MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

PODSTAWY TEORII KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH NA OŚRODKU GÓRNICZYM

JAN KUBIK (GLIWICE)

1. Wstęp

Wzrastające ciągle wydobycie węgla na terenie Górnośląskiego Okręgu Przemysłowego stwarza nieznane w innych regionach kraju zagadnienia teorii konstrukcji, które urastają do problemu wymagającego szybkiego rozwiązania. Odmienność sformułowań zagadnień i metod zabezpieczeń stawia nowe zadania przed mechaniką, które są tym bardziej palące, że sytuacja ulega ciągłemu pogorszeniu, następuje bowiem wzmożenie eksploatacji pod terenami zabudowy miejskiej i skupiskami wielkiego przemysłu. W tej sytuacji prawidłowe rozeznanie zagadnień, oparcie ich na sensownych założeniach, zgodnych z rzeczywistą naturą tych problemów, musi być właściwą podstawą do rozwijania teorii zabezpieczeń konstrukcji przed wpływem szkód górniczych.

Po pierwsze, większość zagadnień mechaniki, związanych z teorią tych konstrukcji, wymaga kompleksowego podejścia, które uwzględni złożone zależności zachodzące między ruchem i siłami w górotworze z jednej strony oraz siłami występującymi w konstrukcji z drugiej. Jednak kompleksowość podejścia, uwzględniająca całą złożoność problemu, nie wyklucza rozwiązań częściowych, które jako prostsze łatwiej uzyskać, a na ich podstawie można budować rozwiązania zagadnień bardziej skomplikowanych. Z tej to też przyczyny wybrano do analizy układy prętowe, jako prostsze od powierzchniowych, i zagadnienie niesprzężone, jako łatwiejsze od sprzężonego. Po wtóre, należy przyjąć jako obowiązującą zasadę, że czynnik czasu nie może być pomijany przy analizie wzajemnych wpływów ruchów górotworu i konstrukcji.

Prosty eksperyment uczy, że konstrukcja poddana dwom jednakowym programom przemieszczeń, przesuniętym w czasie, nie będzie się zachowywała identycznie, różnice będą znaczne (por. [4, 5]), tym bardziej, że procesy wymuszania przemieszczeń nie są krótkie. Niewystarczające są zatem rozwiązania uzyskane w zakresie sprężystym, trzeba się odwołać do teorii ujmujących wpływ czasu w związkach konstytutywnych. Najprostszymi takimi teoriami są: liniowa lepkosprężystość i teoria starzenia się[1]. Obie też leżą u podstaw

[1]) Analiza konstrukcji w zakresie teorii starzenia napotyka jednak pewne trudności związane z rozwiązywaniem samych równań zagadnienia (por. [5] rozdz. 4.2). Zaproponowana w tej pracy metoda dąży do rozsprzężenia układu równań całkowych odpowiadających materiałom starzejącym się.

analizowanych w pracy zagadnień. Trzeba tutaj zaznaczyć, że wprowadzenie lepkosprężystości do obliczeń nie jest krokiem czynionym w stronę teorii z niekorzyścią na rzecz obliczeń inżynierskich, które powinny być z natury proste. Kompromis uzyskano łatwo, na wyjątkowych warunkach, zupełnie bez ustępstw żadnej ze stron. Okazało się mianowicie, że rozwiązania lepkosprężystych układów prętowych dają się sprowadzić, po pewnych modyfikacjach wpływów zewnętrznych, do rozwiązań zagadnień sprężystych, wykonalnych dla inżyniera.

Klasa zagadnień związana z uzyskaniem pełnego rozeznania stanu naprężeń i przemieszczeń konstrukcji położonych na górotworze generuje następny problem: ustalanie i kształtowanie dopuszczalnych ruchów górotworu. Dopuszczalnych oczywiście z punktu widzenia prawidłowej eksploatacji konstrukcji. Ten problem, łącznie z próbą odpowiedzi, jest również dalej formułowany. Każdy z tych generalnych problemów stawia przed mechaniką nowe zadania wymagające rozwiązania. Oto przykłady. Dotychczas nie został do końca wyjaśniony problem narastania wpływu deformacji powierzchni górotworu na strukturę i właściwości fizyczne gruntu pod fundamentami. W tym zakresie nie są również znane w pełni zagadnienia kontaktowe styku fundamentu z ośrodkiem. W dalszej kolejności wyłaniają się zagadnienia wpływu ruchów górotworu na samą konstrukcję. Zauważmy, że charakter konstrukcji, jej obciążenie i kształt determinują wzajemne relacje między górotworem ($\mathscr{V}$) a konstrukcją $\mathscr{B}$. Wyłaniają się więc tutaj problemy sprzężenia.

I. Zagadnienie niesprzężone określa warunek, aby ruch konstrukcji był bez wpływu na stan przemieszczeń i naprężeń w górotworze.

II. Zagadnienie sprzężone, w którym istnieje wzajemny wpływ ruchów konstrukcji i górotworu na siebie.

Jak to najczęściej w rzeczywistości bywa, oba przypadki są celowo czynioną idealizacją rzeczywistości, mającą jednak duże znaczenie praktyczne. W rzeczywistości bowiem będzie istniała zawsze pewna warstwa na styku, w której wzajemny wpływ obu ośrodków będzie nie do pominięcia.

