MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH UKŁADÓW ANHOLONOMICZNYCH TYPU CZETAJEWA-PRZEBORSKIEGO

N. J. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

1. Ekstremalne własności reakcji więzów w anholonomicznych układach typu Czetajewa—Przeborskiego

W pracy [1] KOGAN sformułował pewną własność reakcji więzów, analogiczną do zasady Gaussa, mianowicie: siły reakcji więzów w rzeczywistym ruchu układu holonomicznego o więzach idealnych minimalizują skrępowanie układu, rozpatrywane jako funkcja reakcji możliwych.

W niniejszej pracy bada się ekstremalne własności reakcji w układach o nieliniowych więzach anholonomicznych, idealnych i nieidealnych pierwszego rzędu, jak również w układach o więzach anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem przyśpieszeń.

1.1. Rozważmy układ n punktów materialnych o nieliniowych anholonomicznych więzach idealnych rzędu pierwszego

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., k; \; i = 1, 2, ..., n). \tag{1.1}$$

Możliwe przemieszczenia układu określa się według CZETAJEWA i PRZEBORSKIEGO [3] zgodnie ze wzorami

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., k). \tag{1.2}$$

Oznaczmy przez $\overline{N}_i$ wypadkową reakcji danych więzów idealnych (1.1), działających na i-ty punkt układu. Zgodnie z definicją więzów idealnych suma prac elementarnych reakcji na dowolnych przemieszczeniach możliwych układu równa się zeru

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i \delta \bar{r}_i = 0. \tag{1.3}$$

Rozważmy sumę

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i)^2, \tag{1.4}$$

gdzie m_i oznacza masę i-tego punktu układu; $\overline{w}_i$ — przyśpieszenia tego punktu w określonej chwili czasu t w trakcie ruchu rzeczywistego pod działaniem zadanej siły $\overline{F}_i$ i reakcji

$\overline{N}_i$; γ_i — jedno z możliwych przyśpieszeń punktu dla zadanych więzów, przy stałych położeniach i prędkości punktów układu w określonej chwili czasu.

Suma $A_{d\delta}$ określa miarę odchylenia rzeczywistego ruchu (d) danego układu punktów materialnych od ruchu możliwego (δ).

Niech $A_{\partial\delta}$ oznacza odchylenie ruchu (∂) wyzwolonego (częściowo lub całkowicie) z więzów od tegoż ruchu możliwego (δ). W pracy [2] CZETAJEW podał twierdzenie wyrażające się nierównością

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}. \tag{1.5}$$

Stwierdza ono, że odchylenie ruchu rzeczywistego od możliwego jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od ruchu wyzwolonego.

Analogiczne twierdzenie można uzyskać porównując odchylenie ruchu rzeczywistego (d) od ruchu możliwego δ z odchyleniem od niego ruchu (d'), przy tych samych zadanych siłach $\overline{F}_i$ i dowolnych reakcjach $\overline{N}_i$, różniących się od rzeczywistych reakcji $\overline{N}_i$, ale spełniających warunek (1.3). Ostatni z tych ruchów nie będzie na ogół ruchem możliwym przy zadanych więzach.

Tak więc ruch (d') jest rzeczywistym ruchem układu pod działaniem zadanych sił $\overline{F}_i$, ale przy nowych więzach. Załóżmy, że przemieszczenia możliwe układu z tymi więzami równają się $\delta\overline{r}_i'$. Wobec tego więzy idealne spełniają równanie

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i'\delta\overline{r}_i' = 0,$$

a ponieważ reakcje $\overline{N}_i'$ spełniają warunek (1.3), tzn.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i'\delta\overline{r}_i = 0,$$

otrzymujemy, że przemieszczenia możliwe $\delta\overline{r}_i$ przy zadanych więzach zawierają się w przemieszczeniach możliwych $\delta\overline{r}_i'$ przy nowych więzach. Możemy więc uważać, że nowe więzy odpowiadają układowi częściowo wyzwolonemu. Przyśpieszenie punktu m_i ruchu (d') oznaczmy literą $\overline{w}_i'$.

