

## POWOLNE PRZEPŁYWY CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH W OBSZARACH WEJŚCIOWYCH RUR I KANAŁÓW

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Znajomość zjawisk występujących w obszarach wejściowych przewodów o różnych kształtach posiada istotne znaczenie dla badania przepływów technologicznych, a zwłaszcza przepływów spotykanych w przetwórstwie polimerów.

W przypadku cieczy newtonowskich lub cieczy czysto lepkich, opisywanych potęgowymi równaniami konstytutywnymi, najczęściej stosowano metody opierające się na sformułowanej przez PRANDTLA i von KÁRMÁNA teorii warstwy przyściennej (por. [1, 2, 3, 4, 5]). Szeroko również wykorzystywano podejścia polegające na numerycznym całkowaniu zlinearyzowanych równań Naviera-Stokesa; pozwalały one ocenić przybliżenia i ograniczenia wynikające ze stosowania koncepcji warstwy przyściennej. Należy podkreślić, że wyniki uzyskiwane dla lepkich cieczy nienewtonowskich nie wniosły wiele nowego do jakościowego opisu przepływów w porównaniu z wcześniejszymi wynikami uzyskanymi dla cieczy newtonowskich przy umiarkowanie dużych liczbach Reynoldsa. Z drugiej strony, zachowanie się cieczy newtonowskich w obszarach wejściowych nie wydaje się być charakterystyczne dla cieczy lepkospężystych.

Niewiele opublikowano prac dotyczących analizy lepkospężystych warstw przyściennych (np. [6, 7]), jak również rozważań związanych z lepkospężystymi przepływami w obszarach wejściowych przewodów płaskich oraz kołowsymetrycznych (np. [8, 5]). Taki stan rzeczy spowodowany został przede wszystkim trudnościami spotykanymi przy próbach rozwiązania zagadnień dla bardziej ogólnych równań konstytutywnych. Nie bez znaczenia pozostaje również kwestionowana słuszność innych założeń, zwykle przyjmowanych w przybliżeniach warstwy przyściennej.

Dotychczasowe wyniki, uzyskiwane głównie dla cieczy typu Rivlina-Ericksena (por. [9]), nie wyjaśniają zadowalająco stosunkowo długich obszarów wejściowych oraz dużych strat ciśnienia, obserwowanych doświadczalnie dla roztworów i stopów polimerów charakteryzujących się dużą lepkospężystością [10, 11, 8].

Niektórzy autorzy, na przykład METZNER i WHITE [8], donieśli o możliwości występowania dodatkowych podobszarów w części wejściowej, w których zachowanie się cieczy przypomina bardziej zachowanie się ośrodków «półsztywnych» lub «ciała stałego», jeśli tylko charakterystyczny czas cieczy (np. reprezentatywny czas relaksacji) jest większy od czasu potrzebnego na przepływ. W takiej sytuacji nie są ogólnie słuszne ani przybliżenia przyjmowane dla warstwy przyściennej, ani też równania konstytutywne typu cieczy Rivlina-Ericksena.

W niniejszej pracy rozważono zagadnienia przepływów lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur lub płaskich kanałów, bez korzystania z koncepcji warstwy przyściennej. Założono przy tym, że liczby Reynoldsa charakteryzujące przepływy są małe, co uzasadnia stosowanie przybliżenia quasi-statycznego, oraz że stosunek poprzecznych wymiarów przewodu do długości obszaru wejściowego jest również mały, co może mieć miejsce przy przepływach przez stosunkowo wąskie szczeliny lub kapilary. Przedstawiony sposób podejścia stanowi rozszerzenie rozważań zaproponowanych przez nas dla płaskich przepływów w kanałach [12].

Przy statycznej analizie zagadnień nie zakładano żadnych istotnych ograniczeń na równania konstytutywne cieczy lepkosprężystej; są to równania opisujące zachowanie się nieściśliwej cieczy prostej (por. [9, 13]).

Przy kinematycznej analizie przepływów, prowadzącej do przybliżonego określenia pól prędkości w obszarach wejściowych, dla poprzednio określonych rozkładów naprężeń ścinających i normalnych, ograniczono się do modelu nieściśliwej cieczy prostej stopnia drugiego. Wykorzystano przy tym fakt, że dla takich cieczy w quasi-statycznych przepływach przez wąskie rury lub płaskie kanały, pola prędkości są takie same lub zbliżone do cieczy newtonowskich (por. [14]).

Należy podkreślić, że w niniejszych rozważaniach rozkłady naprężeń uzyskano w sposób czysto formalny. Ogólnie rzecz biorąc, nie można rozróżnić efektów naprężeń normalnych od rozkładów ciśnienia na ściankach przewodu w obszarze wejściowym. Analizą tych zagadnień w częściach przewodów, w których przepływy są ustalone i wiskozymetryczne zajmuje się praca DAVIESA, HUTTONA i WALTERSA [15].

## 2. Ustalony przepływ ścinający

Będziemy najpierw rozważać ustalone i laminarne przepływy nieściśliwej cieczy prostej przez kołowsymetryczne rury lub płaskie kanały (uogólniony przepływ Poiseuille'a i uogólniony płaski przepływ Poiseuille'a), pod wpływem stałego gradientu ciśnienia  $f = \Delta P/L$ , gdzie  $L$  określa długość całego przewodu. Niech  $D$  oznacza odpowiednio średnicę rury,  $d$  zaś wysokość płaskiego kanału (odległość między ściankami). Początek układu współrzędnych będziemy przyjmować na początku przewodu, na jego osi. W walcowym układzie współrzędnych oś  $z$  pokrywa się z osią rury, w układzie zaś kartezjańskim oś płaskiego kanału skierowaną w kierunku przepływu oznaczymy przez  $x$ .