W drugiej grupie zagadnień należałoby zwrócić uwagę, że jest celowe określać indywidualnie, dla każdej konstrukcji, dopuszczalne zmiany parametrów górotworu określające ruch tych konstrukcji. Również proponuje się analizować łącznie z ruchem także szybkości zmian ruchu jako mające również istotny wpływ na pracę konstrukcji.

Rozpoczniemy badanie zjawisk w zakresie lepkosprężystym (ew. starzenia się) od przypadku najprostszego, a więc konstrukcji prętowych w zakresie teorii niesprzężonej, zakładając brak wpływu ruchu konstrukcji na górotwór, nawet w obszarach bezpośredniego styku. Trudności jakie się przy tych badaniach wyłonią zostaną spotęgowane jeszcze bardziej przy ustrojach powierzchniowych opisanych równaniami o znacznie bardziej skomplikowanej strukturze formalnej.

Większość konstrukcji przemysłowych to właśnie ustroje prętowe, stąd też znaczna przydatność przeprowadzonych w pracy rozważań. Rozważania te z konieczności opierały się na niewielkiej ilości faktów łatwych do zaobserwowania. Wymagają one jednak weryfikacji doświadczalnej, której do chwili obecnej nie przeprowadzono.

2. Ogólne uwagi dotyczące zabezpieczeń

Z punktu widzenia eksploatacji konstrukcji dopuszczalne są wszelkie ruchy górotworu, które nie wywołują dodatkowych stanów naprężeń i przemieszczeń w konstrukcji. Do ruchów tych należą m.in. ruchy sztywne powierzchni górotworu. Istnieje jednak jeszcze inna grupa ruchów górotworu, wyznaczona przez właściwości mechaniczne konstrukcji, która jest także bez wpływu na stan naprężeń konstrukcji. Podobnie można dobrać również funkcje obciążeń zapewniające niezmienność przemieszczeń konstrukcji wskutek ruchów górotworu. Te przypadki wynikają z niezmienniczych właściwości równań opisujących zachowanie się konstrukcji na górotworze (por. problem 4). Każdy z nich ma podstawowe znaczenie dla zabezpieczeń konstrukcji przed wpływami szkód górniczych. Przy analizie ruchu powierzchni górotworu istotny okazuje się tylko opis lokalny, w pewnym otoczeniu posadowienia konstrukcji. Będziemy również wymagali, aby lokalnie ruch górotworu spełniał ograniczenia odpowiadające trzem przedstawionym poprzednio przypadkom. Tym samym zostaną sprecyzowane wymagania w stosunku do ruchu górotworu. Z drugiej strony podobne rezerwy istnieją w samej konstrukcji, dokładniej w sposobie przejmowania przemieszczeń i sił poruszającego się górotworu. Może okazać się celowe w tym zakresie wymodelowanie takiego elementu konstrukcji, pracującego samodzielnie i przejmującego ruchy górotworu, w taki sposób, aby były one bez wpływu na całą resztę konstrukcji. Również możemy zabezpieczać się przed skutkami ruchów górotworu przez świadomy dobór sił w konstrukcji, np. przez wstępne sprężenie, w taki sposób, aby został zniwelowany wpływ ruchu górotworu. Tym samym zostały ustalone z grubsza problemy, którymi powinna zajmować się statyka konstrukcji prętowych w górotworze.

W zakończeniu tej części sformułujemy jeszcze dokładnie problemy, które będą analizowane w pracy.

Dany jest układ prętowy lepkosprężysty $\mathscr{B}$, spełniający wszelkie założenia klasycznej statyki układów prętowych, którego materiał opisywany jest przez teorię lepkosprężystości lub przez liniowe teorie starzenia się. Układ ten jest posadowiony na powierzchni przemieszczającego się górotworu. Ruch powierzchni górotworu opisany jest funkcjami, w których jako zmienne niezależne występują współrzędne miejsca i czas. Ruch ten determinuje przemieszczenia podpór układu $\mathscr{B}$. Problem analizowany jest w zakresie niesprzężonym.

Należy:

1. Określić stan naprężeń i przemieszczeń w konstrukcji $\mathscr{B}$.
2. Ustalić klasę dopuszczalnych ruchów konstrukcji.
3. Znaleźć grupę ruchów górotworu, które nie będą zmieniały stanu naprężenia w konstrukcji (lub też obciążenia, które nie zmienią stanu przemieszczeń konstrukcji).

Przed podaniem efektywnego rozwiązania wymienionych problemów należy przeanalizować zagadnienia ogólne występujące w statyce lepkosprężystych układów prętowych. Tym zagadnieniom poświęcony jest następny rozdział. Zwrócimy tutaj jeszcze tylko uwagę na metody przydatne przy analizie równań lepkosprężystych układów prętowych. Są to metody rachunku operatorów i rachunku macierzowego łącznie z wykorzystaniem elementów analizy funkcjonalnej i teorii grup, które okazują się w tych wypadkach najbardziej sposobnym narzędziem rozważań.