Miarą odchylenia ruchu (d') od ruchu możliwego δ jest wielkość

$$A_{d'\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_i'-\overline{\gamma}_i)^2, \tag{1.6}$$

przyrost zaś odchylenia przy przejściu od ruchu rzeczywistego (d) do ruchu (d') wynosi

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_i-\overline{\gamma}_i)\Delta\overline{w}_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\Delta\overline{w}_i)^2, \qquad \Delta\overline{w}_i = \overline{w}_i'-\overline{w}_i. \tag{1.7}$$

Dla rozpatrywanych w pracy układów typu Czetajewa-Przeborskiego istnieją przemieszczenia możliwe punktów układu proporcjonalne do różnic między przyśpieszeniami tych punktów w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym, przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów w ruchu rzeczywistym i możliwym w zadanej chwili czasu t.

Wynika stąd, że różnice $\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i$ we wzorze (1.7) są przemieszczeniami możliwymi. Przyrost przyśpieszeń w porównywanych ruchach wynosi

$$\Delta\bar{w}_i = \frac{\bar{N}'_i - \bar{N}_i}{m_i}.$$

W związku z tym, że dla dowolnych przemieszczeń możliwych wielkości $\bar{N}'_i$ oraz $\bar{N}_i$ spełniają warunek (1.3), to warunek ten oczywiście spełniają również ich różnice $\bar{N}'_i - \bar{N}_i$, wobec tego pierwszą sumę we wzorze (1.7) można przyrównać do zera

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\bar{w}_i(\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{N}'_i - \bar{N}_i)(\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i) = 0.$$

Tak więc mamy

$$\Delta A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\Delta\bar{w}_i)^2 > 0,$$

skąd wynika nierówność $A_{d\delta} < A_{d'\delta}$.

Innymi słowy, w przypadku rzeczywistych reakcji więzów $\bar{N}_i$ suma (1.4), traktowana jako funkcja reakcji dla ustalonych sił $\bar{F}_i$, przyjmuje wartość minimalną.

1.2. Udowodnione twierdzenie można uogólnić również na układy o idealnych więzach anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem przyśpieszeń, opisane wzorem

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda i}\ddot{x}_i + b_{\lambda i}\ddot{y}_i + c_{\lambda i}\ddot{z}_i) = a_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.8}$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$, $b_{\lambda i}$, $c_{\lambda i}$ oraz a_λ zależą od czasu, współrzędnych i prędkości ruchu punktów układu.

W pracy [3] PRZEBORSKI wprowadził, po raz pierwszy dla rozważanych układów definicję przemieszczeń możliwych, uogólniającą definicję (1.2); mianowicie, że przemieszczenia możliwe są definiowane związkami

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda i}\delta x_i + b_{\lambda i}\delta y_i + c_{\lambda i}\delta z_i) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k). \tag{1.9}$$

Zagadnienie to zostało rozwinięte w pracy KIRGETOWA [4].

Łatwo spostrzec, że przemieszczeniem możliwym jest różnica przyśpieszeń punktów układu w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym, przy jednakowych wartościach współrzędnych oraz jednakowych prędkościach w obydwu ruchach w ustalonej chwili czasu. Jeżeli zdefiniujemy więzy idealne jako takie, przy których dla dowolnego przemieszczenia możliwego, spełniającego warunek (1.9), jest spełnione równanie $\sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \delta\bar{r}_i = 0$ oraz jeśli powtórzymy rozważania dotyczące układów typu Czetajewa-Przeborskiego, to możemy udowodnić, że dla układów o więzach idealnych (1.8) słuszne jest twierdzenie, wyrażone nierównością $A_{d\delta} < A_{d'\delta}$.

1.3. Rozważmy układ punktów materialnych z więzami anholonomicznymi pierwszego lub drugiego rzędu (w ostatnim przypadku — liniowymi względem przyśpieszeń) z tarciem. W zbiorze przemieszczeń możliwych układu wyróżnimy podzbiór takich przemieszczeń, na których siły tarcia nie wykonują pracy. Są to tak zwane (c) — przemieszczenia, które rozpatrują PRZEBORSKI [5] i CZETAJEW [6]. Dla (c) — przemieszczeń zachodzi równanie

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i \delta \bar{r}_i^c = 0, \tag{1.10}$$

gdzie $\overline{R}_i$ są reakcjami więzów, zaś $\delta \bar{r}_i^c$ (c) — przemieszczeniami.