Można pokazać, że ogólne rozwiązanie równań dynamicznych

$$(2.1) \quad \text{Div } \mathbf{T} - \rho \text{ grad } \psi = \rho \dot{\mathbf{v}},$$

gdzie  $\mathbf{T}$  jest tensorem naprężenia,  $\rho$  — gęstością cieczy, zaś  $\psi$  — potencjałem zachowawczych sił masowych, przyjmuje, dla ustalonego i laminarnego przepływu cieczy prostej w rurze, postać następującą (por. COLEMAN, MARKOVITZ i NOLL [13]):

$$(2.2) \quad T^{(rz)} = -\frac{1}{2}fr, \quad T^{(rr)} = -h - k(r) + \rho\psi + fz, \\ T^{(zz)} = T^{(rr)} + \hat{\sigma}_1(S) - \hat{\sigma}_2(S),$$

gdzie indeksy w nawiasach trójkątnych oznaczają składowe fizyczne, zaś

$$(2.3) \quad \frac{dk}{dr} = \frac{1}{r} (T^{\langle rr \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle}), \quad k(r) = \int_0^r \frac{1}{\xi} \hat{\sigma}_2 \left( \frac{f\xi}{2} \right) d\xi.$$

Wielkości  $\hat{\sigma}_i(S)$  oznaczają zmodyfikowane funkcje naprężeń normalnych, mianowicie

$$(2.4) \quad \hat{\sigma}_1(S) = T^{\langle zz \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle}, \quad \hat{\sigma}_2(S) = T^{\langle rr \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle},$$

gdzie  $S = \frac{1}{2} fr$ .

Zupełnie podobnie, rozwiązanie równań (2.1) dla ustalonego i laminarnego przepływu przez płaski kanał przyjmuje postać (por. [12, 13])

$$(2.5) \quad \begin{aligned} T^{\langle xy \rangle} &= -fy, & T^{\langle yy \rangle} &= -h + \varrho\psi + fx, \\ T^{\langle xx \rangle} &= T^{\langle yy \rangle} + \sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa), \end{aligned}$$

gdzie  $\kappa$  oznacza gradient ścinania, zaś  $\sigma_i(\kappa)$  — funkcje naprężeń normalnych, mianowicie

$$(2.6) \quad \sigma_1(\kappa) = T^{\langle xx \rangle} - T^{\langle zz \rangle}, \quad \sigma_2(\kappa) = T^{\langle yy \rangle} - T^{\langle zz \rangle}.$$

Związek między funkcjami (2.4) i (2.6) jest następujący:

$$(2.7) \quad \hat{\sigma}_i(S) = \sigma_i(\kappa(S)), \quad i = 1, 2.$$

Zależności (2.2) i (2.5) pozostają w mocy dla jakiegokolwiek cieczy prostej, niezależnie od jej własności lepkospężystych. Chcąc określić odpowiednie profile prędkości lub objętościowe wydatki cieczy na jednostkę czasu, należy znać funkcje szybkości ścinania  $\kappa = \kappa(S)$  lub  $\kappa = \kappa(T^{\langle xy \rangle})$ .

### 3. Przepływy w obszarach wejściowych

Przy małych liczbach Reynoldsa, tj. dla przybliżenia quasi-statycznego, w równaniach (2.1) można pominąć czony inercyjne. Oznacza to, że dla stosunkowo powolnych przepływów cieczy o dużej lepkości, jakimi są niewątpliwie liczne stopy i skondensowane roztwory polimerów, wpływ efektów lepkościowych jest znacznie większy niż wpływ inercji cieczy.

Dla ustalonych, quasi-statycznych przepływów w obszarach wejściowych kołowsymetrycznych rur równania (2.1) przyjmują postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial_r T^{\langle rr \rangle} + \partial_z T^{\langle rz \rangle} + \frac{1}{r} (T^{\langle rr \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle}) - \varrho \partial_r \psi &= 0, \\ \partial_r T^{\langle rz \rangle} + \frac{1}{r} T^{\langle rz \rangle} + \partial_z T^{\langle zz \rangle} - \varrho \partial_z \psi &= 0. \end{aligned}$$

Podobnie, dla ustalonych quasi-statycznych przepływów w obszarach wejściowych płaskich kanałów, mamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial_x T^{\langle xx \rangle} + \partial_y T^{\langle xy \rangle} - \varrho \partial_x \psi &= 0, \\ \partial_x T^{\langle xy \rangle} + \partial_y T^{\langle yy \rangle} - \varrho \partial_y \psi &= 0. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę postać zależności (2.2), (2.3), obowiązujących dla przepływów ścinających (wiskozymetrycznych), będziemy poszukiwać rozwiązań równań (3.1) w postaci następujących ciągów:

$$\begin{aligned}
 T^{(rz)} &= \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)!} g^{(2i-1)}(z) r^{2i-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} M^{(k)}(z) r^k + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{k!} N^{(k)}(z) r^k, \\
 T^{(rr)} &= -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - M(z) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)!} g^{(2i)}(z) r^{2i} - \\
 (3.3) \quad &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{k!} M^{(k)}(z) r^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{k!} N^{(k)}(z) r^k, \\
 T^{(zz)} &= -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - N(z) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)!} g^{(2i)}(z) r^{2i} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k!} M^{(k)}(z) r^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\zeta_k}{k!} N^{(k)}(z) r^k,
 \end{aligned}$$

gdzie  $c, h$  są stałymi,  $g(z), M(z), N(z)$  — trzema dowolnymi funkcjami spełniającymi wymagane warunki brzegowe (por. p. 4), funkcja  $k(r)$  zaś określona jest wyrażeniami (2.3). Wskaźniki w nawiasach oznaczają odpowiednie pochodne funkcji względem zmiennej  $z$ . Z uwagi na postać równań równowagi (3.1), nie wszystkie pochodne funkcji  $M(z)$  i  $N(z)$  występują w (3.3). W tym celu należy przyjąć, że współczynniki  $\alpha_k, \dots, \zeta_k$  równe są zeru, z wyjątkiem następujących:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad \alpha_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-3, \quad 6m-1, & \beta_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-5, \quad 6m-3, \\
 \gamma_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-4, \quad 6m-2, & \delta_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-6, \quad 6m-4, \\
 \varepsilon_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-6, \quad 6m-2, & \zeta_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-4, \quad 6m-2,
 \end{aligned}$$

gdzie  $m = 1, 2, 3, \dots$

Można bezpośrednio sprawdzić, że wyrażenia (3.3) łącznie z warunkami (3.4) spełniają równania (3.1) z dokładnością do członów pomijalnych jako małe wyższego rzędu, jeśli tylko stosunek średnicy rury  $D$  do długości części wejściowej  $l$  jest wystarczająco mały. Bliższa analiza wymiarowa wyrażen zawierających pochodne funkcji  $g(z), M(z), N(z)$  dowodzi, że pominięte człony są proporcjonalne do  $\varepsilon^n$ , przy czym  $\varepsilon = D/l$ . Łatwo również zauważyć, że  $T^{(rz)}$  zawiera wyłącznie pochodne nieparzystych rzędów, podczas gdy  $T^{(rr)}$  i  $T^{(zz)}$  zawierają pochodne rzędów parzystych. Pochodne rzędu  $k$  funkcji  $g(z), M(z), N(z)$  określają człony rzędu  $\varepsilon^{k-1}$ .