3. Problemy statyki układów lepkosprężystych

W pracach [4] i [5] podano równania metody sił i przemieszczeń dla lepkosprężystych układów prętowych (równania: (2.11) z [4] i (3.6) z [5]), które mają następujące ogólne postacie:[2)]

$$(1)\qquad \int_0^t \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \tau}\delta_{ij}(t-\tau)\,d\tau+\int_0^t \frac{\partial \mathbf{q}_r}{\partial \tau}\delta_{rj}(t-\tau)\,d\tau = \mathbf{u}_j(t),$$

$$X_i\delta_{ij} \equiv X_1\delta_{1j}+X_2\delta_{2j}+\ldots+X_N\delta_{Nj},$$

$$(2)\qquad \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \tau}M_{ij}(t-\tau)\,d\tau+\int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_r}{\partial \tau}M_{rj}(t-\tau)\,d\tau = \mathbf{P}_j(t),$$

$$x_i = (X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}),\qquad i,j = 1,2,\ldots,N,\qquad r = 1,2,\ldots,M,$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(x_i, t),\qquad \delta_{ij} = \delta_{ij}(x_j, t).$$

W układach równań (1) i (2) oznaczono przez $\mathbf{X}_i(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ nieznane siły i przemieszczenia uogólnione; δ_{ij}, M_{ij} są, odpowiadającymi siłom $\mathbf{X}_i$ i przemieszczeniom $\boldsymbol{\varphi}_i$, uogólnionymi wpływami w punkcie x_j od wymuszeń jednostkowych (stałych w czasie!) w punkcie x_i układu lepkosprężystego $\mathscr{B}$. Natomiast $\mathbf{q}_r, \boldsymbol{\varphi}_r$, $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{P}_j$ są danymi wpływami zewnętrznymi opisanymi jako znane funkcje czasu.

Naturalnym uogólnieniem układów równań (1) i (2) jest równanie macierzowe

$$(3)\qquad \mathbf{A}\ast\dot{\mathbf{Y}}+\mathbf{B}\ast\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C},$$

$$(4)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11}\,A_{12}\,\ldots\,A_{1N} \\ \vdots \\ A_{NN} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11}\,B_{12}\,\ldots\,B_{1M} \\ \vdots \\ B_{NM} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_r \end{bmatrix},\qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}$$

opisujące wszelkie zagadnienia statyki lepkosprężystych układów prętowych w ramach liniowej lepkosprężystości oraz teorii małych odkształceń.

Macierze występujące w równaniu (3) mogą być utożsamiane z macierzami w równaniach (1) i (2) według relacji:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathbf{Y} &= ([\mathbf{X}_1], [\boldsymbol{\varphi}_i], & \mathbf{A} &= ([\delta_{ij}], [M_{ij}]),\\ \mathbf{P} &= ([\mathbf{q}_r], [\boldsymbol{\varphi}_r]), & \mathbf{B} &= ([\delta_{rj}], [M_{rj}]).\\ \mathbf{C} &= ([\mathbf{u}_j], [\mathbf{P}_j]) \end{aligned}$$

W równaniu (3) symbol $\ast$ oznacza mnożenie splotowe macierzy o elementach funkcyjnych

$$(6)\qquad \mathbf{J}_1\ast\mathbf{J}_2 \equiv \int_0^t \mathbf{J}_1(\tau)\mathbf{J}_2(t-\tau)\,d\tau = \mathbf{J}_2\ast\mathbf{J}_1$$

[2)] W równaniach teorii starzenia jądra $\delta_{ij}(t-\tau)$, $\delta_{rj}(t-\tau)$, $M_{ij}(t-\tau)$, $M_{rj}(t-\tau)$ należy zastąpić przez $\delta_{ij}(t,\tau)$, $\delta_{rj}(t,\tau)$, $M_{ij}(t,\tau)$, $M_{ri}(t,\tau)$.

określone wtedy, jeżeli istnieje iloczyn zwykły takich macierzy. Dla teorii starzenia się symbol $\ast$ w równaniach (3) i (6) należy zastąpić symbolem $\square$ oznaczającym splot uogólniony macierzy $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{J}_2$ określony następująco:

$$\mathbf{J}_1 \square \mathbf{J}_2 \equiv \int_0^t \mathbf{J}_1(\tau)\mathbf{J}_2(t, \tau)\,d\tau. \tag{6'}$$

Splot ten jest łączny ale nieprzemienny. Obejmuje on szerszą klasę zagadnień niż lepkosprężyste, lecz jest znacznie mniej efektywny w zastosowaniach [5].

Przytoczymy tutaj jeszcze, analogiczne do równania (3), znane macierzowe równanie słuszne dla prętowych układów sprężystych $\mathscr{B}'$

$$\mathring{\mathbf{A}}\mathbf{Y} + \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \mathring{\mathbf{C}}. \tag{7}$$

Wykorzystując twierdzenia i metody rachunku operatorowego — który okazuje się najbardziej przydatnym narzędziem przy analizie prętowych układów lepkosprężystych — możemy równanie (3) przekształcić do postaci[3)]

$$\mathbf{A} \ast \mathbf{Y} + \mathbf{B} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C} \ast H(t), \tag{8}$$

przy założeniach, że $\mathbf{P}(0) \equiv \mathbf{0}$ i $\mathbf{Y}(0) \equiv \mathbf{0}$. Tutaj $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Równania (3) i (8) są najogólniejszymi postaciami równań statyki lepkosprężystych układów prętowych. Z równań tych wynikają jako przypadki szczególne wszelkie możliwe sposoby zastosowań do rozwiązywania zadań szczegółowych, np. ram lub łuków lepkosprężystych.

