MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 12 (1974)

KONSTRUKCJA FUNKCJI GREENA DLA RÓWNANIA BIHARMONICZNEGO W OBSZARZE KOŁA LUB WYCINKA KOŁOWEGO

EUGENIUSZ WACHNICKI (KRAKÓW)

Celem pracy jest efektywna konstrukcja funkcji Greena dla koła i pewnych obszarów kątowych dla równania $\Delta^2 u = 0$ z warunkami brzegowymi $u|_C = 0$, $\Delta u|_C = 0$, gdzie C jest brzegiem obszaru. Zagadnienie to znane jest pod nazwą zagadnienie Riquiera [1].

1. Konstrukcja funkcji Greena dla koła

Znane jest rozwiązanie problemu Riquiera dla koła [1]. Rozwiązanie to uzyskane zostało bez znajomości funkcji Greena. Podamy jednak konstrukcję funkcji Greena dla koła ze względu na jej znaczenie przy konstrukcji funkcji Greena dla pewnych obszarów kątowych.

Niech K oznacza obszar kołowy $x^2+y^2 < R^2$. Niech P i Q będą dwoma dowolnymi punktami tego obszaru oraz niech $r = |PQ|$. Oznaczmy przez $G(P, Q)$ szukaną funkcję Greena z biegunem w punkcie P, tzn. funkcję taką, że

$$G(P,Q) = -2r^2 \ln r + H(P,Q), \tag{1}$$

gdzie $H(P, Q)$ jest funkcją biharmoniczną punktu Q w obszarze K dla $P \in K$, oraz

$$G(P,Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C \quad \text{i} \quad P \in K, \tag{2}$$

$$\Delta_Q G(P,Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C \quad \text{i} \quad P \in K, \tag{3}$$

gdzie C jest brzegiem K.

W dalszym ciągu rozważymy dwa przypadki:

a) punkt P jest dowolnym punktem K, różnym od początku układu współrzędnych,

b) punkt P jest środkiem K.

Rozważmy najpierw przypadek a) i załóżmy, że punkty P, Q mają w biegunowym układzie odpowiednio współrzędne $P = (r_0, t_0)$, $Q = (\varrho, s)$. Wtedy funkcja $G(P, Q) = G(r_0, t_0, \varrho, s)$ spełnia warunki:

$$G(r_0, t_0, \varrho, s) = 0 \qquad \text{dla} \quad \varrho = R, \quad r_0 \in (0, R), \quad t_0, s \in [0, 2\pi), \tag{2'}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial G}{\partial \varrho} = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = R, \quad r_0 \in (0, R), \quad t_0, s \in [0, 2\pi). \tag{3'}$$

Prawdziwe jest następujące:

Twierdzenie 1 [2]. *Jeżeli funkcje $u_0(Q)$, $u_1(Q)$ są funkcjami harmonicznymi w kole K, to funkcja $u(Q) = u_0(Q) + \varrho^2 u_1(Q)$ jest funkcją biharmoniczną w K.*

Przyjmijmy $p = \varrho/R$. Szeregi

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k(a_k \cos ks + b_k \sin ks), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p^k(c_k \cos ks + d_k \sin ks)$$

przy odpowiednich współczynnikach a_k, b_k, c_k, d_k są funkcjami harmonicznymi w K, zatem w oparciu o twierdzenie 1 widzimy, że funkcja

$$G(P,Q) = 2r^2 \ln \frac{\bar{r} r_0}{rR} + \sum_{k=0}^{\infty} p^k(a_k \cos ks + b_k \sin ks) + p^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k(c_k \cos ks + d_k \sin ks), \tag{4}$$

gdzie $\bar{r} = |\bar{P}Q|$, $\bar{P}$ oznacza obraz punktu P w inwersji względem okręgu C: $x^2+y^2 = R^2$, ma postać (1). Dobierzemy z kolei współczynniki a_k, b_k, c_k, d_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ we wzorze (4) tak, by spełnione były warunki (2′), (3′).