Rozpatrzmy ruch (d') układu, zachodzący przy tych samych zadanych siłach $\overline{F}_i$ i dowolnych reakcjach $\overline{R}'_i$, różnych od rzeczywistych, ale spełniających warunek (1.10). Ruch (d') jest ruchem możliwym, na ogół przy innych więzach. Załóżmy, że przemieszczenia możliwe dla tych więzów równają się $\delta \bar{r}'_i$. Wydzielmy z rodziny tych przemieszczeń zbiór (c) — przemieszczeń, na których siły reakcji $\overline{R}'_i$ nie wykonują pracy, to znaczy spełniony jest związek

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}'_i \delta \bar{r}'^c_i = 0. \tag{1.11}$$

Spośród wektorów przyśpieszeń γ_i w ruchach możliwych przy zadanych więzach obierzemy takie $\bar{\gamma}_i^c$, by wektory różnic $\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i^c$ zawierały się w zbiorze (c) — przemieszczeń. Takie ruchy możliwe są nazywane (c) — ruchami [7].

Ograniczając się do (c) — ruchów otrzymujemy zależność

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i(\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i^c) = 0. \tag{1.12}$$

Przyrost przyśpieszeń w porównywanych ruchach wynosi

$$\Delta \bar{w}_i = \frac{\overline{R}'_i - \overline{R}_i}{m_i}.$$

Wobec tego, że wielkości $\overline{R}_i$ oraz R'_i spełniają warunek (1.9) mamy równanie

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta \bar{w}_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i^c) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{R}'_i - \overline{R}_i)(\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i^c) = 0. \tag{1.13}$$

Z równań (1.7) i (1.12) otrzymujemy wzór

$$\Delta A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\Delta \bar{w}_i)^2,$$

z którego wynika, że $A_{d\delta} < A_{d'\delta}$.

Tak więc dla rzeczywistych reakcji $\overline{R}_i$ więzów z tarciem suma

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i^c)^2$$

traktowana jako funkcja reakcji przy ustalonych siłach przyjmuje wartość minimalną.

2. Uogólniona zasada najmniejszego skrępowania dla układów z tarciem

Zasada najmniejszego skrępowania w swej zwykłej postaci została sformułowana przez GAUSSA [8] dla układów o więzach idealnych. Uogólnienie tej zasady na układy z więzami nieidealnymi było dziełem PRZEBORSKIEGO [5], RUMIANCEWA [7] i POŻARICKIEGO [9].

W pracy BOŁOTOWA [10] zasada ta została uogólniona zgodnie z nowymi poglądami na wyzwalanie układów materialnych. O ile GAUSS rozważał pełne wyzwolenie ze wszystkich więzów, to BOŁOTOW rozpatrzył wyzwolenie częściowe, polegające na wyzwoleniu układu ze wszystkich więzów niepowstrzymujących oraz z części więzów powstrzymujących. W sformułowaniu BOŁOTOWA uogólniona zasada Gaussa brzmi następująco: *odchylenie rzeczywistego ruchu ukladu od rzeczywistego ruchu tegoż ukladu zachodzącego przy odrzuceniu wszystkich więzów niepowstrzymujących oraz dowolnej liczby więzów powstrzymujących jest mniejsze od odchylenia dowolnego ruchu możliwego.*

Już w *Mechanice* MACHA [11] wypowiedziana została myśl, że można porównywać odchylenia rzeczywistego i możliwego ruchu układu punktów materialnych nie od ruchu swobodnego, lecz od ruchu, w którym układ jest wyzwolony z części więzów. Jednak myśl ta nie została sformułowana w postaci analitycznej, poza tym MACH ograniczył się tylko do układów holonomicznych, BOŁOTOW natomiast rozważa również liniowe układy anholonomiczne.

Za podstawę dowodu uogólnionej zasady najmniejszego skrępowania służy u BOŁOTOWA zasada możliwych przemieszczeń w połączeniu z zasadą D'Alemberta (inaczej zasada D'Alemberta-Langrange'a) oraz następujące dwa założenia:

1° Przemieszczenia możliwe układu o zadanych więzach zawarte są w zbiorze przemieszczeń możliwych układu, wyzwolonego ze wszystkich więzów niepowstrzymujących oraz z dowolnej liczby więzów powstrzymujących.

2° Istnieje przemieszczenie możliwe, proporcjonalne do różnicy przyśpieszeń w ruchu możliwym i rzeczywistym.

Powyższe dwa założenia sformułowane przez BOŁOTOWA posłużyły również do dalszych uogólnień zasady Gaussa, dokonanych przez uczonych rosyjskich i radzieckich.