Nadmieniamy, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ występujące w równaniu (3) mają postać $\mathbf{A} = R(t)\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} = R(t)\mathring{\mathbf{B}}$, gdzie funkcja $R(t) = (R, F)$ zależy od właściwości fizycznych materiału ośrodka $\mathscr{B}$ (por. [11] s. 68 i 69).

Ogólność równań (3) lub (8) implikuje również znaczną wszechstronność zastosowań o ciekawych właściwościach, które przedstawimy w postaci problemów obejmujących istotne z punktu widzenia zastosowań zagadnienia.

Problem 1. *Rozwiązanie równania zagadnienia*

Rozwiązanie to uzyskujemy wykorzystując przekształcenie Laplace'a i twierdzenie o splocie.

Oznaczmy transformaty $\left(f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \bar{f}(p)\right)$

$$\mathbf{A}(t) \to \bar{\mathbf{A}}(p), \quad \mathbf{B}(t) \to \bar{\mathbf{B}}(p), \quad \mathbf{C}(t) \to \bar{\mathbf{C}}(p),$$
$$\mathbf{P}(t) \to \bar{\mathbf{P}}(p), \quad \mathbf{Y}(t) \to \bar{\mathbf{Y}}(p). \tag{9}$$

[3)] Równania (3) w teorii starzenia mają postać następującą

$$\mathbf{A} \square \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B} \square \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C}, \tag{3'}$$

z której po transformacji Laplace'a ($\mathbf{A}(t, \tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} \bar{\mathbf{a}}(p)e^{-\tau\bar{q}(p)}$, $\mathbf{B}(t, \tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} \bar{\mathbf{b}}(p)e^{-\tau q(p)}$, $\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \mathbf{P}, \mathbf{C} \xrightarrow{\mathscr{L}} \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{C}}$, uzyskujemy $\bar{\mathbf{a}}(p)\bar{q}(p)\bar{\mathbf{Y}}(\bar{q}(p)) + \bar{\mathbf{b}}(p)\bar{q}(p)\bar{\mathbf{P}}(\bar{q}(p)) = \bar{\mathbf{C}}(p)$, $(\mathbf{Y}(0) = \mathbf{P}(0) = \mathbf{0})$, natomiast po retransformacie otrzymujemy prostszą postać układu równań podlegających starzeniu się

$$\mathbf{A} \square \mathbf{Y} + \mathbf{B} \square \mathbf{P} = \mathscr{L}^{-1}[\bar{q}(p)^{-1}] \ast \mathbf{C}. \tag{8'}$$

Wtedy z (8) otrzymujemy

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{p}\bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{P}}. \tag{10}$$

Po przemnożeniu z lewej przez macierz odwrotną $[\mathbf{A}]^{-1}$ i retransformacji mamy:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}^{-1} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}). \tag{11}$$

Nieznana macierz $\mathbf{A}^{-1}$ razem z macierzą lepkosprężystości $\mathbf{A}$ muszą spełniać relację:

$$[\bar{\mathbf{A}}(p)]^{-1}\mathbf{A}(p) = \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ — macierz jednostkowa}), \tag{12}$$

z której po przekształceniach uzyskujemy użyteczne kryterium sprawdzenia poprawności obliczeń:

$$\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{A} \ast H = \mathbf{I},$$

$$\left(\int_0^t \mathbf{A}^{-1}(t-\tau) \int_0^\tau \mathbf{A}(\tau')\,d\tau'\,d\tau = \mathbf{I}\right). \tag{13}$$

Problem 2. *Rozwiązania identyczne w układach sprężystych i lepkosprężystych*

Z wszelkich możliwych macierzy wpływów zewnętrznych $(\mathbf{P}, \mathbf{C})$ można wydzielić taką klasę wpływów, która zapewni identyczność stanów naprężeń (przemieszczeń) w układach sprężystym $\mathcal{B}'$ i lepkosprężystym $\mathcal{B}$ znajdujących się w tych samych konfiguracjach. Odpowiednie równania w zagadnieniach sprężystych (s) i lepkosprężystych $(l-s)$ mają postać:

$$\mathring{\mathbf{A}}\mathbf{Y} + \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \mathbf{C} \quad \ldots (s) \ldots. \tag{14}$$

$$\mathbf{A}_{(l-s)} \ast \mathbf{Y} + \mathbf{B}_{(l-s)} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C}_{(l-s)} \ast H \ldots (l-s) \ldots. \tag{15}$$

Wtedy z porównania równań (14) i (15) wynika następujące:

Twierdzenie 1. Jeżeli elementy macierzy $\mathbf{P}_{(l-s)}$ i $\mathbf{C}_{(l-s)}$ są funkcjami ciągłymi klasy $\mathring{C}_{(0,\infty)}$ oraz $\mathbf{P}_{(l-s)} \equiv \mathbf{P}_{(s)}$, $\mathbf{C}_{(l-s)} = \dot{\mathbf{C}}_{(s)} \ast R + \mathbf{C}_{(s)}(0)R$, to stany naprężeń (przemieszczeń) w układach sprężystym i lepkosprężystym o tej samej konfiguracji są takie same.