Dla $\varrho = R$ z własności inwersji mamy

$$\frac{\bar{r} r_0}{rR} = 1, \tag{5}$$

zatem warunek (2′) równoważny jest równości

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \sin ks) + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos ks + d_k \sin ks) = 0.$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$a_k + c_k = 0, \quad b_k + d_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Przejdziemy z kolei do warunku (3′). Mianowicie, przez proste przeliczenie otrzymujemy

$$\Delta_Q\left(r^2 \ln \frac{\bar{r} r_0}{rR}\right) = 4 \ln \frac{\bar{r} r_0}{rR} + 2 \frac{\bar{r}^2 + r^2 - (\bar{r}_0 - r_0)^2}{\bar{r}^2} - 4,$$

gdzie $\bar{r}_0$ oznacza odległość punktu $\bar{P}$ od początku układu.

Z (5) wynika, że przy $\varrho = R$

$$\Delta_Q\left(2r^2 \ln \frac{\bar{r} r_0}{rR}\right) = 8 \frac{r_0^2 - R^2}{R^2} \frac{1 - p_1 \cos(s - t_0)}{p_1^2 + 1 - 2p_1 \cos(s - t_0)},$$

gdzie $p_1 = \dfrac{r_0}{R}$.

Biorąc pod uwagę wzór (por. [3])

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_1^k \cos k(s - t_0) = \frac{1 - p_1 \cos(s - t_0)}{p_1^2 + 1 - 2p_1 \cos(s - t_0)}, \qquad |p_1| < 1,$$

otrzymujemy

$$\Delta_Q\left(2r^2 \ln \frac{\bar{r} r_0}{rR}\right)\Bigg|_{\varrho = R} = 8 \frac{r_0^2 - R^2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_1^k \cos k(s - t_0).$$

Ponadto

$$\Delta_Q\left[\sum_{k=0}^{\infty} p^k(a_k\cos ks+b_k\sin ks)\right] = 0$$

oraz

$$\Delta_Q\left(p^2\sum_{k=0}^{\infty} p^k(c_k\cos ks+d_k\sin ks)\right) = \frac{4}{R^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p^k(c_k\cos ks+d_k\sin ks).$$

Ostatecznie dla $Q \in C$, tzn. dla $\varrho = R$, mamy

$$\Delta_Q G(P,Q) = 8\frac{r_0^2-R^2}{R^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_1^k\cos k(s-t_0)+\frac{4}{R^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(c_k\cos ks+d_k\sin ks).$$

Z (3') mamy

$$2(r_0^2-R^2)\sum_{k=0}^{\infty} p_1^k\cos k(s-t_0)+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(c_k\cos ks+d_k\sin ks) = 0,$$

więc

$$\begin{cases} 2(r_0^2-R^2)p_1^k\cos kt_0+(k+1)c_k = 0, \\ 2(r_0^2-R^2)p_1^k\sin kt_0+(k+1)d_k = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Z równości (6) i (7) otrzymujemy

$$a_k = 2\frac{r_0^2-R^2}{k+1}p_1^k\cos kt_0, \qquad b_k = 2\frac{r_0^2-R^2}{k+1}p_1^k\sin kt_0,$$

$$c_k = -2\frac{r_0^2-R^2}{k+1}p_1^k\cos kt_0, \qquad d_k = -2\frac{r_0^2-R^2}{k+1}p_1^k\sin kt_0$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Stąd ostatecznie

$$G(P,Q) = 2r^2\ln\frac{\bar{r}r_0}{rR}-2\frac{(R^2-r_0^2)(R^2-\varrho^2)}{R^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho r_0}{R^2}\right)^k\frac{\cos k(s-t_0)}{k+1}.$$

Przejdźmy obecnie do przypadku b), gdy punkt P jest środkiem koła K. Wtedy funkcję $G(P,Q)$ przewidujemy w postaci

$$G(P,Q) = 2\varrho^2\ln p+\sum_{k=0}^{\infty}p^k(a_k\cos ks+b_k\sin ks)+\sum_{k=0}^{\infty}p^{k+2}(c_k\cos ks+d_k\sin ks). \tag{8}$$

Przeprowadzając rozumowanie podobnie jak w przypadku a) otrzymujemy

$$G(P,Q) = 2\varrho^2\ln\frac{\varrho}{R}-2(R^2-\varrho^2). \tag{9}$$

2. Funkcja Greena dla obszaru kątowego

Podamy konstrukcję funkcji Greena dla zagadnienia Riquiera dla obszaru kątowego $D = \{(x,y): x > 0, \quad 0 < y < ax, \quad x^2+y^2 < R^2\}$; $a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Niech $l_1 = \{(x,y): 0 \leqslant x < R, y = 0\}$, $l_2 = \left\{(x,y): 0 < x < \frac{R}{\sqrt{1+a^2}}, \; y = ax\right\}$ oraz $l_3 = \left\{(x,y): x^2+y^2 = R^2, \quad \frac{R}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant x < R\right\}$.