W pracy CZETAJEWA [2] rozważane są układy o więzach idealnych nieliniowych anholonomicznych pierwszego rzędu. Dla układów tych wprowadza się pojęcie przemieszczenia możliwego w taki sposób, że słuszna jest jednocześnie zasada D'Alemberta-Lagrange'a i zasada Gaussa w uogólnionej (w szczególności — w zwykłej) postaci: odchylenie ruchu rzeczywistego (d) układu o zadanych więzach od ruchu rzeczywistego (∂) układu częściowo wyzwolonego z więzów jest mniejsze od odchylenia dowolnego ruchu możliwego (δ) od tegoż ruchu częściowo wyzwolonego (∂), tzn.

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial}. \tag{2.1}$$

AMINOW [12] zbadał stosowalność uogólnionej postaci zasady Gaussa (2.1) do układów o więzach nieidealnych. W pracy AMINOWA rozważano układy o więzach nieidealnych holonomicznych, na ogół niestacjonarnych. Stwierdzono, że dla rozważanych układów nie jest słuszna zasada, wyrażona nierównością (2.1); wyprowadzono uogólnioną postać tej zasady, słuszną również i dla układów z anholonomicznymi więzami nieidealnymi.

Wyraża ją nierówność (2.2)

$$A_{d\partial} < \frac{1}{2}(A_{\delta\partial}+A_{\delta-d,d-\partial}).$$

Jeżeli więzy są idealne, to z nierówności (2.2) wynika nierówność (2.1). W tej samej pracy podano uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania w postaci (2.1) dla układów z tarciem, przy ograniczeniu zbioru przemieszczeń możliwych do (c) — przemieszczeń.

W pracy [6] CZETAJEW wyprowadził ogólną zasadę dynamiki dla układów z tarciem, nie zawierającą w jawnej postaci sił reakcji więzów dla przemieszczeń możliwych, ortogonalnych do rzeczywistych prędkości punktów układu, to znaczy spełniających warunki

$$\dot{x}_i\,\delta x_i+\dot{y}_i\,\delta y_i+\dot{z}_i\,\delta z_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Zbiór takich przemieszczeń nazywa CZETAJEW (c) — przemieszczeniami.

Dla najczęściej spotykanych więzów z tarciem praca sił reakcji, działających na punkty materialne układu w danej chwili czasu, wykonana na (c) — przemieszczeniach, równa się zeru

$$\sum_{i=1}^{n}(R_{ix}\,\delta x_i^c+R_{iy}\,\delta y_i^c+R_{iz}\,\delta z_i^c) = 0.$$

Rugując z tego warunku, za pomocą równań ruchu, reakcje więzów R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}, otrzymuje CZETAJEW związek

$$\sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_i-X_i)\delta x_i^c+(m_i\ddot{y}_i-Y_i)\delta y_i^c+(m_i\ddot{z}_i-Z_i)\delta z_i^c] = 0 \tag{2.3}$$

słuszny dla (c) — przemieszczeń. Związek ten można rozpatrywać jako uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z tarciem.

Zasada (2.3) została dalej rozwinięta w pracach RUMIANCEWA [7]. Wychodząc z niej RUMIANCEW wyprowadził zwykłą postać zasady Gaussa, nie zawierającą jawnie sił reakcji.

Ograniczenie zbioru przemieszczeń możliwych w zasadzie (2.3) do (c) — przemieszczeń powoduje odpowiednie ograniczenie zbioru ruchów możliwych, z którymi porównywany jest w zasadzie Gaussa ruch rzeczywisty.

Rozważa się tylko ruchy możliwe, w których przyśpieszenia punktów układu $\bar{\gamma}_i^c$ spełniają następujący warunek: różnice między nimi i przyśpieszeniami punktów w ruchu rzeczywistym $\bar{w}_i$ są (c) — przemieszczeniami.

Takie ruchy możliwe nazywa RUMIANCEW (c) — ruchami. Dla nich zasada (2.3) przybiera postać

$$\sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_i-X_i)(\ddot{x}_i-\gamma_{ix}^c)+(m_i\ddot{y}_i-Y_i)(\ddot{y}_i-\gamma_{iy}^c)+(m_i\ddot{z}_i-Z_i)(\ddot{z}_i-\gamma_{iz}^c)] = 0. \tag{2.4}$$

Z równania (2.4) wynika zwykła postać zasady Gaussa.

