przyjęte parametry konstrukcyjne są wielkościami optymalnymi, np.: promień kół R (rys. 7), kąt pochylenia osi kierownicy λ (rys. 9), odsadzenie przedniego koła względem osi kierownicy k (rys. 10).

Przeprowadzone badania i opracowane programy na EMC mogą mieć praktyczne zastosowanie dla ośrodków konstrukcyjnych, bowiem już w fazie konstruowania można obliczyć efekty nowych rozwiązań lub zmian.

Literatura cytowana w tekście

1. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
2. E. DOHRING, *Die Stabilität von Einspurfahrzeugen*, Forsch. Geb. Ingenieurwesens, B. 24. N2, 50—62, 1955.
3. J. R. ELLIS, *Vehicle dynamics*, Businers Books Limited, London 1969.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. A. VAN LUNTEREN, H. G. STASSEN, *Annual Report 1969 of the Man-Machine Systems Group*, Laboratorium Voor Meet — En Regeltechnik, Delft 21, April 1970.
7. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowanym*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 5 (1967).
8. J. MARYNIAK, M. LECH, A. NAŁĘCZ, *Identyfikacja dynamiczna pojazdów na pneumatykach*, Proceedings of the VIII-th Conference on Dynamic of Machines, Praha, Liblice 1973.

9. J. MARYNIAK, *Analiza dynamiczna modeli pojazdów na pneumatykach*, Zeszyty Naukowe Przemysłowego Instytutu Motoryzacji, Nr 1, 1974.
10. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Bionika ruchu*, PWN, Warszawa 1971.
11. *Nowoczesne metody numeryczne*, opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
12. H. B. PASEJKA, *The wheel shimmy phenomenon*, Rotterdam 1966.
13. L. A. PARS, *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann, London 1964.
14. Z. GORAJ, *Stateczność boczna roweru z uwzględnieniem odkształcalności poprzecznej pneumatyków*, praca magisterska. Zakład Mechaniki IMS PW, 1972 (nie publikowana).
15. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Вопросы устойчивости велосипеда*, Задачі і питання Нелінійної механіки, № 15/1973.
16. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц*, Изд. Наука, Москва 1966.
17. И. И. КАЛЖЕР, А. Д. де ПАТЕР, *Обзор теории локального скольжения в области упругого контакта с сухим трением*, Прикладная механика, т. VII, в. 5, 1971.
18. М. В. КЕЛДЫШ, *Шимми переднего колеса трехколесного шасси*, Гр. ЦАГИ, 1945.
19. А. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ, А. И. ЛУРЬЕ, *Курс теоретической механики*, Гостехиздат 1955.
20. Л. Г. ЛОВАС, *Анализ развития и современного состояния динамики колесных машин*, Прикладная механика, т. VIII, в. 5, 1972.
21. Л. Г. ЛОВАС, *До теорії шиммі літака*, Доповіді Академії Наук Української РСР, 3 серія А 1973.
22. Л. Г. ЛОВАС, *Шляхова стійкість рівномірного прямиoliniйного кочення колеса*, Доповіді АН УРСР, 4 серія А, Київ 1973.
23. Ю. И. НЕЙМАРК, Н. А. ФУФЛЕВ, *Динамика неавтономных систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
24. Ю. И. НЕЙМАРК, Н. А. ФУФЛЕВ, *Устойчивость криволинейного движения экипажа на балонных колесах*, Прикладная математика и механика, т. 35, 1971.
25. И. РОКАР, *Неустойчивость в механике*, И. Л. Москва 1959.
26. И. В. СТРАЖЕВА, В. С. МЕЛКУМОВ, *Векторно-матричные методы в механике полета*, Машиностроение, Москва 1973.

R e z y m e

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕЛОСИПЕДА НА ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИНАХ

В работе рассматривается, на примере велосипеда, устойчивость двухколесных транспортных средств с учетом податливости пневматических шин. Поперечная и крутильная податливости шин определялись экспериментальным путем.

Велосипед рассматривается как механическая система с англономными связями, состоящая из жестких элементов. Уравнения движения выводились на основании уравнений Маджи для англономных связей, а уравнения движения для исследования упрощенной устойчивости выводились из уравнений Лагранжа первого рода с сомножителями и с коэффициентами англономных связей.

Пример численного расчета проделан для туристического велосипеда „Амбасадор”. Исследовалось при этом влияние на устойчивость таких параметров конструкции, как радиус колеса, угол наклона руля, опережение переднего колеса, длина велосипеда и трение в рулевой колонке.

Исследовалось также влияние на устойчивость кинематического параметра т. е. скорости и податливости шин.

Сравнивались и анализировались результаты, полученные при упрощениях разного вида а также рассматривалось влияние предположений, содержащихся в модели пневматической шины Келдыша на правильность полученных результатов.

S u m m a r y

STABILITY PROBLEMS OF A BICYCLE EQUIPPED
WITH PNEUMATIC WHEELS

The problem under consideration concerns the side stability of a bicycle equipped with pneumatic wheels. The bicycle and the cyclist constitute a mechanical system with nonholonomic constraints with eight degrees of freedom. Experiments are performed to determine the moments of inertia and side deviation of racing an „Ambasador” bicycle with the cyclist riding on. Calculations are accomplished for the complete set of equations as well as for a simplified model with reduced degrees of freedom. The simplification of the set of equations which reduces the degree of the characteristic equation is not always applicable since it may cause false solutions and their erroneous interpretation.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 kwietnia 1974 r.