Wyrażenia (3.3) i (3.4) pozostają również w mocy dla układu równań (3.2), jeśli pominać funkcję  $k(r)$ , mnożniki  $1/2$  występujące przy  $c$  w (3.3)<sub>1</sub> i przy wszystkich znakach sum

w (3.3) oraz zastąpić formalnie  $z$  przez  $x$ , zaś  $r$  przez  $y$ . Wówczas  $\epsilon = d/l$ , gdzie  $d$  oznacza odległość między ściankami płaskiego kanału.

Przedstawiony wyżej sposób podejścia pozwala na formalną budowę wyrażeń określających naprężenia w obszarach wejściowych rur lub płaskich kanałów, z dokładnością do członów dowolnego rzędu względem  $\epsilon$ .

Z uwagi na uproszczenie zapisów oraz możliwość przeprowadzenia analizy kinematycznej, ograniczymy się w dalszych rozważaniach do przypadku wąskich rurek (kapilar), lub szczelin, dla których pominięcie członów rzędu  $O(\epsilon^2)$  wydaje się wystarczająco uzasadnione.

Otrzymamy wówczas dla obszaru wejściowego kapilary następujące wyrażenia:

$$T^{(rz)} = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}g'(z)r + \frac{1}{2}N'(z)r,$$

$$(3.5) \quad T^{(rr)} = -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - M(z) - \frac{1}{4}r^2(g''(z) + N''(z)),$$

$$T^{(zz)} = -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - N(z) - \frac{1}{4}r^2(g''(z) + M''(z) + N''(z)),$$

$$(3.6) \quad T^{(zz)} - T^{(rr)} \equiv \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2 = M(z) - N(z) - \frac{1}{4}r^2M''(z).$$

Podobnie, dla obszaru wejściowego płaskiej szczeliny otrzymamy (por. [12]):

$$T^{(xy)} = cy + g'(x)y + N'(x)y,$$

$$(3.7) \quad T^{(xx)} = -h + \varrho\psi - cx - g(x) - N(x) - \frac{1}{2}y^2(g''(x) + M''(x) + N''(x)),$$

$$T^{(yy)} = -h + \varrho\psi - cx - g(x) - M(x) - \frac{1}{2}y^2(g''(x) + N''(x));$$

$$(3.8) \quad T^{(xx)} - T^{(yy)} \equiv \sigma_1 - \sigma_2 = M(x) - N(x) - \frac{1}{2}y^2M''(x).$$

Dalsze informacje dotyczące funkcji  $g$ ,  $M$  i  $N$  wynikają z warunków brzegowych, które muszą być spełnione na początku i końcu obszarów wejściowych, tj. dla  $z = 0$  lub  $x = 0$  oraz dla  $z = l$  lub  $x = l$ .

#### 4. Ograniczenia wynikające z warunków brzegowych

Jeśli rozważany przewód skierowany jest pionowo i siły masowe są wyłącznie siłami grawitacji, to

$$(4.1) \quad \psi(z) = -gz \quad \text{lub} \quad \psi(x) = -gx,$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie.

Funkcje  $g(z)$  lub  $g(x)$  są całkowicie dowolne, lecz dla ustalenia uwagi można przyjąć, że

$$(4.2) \quad g'(0) = g(0) = 0, \quad g'(l) = q, \quad g(l) = \frac{1}{m}ql,$$

gdzie  $q$  i  $m$  są stałymi parametrami.

Formułując warunki na końcu obszarów wejściowych, tj. na granicach przejścia z tych obszarów do obszarów w pełni rozwiniętych, ustalonych przepływów ścinających, należy pamiętać o ciągłości odpowiednich naprężeń i ich pochodnych. Innymi słowy naprężenia powinny zmieniać się w sposób ciągły od rozkładów określonych w obszarach wejściowych do wartości wynikających z (2.2) i (2.5).

Wydaje się również rzeczą rozsądną założyć w pierwszym przybliżeniu, że na początku obszarów wejściowych, tj. dla  $z = 0$  lub  $x = 0$ , znikają zarówno naprężenia ścinające (por. (4.4)<sub>1</sub>), jak i odpowiednie różnice naprężeń normalnych. Oznacza to, że na podstawie (3.6) i (3.8) mamy

$$(4.3) \quad M''(0) = 0, \quad M(0) = N(0).$$

Założenie powyższe nie jest konieczne; można również rozpatrywać inne wartości brzegowe dla naprężeń.

Zatrzymajmy się na moment nad przypadkiem przepływu w obszarze wejściowym do kapilary. Z zależności (3.5), (4.1), (4.2), przy znikających dla  $z = 0$  naprężeniach ścinających i normalnych, wynika że

$$(4.4) \quad c = -N'(0), \quad g''(0) + N''(0) = 0.$$

Z porównania odpowiednich wyrażeń (2.2) i (3.5) oraz ich pochodnych dla  $z = l$ , mamy również

$$(4.5) \quad N'(0) - q = f, \quad M'(l) = N'(l) = 0, \quad g''(l) + N''(l) = 0, \quad M(l) = N(l)$$

przy czym założono, że  $T^{(zz)} - T^{(rr)}$  znika dla  $r = 0$ ,  $z = l$  oraz pominięto człony rzędu  $O(\epsilon^2)$ . Na podstawie (3.6) otrzymamy także

$$(4.6) \quad (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w = T^{(zz)} - T^{(rr)} = -\frac{D^2}{16} M''(l) \quad \text{dla} \quad z = l,$$

gdzie wskaźnik  $w$  oznacza, że dana wartość jest określona na ścianie kapilary, tj. dla  $r = D/2$ .