1. Niech dany będzie układ n punktów materialnych o więzach nieliniowych anholonomicznych pierwszego rzędu z tarciem

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k;\; i = 1, 2, \ldots).$$

Dla rozważanego układu typu Czetajewa-Przeborskiego przemieszczenia możliwe określone są związkami

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Z definicji tej wynika, że istnieją przemieszczenia możliwe punktów układu proporcjonalne do różnic między przyśpieszeniami tych punktów w ruchu rzeczywistym (d) i w ruchu możliwym (δ), przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów w ruchu rzeczywistym i możliwym w rozpatrywanej chwili czasu t. Ograniczmy ruchy wirtualne do zbioru (c) — ruchów. Zgodnie z zasadą Czetajewa dla układów z tarciem w postaci (2.4) w ruchu rzeczywistym danego układu będzie spełniony warunek

$$\text{(2.5)}\qquad \sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_{id}-X_i)(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{y}_{id}-Y_i)(\ddot{y}_{id}-\ddot{y}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{z}_{id}-Z_i)(\ddot{z}_{id}-\ddot{z}^c_{i\delta})] = 0.$$

Wyzwólmy układ z części więzów i niech $\partial\bar{r}_i$ oznacza przemieszczenia możliwe układu częściowo wyzwolonego. Dla układów typu Czetajewa-Przeborskiego przemieszczenia możliwe danego układu znajdują się wśród przemieszczeń możliwych układu częściowo wyzwolonego. Jest oczywiste, że również (c) — przemieszczenia danego układu powinny znajdować się wśród (c) — przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego. Wobec tego zasadę (2.4) dla układu częściowo wyzwolonego (∂) można zapisać w postaci

$$\text{(2.6)}\qquad \sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_{i\partial}-X_i)(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{y}_{i\partial}-Y_i)(\ddot{y}_{id}-\ddot{y}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{z}_{i\partial}-Z_i)(\ddot{z}_{id}-\ddot{z}^c_{i\delta})] = 0.$$

Odejmując równanie (2.6) od równania (2.5) otrzymujemy związek

$$\text{(2.7)}\qquad A_{d\delta}+A_{d\partial}-A_{\delta\partial} = 0,$$

gdzie wielkość

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i[(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}^c_{i\delta})^2+(\ddot{y}_{id}-\ddot{y}^c_{i\delta})^2+(\ddot{z}_{id}-\ddot{z}^c_{i\delta})^2]$$

oznacza odchylenie rzeczywistego ruchu (d) układu z tarciem od ruchu możliwego (δ) tego układu.

Analogicznie zdefiniowane są wielkości $A_{d\partial}$ oraz $A_{\delta\partial}$. Z równania (2.7) bezpośrednio wynikają dwie nierówności

$$\text{(2.8)}\qquad A_{d\partial} < A_{\delta\partial},$$

$$\text{(2.9)}\qquad A_{d\delta} < A_{\delta\partial}.$$

Pierwsza z nich stanowi wyrażenie uogólnionej zasady Gaussa dla rozważanych układów z tarciem: odchylenie rzeczywistego ruchu (d) układu z tarciem od rzeczywistego ruchu (∂) układu częściowo wyzwolonego jest mniejsze niż odchylenie ostatniego z tych ruchów od możliwego (c) — ruchu (δ).

2. Uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania można rozszerzyć również i na układy o więzach liniowych anholonomicznych drugiego rzędu z tarciem.

Równania więzów są postaci

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{\lambda i}\ddot{x}_i+b_{\lambda i}\ddot{y}_i+c_{\lambda i}\ddot{z}_i) = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k),$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$, $b_{\lambda i}$, $c_{\lambda i}$ oraz a_λ zależą od czasu, współrzędnych i prędkości układu. Przemieszczenia możliwe w takich układach [3], [4] określone są przez związki

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{\lambda i}\delta x_i+b_{\lambda i}\delta y_i+c_{\lambda i}\delta z_i) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

Dla tego rodzaju definicji przemieszczeń możliwych pozostają słuszne dwa założenia, na których opiera się dowód uogólnionej zasady Gaussa. Tak więc, wychodząc z zasady Czetajewa dla układów z tarciem i powtarzając te same rozważania, co dla układów o więzach anholonomicznych rzędu pierwszego z tarciem, dojdziemy znów do nierówności (2.8), wyrażającej uogólnioną zasadę Gaussa dla układów z tarciem.