Zbiór $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ jest brzegiem obszaru D. Niech punkty $P_0 \in D, Q \in D \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$. Współrzędne biegunowe tych punktów oznaczmy odpowiednio $P_0 = (R_0, t_0), Q = (\varrho, s)$. Niech $r_0 = |P_0Q|$.

Odbijając punkt P_0 kolejno względem prostych $y = \alpha_k x$, gdzie $\alpha_k = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$, otrzymujemy $2n-1$ punktów, które oznaczmy odpowiednio przez P_k. Niech $r_k = |P_kQ|$. Przyjmijmy, że punkt P_k ma współrzędne biegunowe $P_k = (R_0, t_k)$. Obrazy punktów P_k w inwersji względem okręgu $x^2+y^2 = R^2$ oznaczmy przez $\overline{P}_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Niech $\bar{r}_k = |\overline{P}_kQ|$.

Lemat 1. Dla $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$

$$t_k = \frac{2\pi}{n} E\left(\frac{k+1}{2}\right) + (-1)^k t_0, \tag{10}$$

gdzie $E\left(\frac{k+1}{2}\right)$ oznacza część całkowitą liczby $\frac{k+1}{2}$.

Dowód. Gdy k jest liczbą parzystą, to punkt P_k powstaje z punktu P_0 jako obraz w złożeniu k symetrii o osiach $y = \alpha_m x$, $m = 1, 2, \ldots, k$. Złożenie k symetrii możemy zastąpić złożeniem $\frac{k}{2}$ obrotów o kącie obrotu $\frac{2\pi}{n}$. Stąd $t_k = t_0 + \frac{2\pi}{n}\frac{k}{2}$. Jeżeli k jest liczbą parzystą, to $E\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k}{2}$, zatem w tym przypadku zachodzi związek (10).

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to punkt P_k powstaje z punktu P_{k-1} przez obrót o kąt $2\left(\frac{k\pi}{n} - t_{k-1}\right)$, więc $t_k = \frac{2k\pi}{n} - t_{k-1}$. Korzystając z pierwszej części dowodu oraz z faktu, że $E\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k+1}{2}$, gdy k jest liczbą nieparzystą, mamy związek (10).

Lemat 2. Zachodzą równości:

$$t_k = 2\pi - t_{2n-1-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$t_k = 2\pi + \frac{2\pi}{n} - t_{2n+1-k} \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Dowód. Zauważmy, że $E\left(n - \frac{k}{2}\right) = n - E\left(\frac{k+1}{2}\right)$, zatem

$$t_{2n-1-k} = \frac{2\pi}{n} E\left(\frac{2n-k}{2}\right) + (-1)^{-k-1} t_0 = 2\pi - t_k.$$

Podobnie

$$t_{2n+1-k} = \frac{2\pi}{n} E\left(\frac{2n+2-k}{2}\right) + (-1)^{-k+1} t_0 = 2\pi + \frac{2\pi}{n} - t_k.$$

Niech dla $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$

$$G_k(P_k, Q) = 2r_k^2 \ln \frac{\bar{r}_k R_0}{r_k R} - 2\frac{(R^2 - R_0^2)(R^2 - \varrho^2)}{R^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho R_0}{R^2}\right)^i \frac{\cos i(s-t_k)}{i+1}.$$

Przyjmijmy

$$G(P_0, Q) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q). \tag{11}$$

Twierdzenie 2. *Funkcja $G(P_0, Q)$ określona wzorem (11) jest funkcją Greena z biegunem w punkcie P_0 dla zagadnienia Riquiera w obszarze D.*

Dowód. Należy wykazać, że

$$G(P_0, Q) = -2r_0^2 \ln r_0 + H(P_0, Q), \tag{12}$$

gdzie funkcja $H(P_0, Q)$ jest funkcją biharmoniczną punktu Q w obszarze D, gdy $P_0 \in D$,

$$G(P_0, Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad P_0 \in D, \tag{13}$$

$$\Delta G(P_0, Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad P_0 \in D. \tag{14}$$