Wprowadzimy teraz normę różnicy rozwiązań

$$\|\Delta\| = \|\mathbf{Y}_{(l-s)} - \mathbf{Y}_{(s)}\|, \tag{16}$$

która dla $\mathbf{A}_{(l-s)} = \mathring{\mathbf{A}}R(t)$ ma postać:

$$\|\mathbf{Y}_{(l-s)} - \mathbf{Y}_{(s)}\| = \|\mathring{\mathbf{A}}^{-1}\{R^{-1} \ast (\mathbf{C}_{(l-s)} - \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}}_{(l-s)}) + \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{(s)} - \mathbf{C}_{(s)}\}\|. \tag{17}$$

Twierdzenie 2. Rozwiązania w układach sprężystych i lepkosprężystych są identyczne, jeżeli zostanie spełniona równość

$$\mathbf{C}_{(s)} \ast R(t) - \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{(s)} \ast R(t) = \mathbf{C}_{(l-s)} - \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}}_{(l-s)}. \tag{18}$$

Dowód wynika z analizy normy $||\boldsymbol{\Delta}||$ różnicy rozwiązań

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{Y}_{(l-s)} - \mathbf{Y}_{(s)},$$

(19) $$(||\boldsymbol{\Delta}|| = 0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}), \text{ czyli}$$

$$R^{-1}(t) \ast (\mathbf{C}_{(l-s)} - \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}}_{(l-s)}) - \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{(s)} - \mathbf{C}_{(s)} = \mathbf{0}, \quad R^{-1}(t) \equiv \mathscr{L}^{-1}[\bar{R}(p)^{-1}],$$

a stąd już wynika natychmiast słuszność równości (18).

Problem 3. *Sprowadzenie zagadnień lepkosprężystych do sprężystych*

Pokażemy teraz, jak można ominąć rozwiązywanie równania macierzowego zagadnienia lepkosprężystego (8) zastępując go równaniem (14), jak w zagadnieniu sprężystym. Takie postawienie problematyki ma zasadnicze znaczenie dla inżyniera, gdyż zezwala na stosowanie w praktyce projektowej rozwiązań uwzględniających pełzanie ośrodka, bez układania i rozwiązywania równań w zakresie lepkosprężystym, które są trudniejsze w realizacji tak pod względem ilościowym, jak i jakościowym z uwagi na nowy aparat formalny nieznany na ogół konstruktorowi. Reasumując, podana zostanie metoda, która «w sposób sprężysty» znajdzie siły i przemieszczenia w układzie lepkosprężystym.

Twierdzenie 3. Jeżeli układy $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ znajdują się w tej samej konfiguracji oraz zachodzi następujący związek między macierzami $\mathbf{C}_{(l-s)}$, $\mathbf{C}_{(s)}$, $\mathbf{P}_{(l-s)}$, $\mathbf{P}_{(s)}$,

(20) $$R(t)^{-1} \ast (\mathbf{C}_{(l-s)} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}_{(l-s)}) = \mathbf{C}_{(s)} - \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{(s)},$$

to rozwiązania $\mathbf{Y}_{(l-s)}$, $\mathbf{Y}_{(s)}$ w układach $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ są identyczne.

Analiza równości (20) zezwala na zastępowanie wpływów lepkosprężystych sprężystymi, np. według relacji

(21) $$\mathbf{C}_{(s)} = R(t)^{-1} \ast \mathbf{C}_{(l-s)} \ast H(t), \qquad \mathbf{P}_{(s)} = \mathring{\mathbf{B}}^{-1} R(t)^{-1} \ast \mathbf{B} \ast \mathbf{P}_{(l-s)}.$$

Problem 4. *Grupowe właściwości równań statyki lepkosprężystych układów prętowych*

A. Rozpatrywać będziemy przekształcenia $\mathring{\varphi}$ macierzy wpływów zewnętrznych $(\mathbf{C}, \mathbf{P})$

(22) $$[\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}] \xrightarrow{\mathring{\varphi}} [\tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}}].$$

Przekształcenia postaci (22) wyznaczają ciągłą grupę $\mathscr{G}$ ($\mathring{\varphi} \in \mathscr{G}$) przekształceń macierzy $(\mathbf{C}, \mathbf{P})$ oraz generują przekształcenia

(23) $$\psi : \mathbf{Y} \to \tilde{\mathbf{Y}},$$

które wyznaczają izomorficzną z $\mathscr{G}$ grupę $\mathscr{H}$ ($\psi \in \mathscr{H}$). Należy znaleźć taką podgrupę $\overline{\mathscr{G}}$ grupy $\mathscr{G}$ ($\overline{\mathscr{G}} \subset \mathscr{G}$), aby odpowiadające przekształceniom φ ($\varphi \in \overline{\mathscr{G}}$) przekształcenia ψ były tożsamościowymi.