Rozważając przypadek przepływu w płaskiej szczelinie, dla którego słuszne są zależności (2.5), (3.7), (4.1) i (4.2), otrzymamy warunki identyczne jak w (4.4) i (4.5). Zamiast określonej na ścianie różnicy naprężeń normalnych (4.6), otrzymamy na podstawie (3.8)

$$(4.7) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)_w = T^{(xx)} - T^{(yy)} = -\frac{d^2}{8} M''(l) \quad \text{dla} \quad x = l, \quad y = \pm d/2.$$

Powyższe warunki wystarczają do przewidywania realistycznych rozkładów funkcji  $M$  i  $N$  w obszarach wejściowych przewodów płaskich i kołowsymetrycznych. Z uwagi na zależności następujące:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \partial_z T^{(rr)}|_{z=0} &= N'(0) - M'(0) - \rho g \geq 0, \\ \partial_x T^{(rr)}|_{x=l} &= N'(0) - q - \rho g = f - \rho g > 0, \end{aligned}$$

oraz wymaganą dodatnią wartość różnicy naprężeń normalnych dla  $z = l$ , łatwo zauważyć, że musi istnieć w otoczeniu  $z = 0$  przynajmniej niewielki obszar, w którym  $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w$  przybiera wartości ujemne. Fakt ten nie posiada żadnego fizycznego znaczenia będąc prostą konsekwencją zastosowanego przybliżenia, tj. pominięcia wyrazów rzędu  $O(\epsilon^2)$  oraz przyjętych warunków brzegowych dla  $z = 0$ .

5. Rozkłady nacisków normalnych oraz długości obszarów wejściowych

Rozkłady nacisków normalnych lub ciśnień na ściankach przewodów wynikają z poprzednich rozważań.

Dla przepływu kołowsymetrycznego, na podstawie (3.5)<sub>2</sub> i warunków brzegowych omówionych w p. 4, otrzymamy

$$(5.1) \quad -T_w^{\langle rr \rangle} |_{z=0} = h + k \left( \frac{D}{2} \right) + M(0) = P_w,$$

$$(5.2) \quad -T_w^{\langle rr \rangle} |_{z=l} = h + k \left( \frac{D}{2} \right) + \rho g l - N'(0)l + \frac{1}{m} g l + M(l),$$

gdzie  $P_w$  jest ciśnieniem na początku przewodu dla  $z = 0$ .

Z drugiej strony ciśnienie na końcu obszaru wejściowego musi być równe wartości wynikającej z rozwiązania ustalonego przepływu ścinającego (2.2)<sub>2</sub>. W części, w której przepływ jest wiskozymetryczny rozkład nacisków na ściance jest liniowy, a ich wartość na końcu całego przewodu, tj. dla  $z = L$ , wyraża się następującym wzorem (por. [15]):

$$(5.3) \quad Q_w = (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w - \frac{1}{2} T_w^{\langle rz \rangle} \frac{\partial}{\partial T_w^{\langle rz \rangle}} p(0, L) - \frac{2}{\pi D^2 T_w^{\langle rz \rangle}} \frac{\partial}{\partial T_w^{\langle rz \rangle}} [(T_w^{\langle rz \rangle})^2 T_L],$$

gdzie  $T_w^{\langle rz \rangle}$  oznacza naprężenie ścinające,  $p(0, L)$  — ciśnienie na osi rury dla  $z = L$ , zaś  $T_L$  zdefiniowano jako

$$(5.4) \quad T_L = \int_0^{D/2} T^{\langle zz \rangle}(r, L) d(\pi r^2).$$

Porównując zatem nacisk (5.2) z wartością początkową wynikającą z (2.2)<sub>2</sub> dla ustalonego przepływu ścinającego, otrzymamy

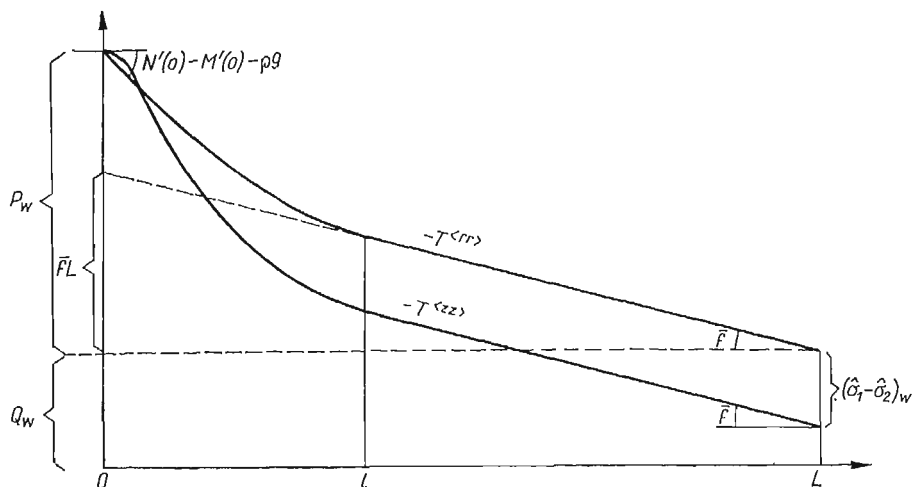
$$(5.5) \quad h + k \left( \frac{D}{2} \right) + \rho g l - N'(0)l + \frac{1}{m} q l + M(l) = (f - \rho g)(L - l) + Q_w.$$

Ponieważ poziom odniesienia dla stałej  $h$  jest w gruncie rzeczy dowolny, można uniknąć korzystania ze złożonego wyrażenia na  $Q_w$ , licząc wartość  $P_w$  jako nadwyżkę ciśnienia na początku przewodu ( $z = 0$ ), w stosunku do jego wartości końcowej  $Q_w$  ( $z = L$ ). Jest to równoznaczne z pominięciem wyrazu  $Q_w$  w wyrażeniu (5.5). Odpowiednie rozkłady nacisków normalnych pokazano schematycznie na rys. 1.

Wykorzystując (4.5)<sub>1</sub>, mamy w dalszym ciągu

$$(5.6) \quad P_w - fL + M(l) - M(0) = ql \left( 1 - \frac{1}{m} \right) - \rho g L,$$

a po uwzględnieniu (4.6)



Rys. 1

$$(5.7) \quad P_w - (f - \rho g)L + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w = ql \left( 1 - \frac{1}{m} \right),$$

przy czym musi być spełniona następująca równość:

$$(5.8) \quad M(0) = N(l) + \frac{D^2}{16} M''(l).$$

Ostatnie wymaganie nie zmniejsza w żadnym stopniu ogólności rozważań ( $N(l)$  i  $M(0)$  są w dalszym ciągu dowolne) oraz nie jest sprzeczne z żadnym z warunków dyskusowanych w p. 4.