Skoro każda z funkcji $G_k(P_k, Q)$ jest funkcją Greena dla koła $x^2 + y^2 < R^2$ z biegunem odpowiednio w punkcie P_k, więc funkcja $G(P_0, Q)$ jest postaci (12). Dla dowodu (13) rozpatrzymy trzy przypadki:

a) $Q \in l_1$, wtedy $s = 0$. Z pierwszej części lematu 2 wynika, że

$$G_k(P_k, Q) = G_{2n-1-k}(P_{2n-1-k}, Q); \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

więc

$$G(P_0, Q) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q) + \sum_{k=n}^{2n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_{2n-1-k}(P_{2n-1-k}, Q) = 0.$$

b) $Q \in l_2$, wtedy $s = \frac{\pi}{n}$. Z drugiej części lematu 2 wynika, że $\cos\left(\frac{\pi}{n} - t_{2n+1-k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n} - t_k\right)$; $k = 2, 3, \ldots, n$ oraz $\cos\left(\frac{\pi}{n} - t_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n} - t_0\right)$, zatem

$$G_0(P_0, Q) = G_1(P_1, Q) \quad \text{i} \quad G_k(P_k, Q) = G_{2n+1-k}(P_{2n+1-k}, Q); \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Stąd, podobnie jak w przypadku a), otrzymujemy $G(P_0, Q) = 0$.

c) $Q \in l_3$, wtedy $\varrho = R$, zatem $G_k(P_k, Q) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Zatem również $G(P_0, Q) = 0$, co kończy dowód równości (13).

Dla dowodu równości (14) zauważmy, że

$$\Delta_Q G_k(P_k, Q) = 8\ln\frac{\bar{r}_k R_0}{r_k R} + 4\frac{\bar{r}_k^2 + r_k^2 - (\bar{R}_0 - R_0)^2}{\bar{r}_k^2} - 8 +$$

$$+8\frac{R^2 - R_0^2}{R^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho R_0}{R^2}\right)^i \cos i(s - t_k).$$

Postępując podobnie jak przy dowodzie równości (13), otrzymujemy równość (14).

Niech funkcje f_1, f_2 będą funkcjami określonymi na brzegu C obszaru D. Wtedy, przy pewnych założeniach o funkcjach f_1, f_2, można udowodnić, że funkcja

$$u(x, y) = u(P_0) = \frac{1}{8\pi}\left(\int\limits_C \left[f_1(Q)\frac{d\Delta_Q G(P_0, Q)}{dn_Q} + f_2(Q)\frac{dG(P_0, Q)}{dn_Q}\right] ds_Q\right)$$

jest funkcją biharmoniczną w obszarze D oraz $u(P_0)|_C = f_1(P_0)$, $u(P_0)|_C = f_2(P_0)$, gdzie n jest normalną do brzegu C skierowaną do wnętrza obszaru D.

Literatura cytowana w tekście

1. M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris 1936.
2. M. KRZYŻAŃSKI, *Partial differential equation of second order*, Vol I, Warszawa 1972.
3. И. С. ГРАДШТЕЙН, Ю. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сум, рядов и произведений*, Москва 1963.

Р е з ю м е

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБЛАСТИ КРУГА И КРУГОВОГО СЕКТОРА

В работе показано построение функции Грина для двумерного бигармонического уравнения в случае круга и кругового сектора с центральным углом π/n удовлетворяющей на ограничивающем контуре C следующим краевым условиям $u(x, y)|_C = 0$, $\Delta u(x, y)|_C = 0$.

S u m m a r y

THE CONSTRUCTION OF THE GREEN FUNCTION FOR BIHARMONIC EQUATION FOR THE CIRCULAR DOMAIN OR CIRCULAR SECTOR

In the paper the Green function for equation $\Delta^2 u(x,y) = 0$ and circular domain and circular sector with boundary data of Riquier type, i.e. $u(x,y)|_C = 0$, $\Delta u(x,y)|_C = 0$, is effectively constructed. C denotes the boundary of the convenient domain.

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1974 r.