Jedną z takich podgrup grupy $\overline{\mathscr{G}}$ skonstruujemy wykorzystując właściwości macierzy ortogonalnych.

Twierdzenie 4. Jeżeli przekształcenie φ macierzy $(\mathbf{C}, \mathbf{P})$ jest postaci

$$
\begin{gathered}
\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P} \to \tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} \\
\mathbf{C}' \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}' = \mathbf{D} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}), \\
[\mathbf{D} \ast \mathbf{B} \ast \mathbf{P} - \mathbf{B} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C}'' \ast H = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}'']^{*}, \\
[\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{D} \ast \mathbf{C} - \mathbf{C}'', \quad \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}]^{*},
\end{gathered}
\tag{24}
$$

gdzie $\mathbf{D}$ jest dowolną macierzą ortogonalną, to przekształcenia ψ generowane przez φ są przekształceniami tożsamościowymi. Słuszność tego twierdzenia łatwo wykazać po wykonaniu transformacji Laplace'a na związku (24) i analizie otrzymanych macierzy.

Ogólniej warunek, że ψ jest przekształceniem tożsamościowym zapiszemy następująco

$$
\begin{gathered}
\|\tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{C} \ast H + \mathbf{B} \ast \mathbf{P}\| = 0, \\
[\mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{B} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C}' \ast H = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}'' H(t-a), \ \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}]^{*4)}, \quad a > 0.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Jeżeli natomiast $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$ są dowolnymi macierzami

$$
\tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{E} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}) + \mathbf{F},
\tag{26}
$$

to

$$
\|\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{E} \ast \mathbf{A} - \mathbf{I} H\| \to 0 \ \text{i} \ \|\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{F}\| \to 0.
$$

B. Zbadajmy teraz przekształcenia postaci

$$
u: t \to \alpha t, \qquad v: \mathbf{Y} \to \tilde{\mathbf{Y}},
\tag{27}
$$

na równości (11), które tak dobierzemy, aby $\tilde{\mathbf{Y}}$ było także rozwiązaniem równania (8). Mamy

$$
\begin{gathered}
\mathbf{Y}(t) = \mathring{\mathbf{A}}^{-1} R^{-1} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}), \\
\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \mathring{\mathbf{A}}^{-1} R^{-1} \ast \big(\mathbf{C}(\alpha t) \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}(\alpha t)\big).
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Jeżeli teraz $\mathbf{C}(\alpha t) = q(\alpha)\mathbf{C}(t)$ i $\mathbf{P}(\alpha t) = q(\tilde{\alpha})\mathbf{P}(t)$, to

$$
\mathbf{Y}(t) = q(\tilde{\alpha})^{-1} \mathbf{Y}(t).
\tag{29}
$$

Przedstawione tutaj właściwości grupowe równań statyki układów prętowych lepkosprężystych wykorzystamy przy analizie sposobów zabezpieczeń konstrukcji przed wpływem ruchów górotworu.

Z tego niekompletnego przeglądu podstawowych problemów lepkosprężystych układów prętowych wynikają dosyć jasno podobieństwa i różnice tych układów do sprężystych. W niektórych przypadkach to podobieństwo pozwala na natychmiastowe wyrokowanie o zachowaniu się konstrukcji lepkosprężystej.

Wydaje się również oczywiste, że przedstawione tu właściwości powinny być podane w postaci jasno sformułowanych twierdzeń o znacznej ogólności tak, by były przydatnymi w zastosowaniach.

---

4) Wyrażenia w nawiasach [ ]* są warunkami na niezmienność stanów naprężenia w $\mathcal{B}$, mimo że $\varphi \neq \mathbf{I}$. Wtedy równania (8) będziemy uważali za równania metody sił.

4. Wyznaczenie wpływu ruchów górotworu na konstrukcję

W tej części wykorzystamy ogólne rezultaty, uzyskane w części poprzedniej, do analizy stanu naprężeń i przemieszczeń konstrukcji od wpływu ruchów powierzchni górotworu. Mimo, że dla prostoty rozważania części poprzedniej są prowadzone w zakresie lepkosprężystym, to jednak można je przetransponować na odpowiadający im problem sprężysty (problem 3, rozdz. 3) i w takim zakresie praktycznie wykorzystać.

Podamy teraz odpowiedzi na zadanie postawione w zakończeniu części 2.

Ad.1.

Określenie stanu naprężenia i przemieszczenia w konstrukcji $\mathscr{B}$.

Ruch górotworu, wobec braku sprzężenia, określa jednoznacznie ruch podpór konstrukcji. Jak wiadomo, na stan naprężenia w konstrukcji mają wpływ tylko różnice przemieszczeń podpór. Różnice te wydzielić można z całego ruchu konstrukcji poprzez odrzucenie ruchu sztywnego. Powstaje pytanie jak dokonać tej operacji. Odpowiedź uzyskujemy w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 5. Równania (3) są niezmiennicze wobec dowolnego sztywnego ruchu, nie są natomiast niezmiennicze wobec zmian skali czasowej.