Na podstawie (5.7) otrzymujemy wyrażenie na długość obszaru wejściowego:

$$(5.9) \quad l = \frac{m}{q(m-1)} [P_w - \bar{f}L + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w],$$

gdzie  $\bar{f} = f - \rho g$  oznacza zredukowany gradient ciśnienia dla ustalonego przepływu ścinającego.

Zależność (5.9) można zapisać w bardziej użytecznej postaci

$$(5.10) \quad l = l_v \left[ \frac{P_w - \bar{f}L}{(P_w - \bar{f}L)_v} + \frac{(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w}{(P_w - \bar{f}L)_v} \right],$$

gdzie

$$(5.11) \quad l_v = \frac{m}{q(m-1)} (P_w - \bar{f}L)_v$$

oznacza długość obszaru wejściowego dla czysto lepkiej cieczy, dla której  $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w \equiv 0$ , przepływającej przez przewód o identycznej geometrii.



Wzór (5.10) umożliwia określenie długości obszaru wejściowego dla cieczy lepkospężystej, jeśli znana jest odpowiednia długość  $l_0$  dla cieczy czysto lepkiej oraz spadki ciśnienia  $P_w - \bar{f}L$  dla cieczy lepkospężystej i  $(P_w - \bar{f}L)_0$  dla cieczy lepkiej. Ponieważ znane są dobrze metody doświadczalne prowadzące do określenia  $l_0$  (por. [16, 17, 5]), pozostaje wyłącznie problem wyznaczenia  $P_w$  i  $\bar{f}$  w dwóch niezależnych doświadczeniach. Potrzebna jest również znajomość pierwszej różnicy naprężeń normalnych  $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$  wyznaczana na podstawie pomiarów wypływającej strugi lub innych metod wiskozymetrycznych (por. np. [13, 15])<sup>1)</sup>.

Warto również nadmienić, że w wyrażeniu (5.10) nie występują żadne funkcje lub parametry opisujące zachowanie się cieczy lepkospężystej, z wyjątkiem różnicy naprężeń normalnych  $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w$ . Na istotną rolę jaką odgrywają naprężenia normalne w różnych przepływach cieczy lepkospężystych, a w szczególności w przepływach ze stałą historią deformacji, zwrócono uwagę m.in. w naszej pracy [18].

Rozważania dla kołowsymetrycznego przepływu w kapilarze, przedstawione w niniejszym punkcie, można bez trudu przenieść na przypadek przepływu w szczelinie lub płaskim kanale. Podobne rozumowanie prowadzi do wzoru niemal identycznego z (5.10), z tą tylko różnicą, że zamiast  $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w$  należy wstawić  $(\sigma_1 - \sigma_2)_w$  (por. [12]).

## 6. Uproszczona analiza kinematyczna

Dokładna analiza kinematyczna rozważanych przepływów wymaga stosowania złożonych równań konstytutywnych, co komplikuje znacznie całe zagadnienie. Kiedy korzysta się z metod warstwy przyściennej, nawet stosunkowo proste równania konstytutywne mogą prowadzić do bardzo żmudnych obliczeń (por. np. [8]).

W niniejszych rozważaniach, nie pretendując do ścisłego rozwiązania zagadnienia, będziemy starali się określić przybliżone pole prędkości w obszarach wejściowych, wynikające z poprzednio wyznaczonych rozkładów naprężeń ścinających i normalnych. Nasza uproszczona analiza kinematyczna bazuje na założeniu, że stosunkowo powolne przepływy cieczy lepkospężystych mogą być opisane równaniami konstytutywnymi nieściślejszej cieczy stopnia drugiego w postaci następującej (por. [14, 9]):

$$(6.1) \quad \mathbf{T} = = p\mathbf{1} + \eta_0 \mathbf{A}_1 - \eta_0 \theta \mathbf{A}_2 + \eta_0 (\theta + \theta^*) \mathbf{A}_1^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1 = 0,$$

gdzie  $p$  jest ciśnieniem hydrostatycznym,  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  oznaczają dwa kolejne tensory kinematyczne Rivlina-Ericksena (por. [9, 13]), zaś  $\eta_0, \theta, \theta^*$  są stałymi materiałowymi. Stała  $\eta_0$  ma wymiar lepkości (lepkość newtonowska), zaś stałe  $\theta$  i  $\theta^*$  wymiar czasu (czas charakterystyczny cieczy).

Z drugiej strony można stwierdzić, że z przyjętego założenia małego stosunku średnicy kapilary do długości obszaru wejściowego, tj.  $\epsilon = D/l$ , wynikają następujące relacje dla pól prędkości i ich gradientów:

<sup>1)</sup> Korelację między spadkami ciśnienia a naprężeniami normalnymi badano w [19]. Stwierdzono m.in., że «spężysty» spadek ciśnienia jest proporcjonalny do  $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$ .

$$(6.2) \quad \begin{aligned} w = O(1), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = O(1), \quad u = O(\epsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = O(\epsilon), \\ \frac{\partial w}{\partial z} = O(\epsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = O(\epsilon^2), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = O(\epsilon^2), \text{ itp.}, \end{aligned}$$

gdzie  $u(r, z)$ ,  $w(r, z)$  oznaczają składowe prędkości odpowiednio w kierunku  $r$  i  $z$ . Analogiczne relacje można również zapisać dla przepływów przez wąskie kanały lub szczeliny (por. [12]). Zależności (6.2) przypominają założenia zwykle przyjmowane w przybliżonych metodach warstwy przyściennej.

Traktując równania nieściśliwej cieczy stopnia drugiego jako perturbowaną postać równań cieczy newtonowskiej (por. [14, 9]) oraz przyjmując pole prędkości w postaci  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots$ , gdzie  $\mathbf{v}_1$  odpowiada przepływowi newtonowskiemu, można równania dynamiczne (równania pędu) dla przepływu quasi-statycznego zapisać w postaci następującej:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \nabla p_1 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \nabla p_2 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_2 &= \text{Div} \mathbf{S}_2(\mathbf{v}_1), \end{aligned}$$

gdzie

$$(6.4) \quad \mathbf{S}_2(\mathbf{v}_1) = -\eta_0 \theta (\mathbf{B} - \mathbf{A}^2) + \eta_0 \theta^* \mathbf{A}^2,$$

przy czym  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\mathbf{v}_1)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_2(\mathbf{v}_1)$  są tensorami kinematycznymi Rivlina-Ericksena określonymi dla newtonowskiego pola prędkości  $\mathbf{v}_1$ .