3. Związek między energią przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym i częściowo lub całkowicie wyzwolonym

W pracy [2] CZETAJEW wyprowadził uogólnioną postać zasady najmniejszego skrępowania w układach o więzach idealnych nieliniowych (w szczególnym przypadku liniowych) anholonomicznych pierwszego rzędu. Opisuje ją nierówność

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial} \tag{3.1}$$

wyrażająca następującą treść: odchylenie ruchu rzeczywistego (d) układu o zadanych więzach od ruchu rzeczywistego (∂) układu częściowo z nich wyzwolonego jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu możliwego (δ) od tego samego ruchu (∂) układu, lecz częściowo wyzwolonego. Oprócz nierówności (3.1) CZETAJEW wyprowadził w swojej pracy jeszcze jedną nierówność

$$A_{d\delta} < A_{\delta\partial} \tag{3.2}$$

wyrażającą twierdzenie, które nazwiemy twierdzeniem Czetajewa: odchylenie ruchu rzeczywistego (d) układu od ruchu możliwego (δ) jest mniejsze, niż odchylenie tego ostatniego od ruchu częściowo wyzwolonego (∂).

W omawianej pracy wyprowadza się z nierówności (3.1) i (3.2) związek pomiędzy energiami przyśpieszeń w ruchach (d), (δ) oraz (∂).

Dodając nierówności (3.1) i (3.2) otrzymujemy nierówność

$$\frac{A_{d\delta}+A_{d\partial}}{2} < A_{\delta\partial}. \tag{3.3}$$

Podstawmy do nierówności (3.3) wyrażenia na wielkości $A_{d\delta}$, $A_{d\partial}$, $A_{\delta\partial}$:[1]

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta})^2,$$

[1]) Dla skrócenia zapisu oznaczamy współrzędne punktów układu jedną literą x z odpowiednim indeksem.

gdzie $\ddot{x}_{id}$, $\ddot{x}_{i\delta}$ są przyśpieszeniami odpowiednio w ruchu rzeczywistym i możliwym, przy jednakowych wartościach współrzędnych i prędkości punktów układu w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym w rozpatrywanej chwili czasu t. Wielkości $A_{d\partial}$ oraz $A_{\delta\partial}$ są określone w sposób analogiczny.

Z nierówności (3.3) po podstawieniu otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta})^2+\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial})^2 < 2\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{i\delta}-\ddot{x}_{i\partial})^2. \tag{3.4}$$

Wprowadzając energię przyśpieszeń dla ruchu rzeczywistego (d), możliwego (δ) i wyzwolonego (∂), oznaczając je odpowiednio jako S_d, S_δ oraz S_∂ możemy zapisać (3.4) w postaci:

$$2S_d+\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}(\ddot{x}_{i\delta}-\ddot{x}_{id})+\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\delta}(\ddot{x}_{i\partial}-\ddot{x}_{id}) < S_\delta+S_\partial,$$

względnie

$$S_d < \frac{S_\delta+S_\partial}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta})+\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\delta}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial})}{2}. \tag{3.5}$$

Ostatnia z nierówności stwierdza, że energia przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym jest mniejsza od połowy sumy energii przyśpieszeń w ruchu wyzwolonym i możliwym, zwiększonej o połowę sumy iloczynów przyśpieszeń w jednym z ostatnich dwu ruchów, pomnożonych przez różnice między przyśpieszeniami w drugim z tych ruchów i w ruchu rzeczywistym (sumowanie odnosi się do wszystkich punktów układu).

Sumy wchodzące do prawej strony ostatniej nierówności mają określony sens mechaniczny.

Rozważmy pierwszą sumę

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta}). \tag{3.6}$$

Zawarte w niej różnice $\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta}$ między przyśpieszeniami w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym można traktować jako przemieszczenia możliwe $\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta} = \delta x_i$. Wówczas sumę (3.6) możemy zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}\,\delta x_i. \tag{3.7}$$

Zgodnie z drugim prawem Newtona mamy dla ruchu częściowo wyzwolonego związek

$$m_i\ddot{x}_{i\partial} = F_{ix}+N_{ix},$$

gdzie N_{ix} są reakcjami więzów, zachowanych przy częściowym wyzwoleniu układu. Uwzględnijmy również to, że przemieszczenia możliwe danego układu (δx_i) zawierają się w zbiorze przemieszczeń możliwych (∂x_i) układu częściowo wyzwolonego. Tak więc suma (3.7) przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}\,\delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} (F_{ix}+N_{ix})\,\partial x_i.$$