W zakresie sprężystym obowiązuje oczywiście niezmienniczość wobec ruchu sztywnego i zmiany skali czasowej. Twierdzenie 5 pozwala wyznaczyć przyrosty przemieszczeń podpór konstrukcji podobnie jak w zakresie sprężystym.

Stan naprężenia w konstrukcji określimy znając przyrosty ruchów podpór i obciążenia z równania (3) lub (8) interpretując je jako równanie metody sił, w którym $\mathbf{Y}$ jest macierzą nieznanych sił hiperstatycznych, $\mathbf{P}$ obciążeniem zewnętrznym a $\mathbf{C}$ przyrostami przemieszczeń podpór. Stan odkształcenia uzyskamy analogicznie, traktując równania (3), (8) jako równania metody przemieszczeń. Wtedy $\mathbf{Y}$ jest macierzą nieznanych przemieszczeń, $\mathbf{P}$ — to macierz znanych przemieszczeń, a $\mathbf{C}$ jest macierzą sił w węzłach. Rozwiązanie możemy uzyskać na «drodze sprężystej» wykorzystując zależności (21).

Ad.2.

Wyznaczenie dopuszczalnych ruchów konstrukcji $\mathscr{B}$.

a) Równanie (3) będziemy interpretować jako równanie metody sił. Wtedy rozwiązania $\mathbf{Y}$ możemy traktować jako sumę macierzy $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$, które są rozwiązaniami równań

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A} \ast \dot{\mathbf{Y}}_1 + \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{A} \dot{\ast} \mathbf{Y}_2 - \mathbf{C} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Pierwsza macierz $\mathbf{Y}_1$ sumy jest niezależna od ruchów górotworu, natomiast druga $\mathbf{Y}_2$ od nich zależy.

Ponadto stan naprężenia w konstrukcji zależy addytywnie od $\mathbf{Y}_1$ i $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Y}_2$ i $\mathbf{C}$ czyli ruchów górotworu. Istnieje zatem możliwość sformułowania warunku ograniczającego macierz $\mathbf{Y}_2$

$$
||\mathbf{K}_1 \mathbf{Y}_2|| \leqslant L^1_{\mathrm{dop}} \tag{31}
$$

oraz dla pewnych procesów deformacji ograniczenia na prędkości deformacji ($\dot{\mathbf{C}}$) i prędkości zmian stanu naprężenia

$$(32) \qquad ||\mathbf{K}_2\dot{\mathbf{Y}}_2|| \leqslant L^2_{\text{dop}}.$$

Ponadto zachodzą relacje

$$(33) \qquad \begin{aligned} ||\mathbf{K}_1\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{C} \ast H|| &\leqslant L^1_{\text{dop}}, \\ ||\mathbf{K}_2\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{C} \quad || &\leqslant L^2_{\text{dop}}. \end{aligned}$$

Z relacji tych można wyznaczyć dopuszczalną klasę ruchów podpór konstrukcji. W relacjach (31), (32) i (33) macierz $\mathbf{K}_{(v)1,2}\,\mathbf{Y}_2$ odpowiada wielkościom wewnętrznym w konstrukcji $\mathscr{B}$.

b) Założymy teraz, że możemy «przyspieszać» lub «opóźniać» pewien określony proces deformacji górotworu, który wywołuje ruchy podpór określone zmianami macierzy $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}(t) \to \mathbf{C}(\alpha t).$$

W tym przypadku wykorzystamy przekształcenia u, v [(równania (27, (28), (29)] do wyznaczenia granicznej wartości zmian parametru α określającego ruch górotworu. Uzyskujemy zależności

$$(34) \qquad \begin{aligned} &[||q(\tilde{\alpha})^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{Y}_2|| \leqslant L^1_{\text{dop}}] \Leftrightarrow \alpha_{1\text{gr}}, \\ &[||q(\tilde{\alpha})^{-1}\mathbf{K}_2\dot{\mathbf{Y}}_2|| \leqslant L^2_{\text{dop}}] \Leftrightarrow \alpha_{2\text{gr}}, \\ &\alpha_{\text{graniczne}} = \max\ [\alpha_{1\text{gr}}, \alpha_{2\text{gr}}], \end{aligned}$$

które pozwolą wyznaczyć dopuszczalne przemieszczenia podpór konstrukcji, określone darametrem α.

Podkreślimy tutaj fakt, że rozważań podobnych do przeprowadzonych wyżej (p. b) nie można przeprowadzić w zakresie sprężystym. W tym istotnym zagadnieniu podejście sprężyste jest zupełnie niemożliwe.

Ad.3.

Wyznaczenie ruchów górotworu, które nie zmieniają stanu naprężenia w konstrukcji $\mathscr{B}$.

W tym przypadku wykorzystamy wyniki zawarte w problemie 4, poprzedniej części. Jeżeli znowu równania (3) będą interpretowane jako równania metody sił, to twierdzenie 4 daje nam odpowiedź na pytanie: jaka musi być wzajemna współzależność ruchów górotworu i sił w konstrukcji, aby stan naprężenia pozostał bez zmian? Podobną odpowiedź uzyskamy wykorzystując równość (25).