Jeśli prawa strona równania (6.3) jest wektorem bezwirowym, tzn. wyraża się przez gradient pewnego potencjału skalarnego, to równanie równowagi drugiego rzędu (6.3)<sub>2</sub> może być spełnione przy  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ . Oznacza to, że w celu rozwiązania quasi-statycznego zagadnienia przepływu nieściśliwej cieczy stopnia drugiego, z określonymi w prędkościach warunkami brzegowymi, wystarczy znać odpowiednie pole prędkości dla cieczy newtonowskiej.

PIPKIN [14] dowiódł, że jeśli  $\text{Div} \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{v}_1$  jest wektorem bezwirowym oraz  $\text{div} \mathbf{v}_1 = 0$  ( $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ ), to  $\text{Div}(\mathbf{B} - \mathbf{A}^2)$  jest również wektorem bezwirowym. Zatem o równoważności pola prędkości dla cieczy stopnia drugiego i cieczy newtonowskiej decydować będzie zachowanie się  $\text{Div} \mathbf{A}^2$ .

Dla płaskich przepływów quasi-statycznych, dla których ponadto  $\text{div} \mathbf{v}_1 = \text{tr} \mathbf{A} = 0$  (przepływy izochoryczne), tensor  $\mathbf{A}^2$  wyraża się w postaci

$$(6.5) \quad \mathbf{A}^2 = \gamma^2 (\mathbf{1} - \mathbf{k}\mathbf{k}), \quad \gamma^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{B},$$

gdzie  $\mathbf{k}$  oznacza wektor jednostkowy, prostopadły do płaszczyzny przepływu. Wówczas zawsze  $\text{Div} \mathbf{A}^2 = \nabla \gamma^2$  i odpowiednie pole prędkości cieczy stopnia drugiego jest identyczne jak pole prędkości cieczy newtonowskiej (twierdzenie Tannera, por. [14]). Oznacza to, że człony drugiego rzędu w równaniu (6.1) wnoszą wkład wyłącznie do naprężeń normalnych, a zatem mogą być pominięte przy obliczaniu naprężeń ścinających.

Dla kołowsymetrycznych przepływów quasi-statycznych, takich jakie rozważamy

w obszarach wejściowych, równoważność pól prędkości dla cieczy drugiego stopnia i cieczy newtonowskiej nie obowiązuje nawet wtedy, gdy zaniedbujemy wyrazy rzędu  $O(\epsilon^2)$ . W tym przypadku mamy (por. (6.2))

$$(6.6) \quad [\mathbf{A}^2] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 & 0 & -2\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \end{bmatrix} + [\mathbf{O}(\epsilon^2)];$$

zatem warunek bezwirowości wektora  $\text{Div } \mathbf{A}^2$  nie jest spełniony. Tylko po zaniedbaniu wyrazów rzędu  $O(\epsilon)$ , a więc w konsekwencji dla wiskozymetrycznego przepływu przez kapilarę, otrzymamy

$$(6.7) \quad \text{Div } \mathbf{A}^2 = \nabla \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \mathbf{O}(\epsilon).$$

Przejdziemy obecnie do określenia pola prędkości cieczy drugiego stopnia przepływającej przez obszar wejściowy płaskiej szczeliny. Zachowując wyrazy rzędu  $\epsilon$ , równanie (3.7)<sub>1</sub> zapisujemy w postaci

$$(6.8) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta_0} (g'(x) - N'(0) + N'(x))y,$$

gdzie  $u$  oznacza składową prędkości w kierunku osi kanału.

Całka równania (6.8) spełnia następujące warunki brzegowe na początku i końcu obszaru wejściowego:

$$(6.9) \quad u(0, y) = \text{const}, \quad u(l, y) = \frac{f}{2\eta_0} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right),$$

gdzie  $f$  jest gradientem ciśnienia dla przepływu wiskozymetrycznego poza obszarem wejściowym. Założenie płaskiego profilu prędkości dla  $x = 0$  nie jest konieczne; wynika ono z przyjęcia  $g'(0) = 0$  [por. (4.2)].

Wykorzystując równanie ciągłości, mianowicie

$$(6.10) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

otrzymamy po scałkowaniu (6.8):

$$(6.11) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\eta_0} (g'(x) - N'(0) + N'(x)) \left( y^2 - \frac{d^2}{12} \right) + \frac{fd^2}{12\eta_0} + O(\epsilon^2), \\ v(x, y) &= \frac{1}{6\eta_0} (g''(x) + N''(x)) \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) y + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Na podstawie (4.4)<sub>2</sub> i (4.5)<sub>3</sub> mamy również

$$(6.12) \quad v(0, y) = 0, \quad v(l, y) = 0, \quad v \left( x, \pm \frac{d}{2} \right) = 0.$$

Z drugiej strony widać, że składowa prędkości  $u(x, y)$  nie znika na ściance kanału dla  $0 < x < l$ , prowadząc do zależności:

$$(6.13) \quad u\left(x, \pm \frac{d}{2}\right) = \frac{fd^2}{12\eta_0} + (g'(x) - N'(0) + N'(x)) \frac{d^2}{12\eta_0}.$$

Wyrażenie to określa «efektywny poślizg» na ściankach kanału, konieczny do zmiany profilu prędkości dla  $x = 0$ , w profil paraboliczny dla  $x = l$ . Fakt powyższy nie posiada żadnego fizycznego znaczenia. Jest on prostą konsekwencją przybliżonego (liniowego względem  $y$ ) rozkładu naprężeń ścinających we wzorze (3.7)<sub>1</sub>. Zjawisko poślizgu nie miałoby miejsca, gdyby brać pod uwagę człony wyższego rzędu względem  $\epsilon$ .

Warto również podkreślić, że przy obecnej uproszczonej analizie kinematycznej, zachowanie się cieczy w obszarze wejściowym należy traktować jako przybliżony schemat tego, co ma miejsce w rzeczywistości. Dyskutowany schemat przepływu nie wydaje się być mniej realistyczny niż schemat «przepływu rdzeniowego» z płaskim profilem prędkości w części środkowej, przyjmowany przy stosowaniu przybliżonych metod warstwy przyściennej.