Jeżeli więzy są idealne, to mamy

$$\sum_{i=1}^{3n} N_{ix}\partial x_i = 0.$$

Wobec tego suma (3.7) równa jest pracy wirtualnej sił aktywnych

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_{i\partial}\,\delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} F_{ix}\,\delta x_i.$$

Zbadajmy z kolei drugą sumę zawartą w prawej części nierówności (3.5)

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_{i\delta}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial}). \tag{3.8}$$

Z drugiego prawa Newtona mamy

$$m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial}) = N'_{ix},$$

gdzie N'_{ix} to reakcje więzów odrzuconych przy częściowym wyzwoleniu układu.

W takim razie suma (3.8) przedstawia sobą pracę sił reakcji odrzuconych więzów na przyśpieszeniach ruchu możliwego.

Dzięki temu nierówność (3.5) możemy zinterpretować w sposób następujący: energia przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym jest mniejsza od połowy sumy energii przyśpieszeń ruchu wyzwolonego i ruchu możliwego, zwiększonej o połowę sumy pracy wirtualnej sił aktywnych oraz pracy sił reakcji więzów odrzuconych przy wyzwoleniu układu wykonanej na przyśpieszeniach ruchu możliwego.

4. O sensie energetycznym pewnego twierdzenia Czetajewa

W rozdziale tym zbadamy sens energetyczny twierdzenia Czetajewa, wyrażającego jedną z ogólnych własności ruchu nieliniowych układów anholonomicznych. Wykażemy, że twierdzenie Czetajewa można rozpatrywać jako uogólnienie na nieliniowe układy anholonomiczne twierdzenia Bertranda o energii kinetycznej.

Oprócz zależności, wyrażającej uogólnioną zasadę Gaussa dla nieliniowych układów anholonomicznych pierwszego rzędu, CZETAJEW uzyskał w pracy [2] jeszcze jeden związek, odpowiadający następującemu twierdzeniu: odchylenie rzeczywistego ruchu układu o więzach idealnych od dowolnego ruchu możliwego jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od ruchu częściowo wyzwolonego

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \tag{4.1}$$

gdzie wielkość

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2 \tag{4.2}$$

oznacza odchylenie ruchu rzeczywistego od ruchu możliwego w czasie dt; wielkość

(4.3) $$A_{\partial\delta} = \sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2$$

oznacza odchylenie ruchu częściowo wyzwolonego od tego samego ruchu możliwego w czasie dt; wielkości $d\dot{x}_i$, $\delta\dot{x}_i$, $\partial\dot{x}_i$ oznaczają zmiany prędkości punktu m_i w czasie dt odpowiednio w ruchu rzeczywistym, możliwym i częściowo wyzwolonym; prędkość $\dot{x}_i$ punktu w chwili t jest we wszystkich trzech ruchach jednakowa, przy czym w ruchu częściowo wyzwolonym punkt m_i jest pod działaniem tej samej siły $\overline{F}_i$, co w ruchu rzeczywistym.

Dla układów holonomicznych i liniowych anholonomicznych nierówności (4.1) można nadać pewien sens geometryczny. Przyrosty energii kinetycznej układu w czasie dt w ruchu rzeczywistym i częściowo wyzwolonym można przedstawić z dokładnością do wielkości rzędu trzeciego względem dt przy pomocy wzorów:

(4.4) $$\Delta T = \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i d\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i)^2,$$

(4.5) $$\Delta' T = \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i \partial\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i)^2.$$

Różnica przyrostów energii kinetycznej w obydwu wymienionych ruchach wynosi

(4.6) $$\Delta T - \Delta' T = \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i(d\dot{x}_i - \partial\dot{x}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i)^2.$$

Z nierówności (4.1) zapisanej w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2 < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2$$

otrzymujemy

(4.7) $$\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i)^2 - \sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i)^2 < \sum_{i=1}^{3n} 2m_i\delta\dot{x}_i(d\dot{x}_i - \partial\dot{x}_i).$$

Ostatnią nierówność można zapisać na podstawie (4.6) jako

(4.8) $$\Delta T - \Delta' T < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_i + \delta\dot{x}_i)(d\dot{x}_i - \partial\dot{x}_i),$$

skąd

(4.9) $$\frac{\Delta T}{dt} - \frac{\Delta' T}{dt} < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_i + \delta\dot{x}_i)(\ddot{x}_{id} - \ddot{x}_{i\partial}),$$

gdzie $\ddot{x}_{id}$ jest przyśpieszeniem punktu m_i w ruchu rzeczywistym, zaś $\ddot{x}_{i\partial}$ — przyśpieszeniem tegoż punktu w ruchu wyzwolonym.