Świadome ingerowanie w stan naprężeń konstrukcji możemy uzyskać np. przez jej wstępne sprężenie. Przy tym stan naprężeń powinien być tak zrealizowany, aby spełnić jeden z warunków (24), (25).

Reasumując można stwierdzić, że każdy ruch $\tilde{\mathbf{u}}$, który jest sumą ruchu sztywnego $\mathring{\mathbf{u}}$ i ruchu $\mathbf{u}'$ spełniającego warunki (24), (25), nie wpłynie na zmianę stanu naprężenia w konstrukcji. Stąd też należy wymagać, aby prawidłowe zabezpieczenie konstrukcji przed wpływami ruchów górotworu spełniało warunek

$$(35) \qquad ||\mathbf{u}_r - \tilde{\mathbf{u}}|| = \min\ (\tilde{\mathbf{u}} = \mathring{\mathbf{u}} + \mathbf{u}',\ \tilde{\mathbf{u}} \sim \mathbf{C}),$$

w którym $\mathbf{u}_r$ jest macierzą rzeczywistych ruchów.

Przedstawione propozycje sformułowania i rozwiązania tego ważnego zagadnienia teorii konstrukcji nie mogą pretendować do zupełności. Podjęta w pracy problematyka jest zupełnie nowa. W literaturze obejmującej szeroko pojęta zagadnienie brak podejścia podobnego do przedstawionego tutaj, tym bardziej, że już podstawy, czyli statyka układów lepkosprężystych, są oryginalne [6]. Konfrontacja z danymi doświadczalnymi może wprowadzić pewne zmiany, lecz wydaje się, iż zasadniczej struktury poruszanych w pracy problemów nie zmieni.

Literatura cytowana w tekście

1. D. R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
2. R. BELLMAN, Kl. COOKE, *Differential — Difference Equations*, Academic Press, New York 1963.
3. I. KISIEL, *Rozwój reologii w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia PTMTS*, Mech. Teor. i Stos., **6**, 3 (1968), 269–298.
4. J. KUBIK, *Metoda sil dla układów lepkosprężystych*, Rozpr. Inż., **18**, **4** (1970).
5. J. KUBIK, *Metoda przemieszczeń dla układów lepkosprężystych*, Rozpr. Inż., **19**, 1 (1971).
6. J. KUBIK, *Sprzężone zagadnienie w teorii konstrukcji współdziałającej z górotworem*, Arch. Górn. (w redakcji)
7. J. KUBIK, *Odpowiedniość między rozwiązaniami sprężystymi a lepkosprężystymi w statyce układów* prętowych, A.I.L. (w redakcji).
8. J. KWIATEK, *Obliczanie sil rozciągających fundamenty budowli na podłożu rozpełzającym*, Inż. i Bud., **24**, 6 (1967), 214–217.
9. J. KWIATEK, *Wpływ rozpełzania podłoża pod budowlami na jego krzywiznę*, Inż. i Bud, **24**, 9 (1967), 360–363.
10. J. KWIATEK, *Wpływ rozpełzania podłoża na siły rozciągające w fundamentach budowli*, Rozpr. dokt. GIG, Katowice 1965.
11. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
12. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1960.
13. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
14. T. TRAJDOS-WRÓBEL, *Matematyka dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1965.
15. L. COLLATZ, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin 1964.
16. М. Н. ГОЛЬДШТЕЙН, *Механические свойства грунтов*, Москва 1971.
17. А. Г. КУРОШ, *Теория групп*, Москва 1967.
18. А. А. ИЛЬЮШИН, Б. Е. ПОБЕДРЯ, *Основы математической теории термовязко-упругости*, Москва 1971.

Резюме

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕВЫХ СООРУЖЕНИЙ УСТАНОВЛЕННЫХ НА ГОРНЫХ МАССИВАХ

В работе формулируются основы статики вязкоупругих стержневых систем, установленных на деформирующемся горном массиве. Определяются основные типы задач и методы их решения. Особое внимание уделено анализу общих свойств матричных уравнений, описывающих эти задачи [уравнение (3)], а также вопросам взаимосвязи движений горного массива и сооружения. Рассматривается вопрос о нахождении для данной конструкции допустимых движений горного массива (задача 4). Задача решается путём использования группы преобразований, отражающих влияние скорости возрастания процессов деформации горного массива на напряженное состояние конструкции $\mathscr{B}$.

Summary

FOUNDATIONS OF THE THEORY OF ROD STRUCTURES BUILT IN MINING AREAS

In the paper are formulated the foundations of statics of viscoelastic rod systems founded on the ground deforming due to mining exploitation. The principal types of problems and methods of their solution are presented. Particular attention is paid to the analysis of general properties of the matrix equations of the problem (Eqs. 3) and to the problem of coupling of orogenic motions with the structure. Other problems considered concern the admissible motions of the foundation for a given structure (Problem 4). The problem is solved by introducing a group of transformations which take account of the influence of the increasing deformation rates of the rock foundation upon the state of stress within the structure.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca zostala zlożona w Redakcji dnia 29 marca 1972 r.