Jeśli dla kołowsymetrycznych przepływów quasi-statycznych założymy newtonowski związek między naprężeniami ścinającymi i odpowiednią szybkością deformacji, to na podstawie (3.5)<sub>1</sub> mamy następujące wyrażenie przybliżone:

$$(6.14) \quad \frac{\partial w}{\partial r} \approx \frac{1}{2\eta_0} (g'(z) - N'(0) + N'(z))r.$$

Biorąc pod uwagę równanie ciągłości, mianowicie

$$(6.15) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

otrzymamy po scałkowaniu

$$(6.16) \quad w(r, z) \approx \frac{1}{4\eta_0} (g'(z) - N'(0) + N'(z)) \left( r^2 - \frac{D^2}{8} \right) + \frac{fD^2}{32\eta_0},$$

$$u(r, z) \approx \frac{1}{16\eta_0} (g''(z) + N''(z)) \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right) r,$$

przy czym obowiązują takie same jak poprzednio warunki brzegowe dla  $z = 0$  i  $z = l$ . Również na ściance przewodu mamy zależność

$$(6.17) \quad w\left(\frac{D}{2}, z\right) = \frac{fD^2}{32\eta_0} + (g'(z) - N'(0) + N'(z)) \frac{D^2}{32\eta_0},$$

określającą «efektywny poślizg» w obszarze wejściowym.

### 7. Przykłady profili prędkości w obszarach wejściowych

Więcej informacji o profilach prędkości w obszarach wejściowych można uzyskać, specyfikując funkcje  $g$  i  $N$  zgodnie z poprzednio przedyskutowanymi warunkami brzegowymi i rozkładami nacisków na ściankach. W tym celu zastosowanie wielomianów lub innych szczególnie wybranych funkcji zapewnia pożądaną stopień dokładności.

Założmy dla ilustracji, że rozkład nacisków w obszarze wejściowym szczeliny da się dobrze opisać następującymi funkcjami:

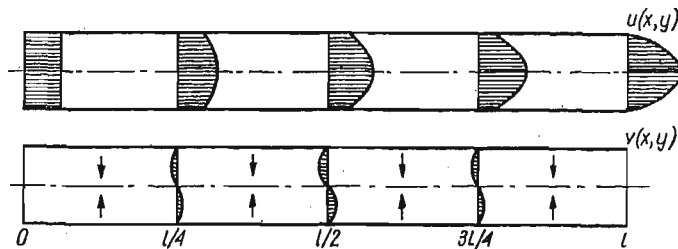
$$(7.1) \quad g(x) = -\frac{q}{2l^3}(x-2l)x^3, \quad g'(l) = q, \quad g'(0) = g''(0) = g''(l) = 0,$$

$$(7.2) \quad N(x) = b(qx-g(x)), \quad f = (b-1)q,$$

gdzie  $b > 1$  oznacza stały parametr. Funkcje powyższe spełniają wszystkie warunki (4.4), (4.5), a zatem zależności (6.11) można przedstawić w postaci:

$$(7.3) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\eta_0}(b-1)g'(x)\left(y^2 - \frac{d^2}{12}\right) + \frac{fd^2}{12\eta_0}, \\ v(x, y) &= -\frac{1}{6\eta_0}(b-1)g''(x)\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)y, \\ g'(x) &= -\frac{2q}{l^3}x^2\left(x - \frac{3}{2}l\right), \quad g''(x) = -\frac{6q}{l^3}x(x-l). \end{aligned}$$

Profile prędkości odpowiadające wyrażeniom (7.3) przedstawiono schematycznie na rys. 2. W tym przypadku składowa prędkości prostopadła do osi kanału,  $v(x, y)$ , jest zawsze ujemna dla  $0 < x < l$ , co oznacza, że prędkość ta jest skierowana ku osi oraz maleje wraz ze zmniejszaniem się «efektywnego poślizgu» wzdłuż obszaru wejściowego.



Rys. 2

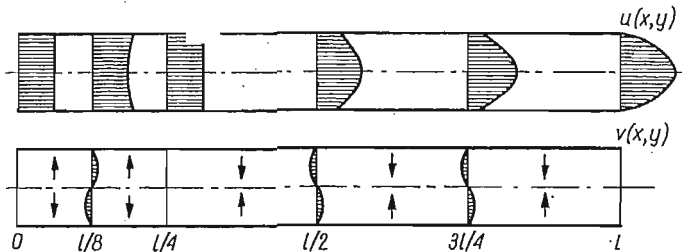
Ponieważ istnieje dość duża dowolność w doborze funkcji  $g$  i  $N$ , można wyobrazić sobie sytuacje, w których zmiana profili prędkości wzdłuż obszaru wejściowego zachodzi w sposób dość nietypowy. Jako następny przykład, rozważmy funkcję następującą:

$$(7.4) \quad g(x) = -\frac{6}{5}\frac{q}{l^4}x^3\left(x^2 - \frac{25}{12}lx + \frac{5}{6}l^2\right), \quad g'(l) = q, \quad g'(0) = g''(0) = g''(l) = 0,$$

podczas gdy  $N$  zmienia się według zależności (7.2). Łatwo również zauważyć, że  $g''(l/4) = 0$ , co oznacza, że składowa prędkości w kierunku osi kanału przyjmuje wartość stałą w odległości  $x = l/4$  od początku obszaru wejściowego. Odpowiednie profile prędkości zilustrowano na rys. 3.

Jak widać, składowa prędkości w kierunku poprzecznym do osi kanału  $v(x, y)$  zmienia swój znak przy  $x = l/4$ . Dla  $0 < x < l/4$  prędkość ta skierowana jest ku ściankom kanału, podczas gdy dla  $l/4 < x < l$  ku jego osi. Oznacza to, że w pewnym podobszarze

znajdującym się na początku obszaru wejściowego, ciecz może zachowywać się jak ośrodek «półsztywny» lub «ciało stałe». Wybierając odpowiednie postacie funkcji  $g$ , można otrzymać podobszary o różnej długości, a w szczególności — równej całej długości obszaru wejściowego.