Z równań ruchu dla danego układu i układu częściowo wyzwolonego mamy związek

$$m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial}) = N_{ix}^{(d)}-N_{ix}^{(\partial)},$$

gdzie $N_{ix}^{(d)}$ oznacza siły reakcji więzów danego układu, zaś $N_{ix}^{(\partial)}$ — siły reakcji więzów w układzie częściowo wyzwolonym. Różnica tych wielkości

$$N_{ix}^{(d)}-N_{ix}^{(\partial)} = N_{ix}^{(d-\partial)}$$

jest reakcją więzów odrzuconych przy częściowym wyzwoleniu układu.

Nierówność (4.9) możemy więc zapisać w postaci

$$\frac{\Delta T}{dt}\frac{\Delta' T}{dt} < \sum_{i=1}^{3n} (\dot{x}_i+\delta\dot{x}_i) N_{ix}^{(d-\partial)}, \tag{4.10}$$

gdzie $\dot{x}_i+\delta\dot{x}_i$ jest prędkością w dowolnym ruchu możliwym w chwili $t+dt$.

Prędkości punktów w możliwym ruchu układu o zadanych więzach są jak widać prędkościami możliwymi w ruchu układu o reakcjach więzów równych $N_{ix}^{(d-\partial)}$. W przypadku więzów stacjonarnych suma z prawej strony nierówności (4.10) jest proporcjonalna do sumy elementarnych prac sił reakcji więzów $N_{ix}^{(d-\partial)}$, wykonanych na przemieszczeniach wirtualnych układu i wobec tego dla więzów idealnych równa się zeru

$$\sum_{i=1}^{3n} (\dot{x}_i+\delta\dot{x}_i) N_{ix}^{(d-\partial)} = 0.$$

W ten sposób z relacji (4.10) mamy

$$\frac{\Delta T}{dt}-\frac{\Delta' T}{dt} < 0$$

względnie

$$\frac{\Delta T}{dt} < \frac{\Delta' T}{dt},$$

co oznacza, że przyrost energii kinetycznej w jednostce czasu w ruchu rzeczywistym jest mniejszy, niż w ruchu częściowo wyzwolonym. Ten wynik jest analogiczny do twierdzenia Bertrada [13].

Literatura cytowana w tekście

1. Ю. Б. Коган, *Об одном экстремальном свойстве реакций связей*, ПММ, **28**, 5 (1964).
2. Н. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат. общ. при Казанском университете, сер. 3, **6**, 1932–1933 г. г.
3. A. Przeborski, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschrift, B. 36, Berlin 1933, 184–194.
4. В. И. Киргетов, *О возможных перемещениях, материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка*, ПММ, **23**, 4 (1959).
5. A. Przeborski, *Wykłady mechaniki teoretycznej*, t. II, W., 1935.
6. Н. Г. Четаев, *О некоторых связях с Трением*, ПММ, т. , **24**, 1 (1960).

7. В. В. Румянцев, *О системах с трением*, ПММ, **25**, 6 (1961), 969-977.
В. В. Румянцев, *О движении некоторых систем с неидеальными связями*, Вестник МГУ, 5 (1961).
8. К. Ф. Гаусс, *Об одном новом общем принципе механики*, Сб. Вариационные принципы механики, М. Физматгиз, 1959, 170–172.
9. Г. К. Пожарицкий, *Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением*, ПММ, **25**, 3 (1961).
10. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат, общ-ва при Казанском университете, серия 2, **21**, 3 (1916).
11. Э. Мах, *Механика. Историко-критическиё очерк её разбития*, Спб., 1909, 306.
12. М. Ш. Аминов, *К принципу Гаусса*, Ученые записки авиационного института, 4 (1935).
13. Е. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, МЛ, 1937, 290–291.

POLITECHNIKA WOŁGOGRADZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1972 r.