Rys. 3

Możliwość występowania podobnego zjawiska przy przepływach cieczy lepkosprężystych przewidzieli na drodze teoretycznej METZNER i WHITE [8]. Stwierdzili oni również, że przy pewnych szczególnych warunkach takie «półsztywne» obszary mogą rozciągać się wzdłuż całego przewodu, powodując zamykanie wejścia oraz ewentualne hamowanie całego przepływu. Wówczas przepływ przez przewód jest możliwy tylko w przypadku rzeczywistego poślizgu na ściankach lub nieciągłości występujących w samej cieczy. Istnieją pewne dane doświadczalne potwierdzające możliwość opisanego wyżej zachowania się cieczy lepkosprężystych. Zjawiska tego typu prowadzą zwykle do wyjątkowo dużych spadków ciśnień obserwowanych w obszarach wejściowych.

Rozważania przedstawione w niniejszej części pracy nie wyczerpują oczywiście innych sposobów dokładniejszego opisu zjawisk występujących przy przepływach cieczy lepkosprężystych w rurach i kanałach. Uproszczona analiza kinematyczna dla nieściśliwej cieczy prostej stopnia drugiego ma na celu zwrócenie uwagi na możliwość występowania przepływów o różnej kinematyce. Należy również podkreślić, że rozważania statyczne, prowadzące do określenia odpowiednich długości obszarów wejściowych, są niezależne od rozważanych dalej schematów kinematycznych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 4 Wyd., New York 1960.
2. E. B. CHRISTIANSEN, H. E. LEMMON, *Entrance Region Flow*, A.I.Ch.E.J., **11** (1965) 95.
3. M. COLLINS, W. R. SCHOWALTER, *Behavior of Non-Newtonian Fluids in the Inlet Region of a Channel*, A.I.Ch.E.J., **9** (1963) 98.
4. M. COLLINS, W. R. SCHOWALTER, *Behavior of Non-Newtonian Fluids in the Entry Region of a Pipe*, A.I.Ch.E.J., **9** (1963) 804.
5. J. L. WHITE, *Elastomer Rheology and Processing*, Rubber Chem. Technol., **42** (1969) 257.
6. G. K. RAJESWARI, S. L. RATHNA, *Flow of a Particular Class of Non-Newtonian Visco-Elastic and Visco-Inelastic Fluids near a Stagnation Point*, ZAMP, **13** (1962) 43.

7. D. W. BEARD, K. WALTERS, *Elastico-Viscous Boundary-Layer Flows*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60** (1964) 667.
8. A. B. METZNER, J. L. WHITE, *Flow Behavior of Viscoelastic Fluids in the Inlet Region of a Channel*, A.I.Ch.E.J., **11** (1965) 989.
9. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encycl. of Physics vol III/3,3 Berlin-Heidelberg-New York 1965.
10. F. H. GARNER, A. H. NISSAN, G. F. WOOD, *Thermodynamic and Rheological Behaviour of Elasto-Viscous Systems under Stress*, Proc. Roy. Soc., A **243** (1950) 37.
11. A. B. METZNER, W. T. HOUGHTON, R. A. SAILOR, J. L. WHITE, *A Method for the Measurement of Normal Stresses in Simple Shearing Flow*, Trans. Soc. Rheol., **5** (1961) 133.
12. S. ZAHORSKI, *On Plane Flows of Viscoelastic Fluids in the Inlet Region of a Channel*, Symp. Franco-Polonais de Rhéologie, Nice 1974 (w druku).
13. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
14. A. C. PIPKIN, *Lectures on Viscoelasticity Theory*, New York-Heidelberg-Berlin 1972.
15. J. M. DAVIES, J. F. HUTTON, K. WALTERS, *Theory for Normal Stresses in Slits and Capillaries*, J. Phys. D: Appl. Phys., **6** (1973) 2259.
16. A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, New York-London-Sydney 1967.
17. J. M. MCKELVEY, *Polymer Processing*, New York-London 1964.
18. S. ZAHORSKI, *Flows with Constant Stretch History and Extensional Viscosity*, Arch. Mech., **23** (1971). 433.
19. H. L. LA NIEVE, III, D. C. BOGUE, *Correlation of Capillary Entrance Pressure Drops with Normal Stress Data*, J. Appl. Polymer Sci., **12** (1968) 353.

Р е з ю м е

МЕДЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В ОБЛАСТЯХ  
ВХОДА ТРУБ И КАНАЛОВ

Рассматривались вязкоупругие течения в областях входа труб и плоских каналов при предположении, что числа Рейнольдса малы (квазистатическое приближение), а также, что диаметры труб (или высота каналов) малы по сравнению с длинами областей входа. При статическом анализе задачи не принимались какие-либо частные предположения относительно определяющих уравнений жидкости, с помощью которых может описываться какая угодно несжимаемая простая жидкость. Некоторые решения для напряжений или напора на стенки были получены в виде, содержащем три производные функции, удовлетворяющее крайевым условиям. Длины областей входа зависят от первой разности нормальных напряжений, а также от соответствующих длин областей входа и перепадов давления для чисто вязкой жидкости, протекающей по каналу или трубе с той же геометрией. Упрощенный кинематический анализ задачи для ранее определенных распределений касательных и нормальных напряжений представлен при предположении, что рассматриваемая жидкость является несжимаемой жидкостью второго порядка. Показано, что в областях входа могут появиться некоторые подобласти, в которых жидкость ведет себя подобно «твердому телу» или «полужесткой» среде. Такими областями может охватываться вся длина канала или трубы, и тогда для поддержания течения неизбежно должно выступить явление «разрыва» жидкости или же должно происходить проскальзывание вдоль стенок.

S u m m a r y

SLOW FLOWS OF VISCOELASTIC FLUIDS  
AT THE ENTRIES TO TUBES AND CHANNELS

Viscoelastic flows in the inlet regions of tubes and plane channels are discussed under the assumption of small Reynolds numbers (quasi-static approximation) and small ratios of the tube diameter or the channel

height to the entrance lengths. In a static analysis of the problem, nothing specific is assumed about the constitutive equations, which may be those describing an incompressible simple fluid. Certain solutions for stresses or normal thrusts on the walls are obtained in the form involving three arbitrary functions subjected to boundary conditions. The entrance lengths can be determined if, apart from the first normal stress difference, the corresponding entrance lengths and pressure drops are known for a purely viscous fluid flowing under the same geometry. A simplified kinematic analysis for previously determined distributions of shear and normal stresses is presented under the assumption of an incompressible second grade fluid. It is shown, among other properties, that certain subregions of «solid-like» or «semi-rigid» behaviour may appear just at the entries. These subregions may extend across the entire duct, requiring either fluid fracture or slip at the walls for continued flow.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 maja 1974 r.*

---