

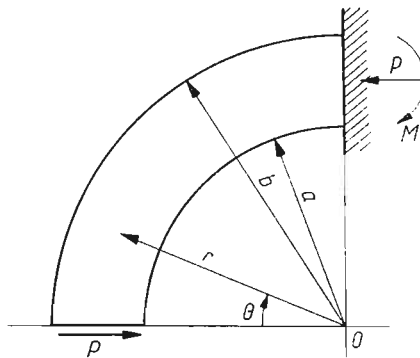
ZGINANIE PRĘTA SILNIE ZAKRZYWIONEGO Z UWZGLĘDNIENIEM NAPRĘŻEŃ MOMENTOWYCH

MARIAN PISZCZEK, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Od chwili opublikowania klasycznej już dzisiaj pracy MINDLINA [3], w której zwrócono uwagę na znaczenie teorii naprężeń momentowych w zagadnieniach koncentracji naprężeń, ukazało się wiele rezultatów ilustrujących efekty i zastosowania niesymetrycznej teorii sprężystości. Przeglądowa praca BARAŃSKIEGO, WILMAŃSKIEGO i WOŹNIAKA [1] cytuje 54 publikacje za okres do 1967 r.; od tego czasu liczba ta znacznie wzrosła.

Niezależnie od badań podstawowych, swoje odrębne metodologiczne i poznawcze znaczenie mają rozwiązania wybranych zadań, uogólniających rezultaty klasycznej teorii sprężystości. Praca niniejsza należy do takiej grupy opracowań. Rozważymy w niej płaski stan naprężenia silnie zakrzywionego kołowego pręta sprężystego obciążonego siłą skupioną (rys. 1) uwzględniając istnienie naprężeń momentowych. Pokażemy, że podobnie jak



Rys. 1

w przypadku klasycznym, również na gruncie niesymetrycznej teorii sprężystości zadanie ma ścisłe, zamknięte rozwiązanie. Zagadnienie rozpatrzmy w ramach ogólnej teorii z niezależnymi obrotami, stosując funkcję naprężeń i naprężeń momentowych AIRY'EGO-MINDLINA.

2. Sformułowanie i rozwiązanie problemu

Analiza płaskiego stanu naprężenia jakiegokolwiek zagadnienia brzegowego niesymetrycznej teorii sprężystości może być, jak wiadomo [4], sprowadzona do dyskusji dwóch funkcji naprężeń F i naprężeń momentowych Φ , które w dogodnym dla nas, biegunowym układzie współrzędnych $(Or\theta)$ winny spełniać równania

$$\Delta \Delta F = 0,$$

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial r} (1 - l^2 \Delta) \Phi = -A \frac{\partial}{r \partial \theta} \Delta F,$$

$$\frac{\partial}{r \partial \theta} (1 - l^2 \Delta) \Phi = A \frac{\partial}{\partial r} \Delta F,$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad l^2 = \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu\alpha},$$

$\alpha, \gamma, \varepsilon, \mu, \nu$ — stałe materiałowe; $A = \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu(1 + \nu)}$.

Funkcje $F(r, \theta)$ i $\Phi(r, \theta)$ określają naprężenia znanymi związkami

$$(2.2) \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2},$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

$$\mu_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \mu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Tutaj

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$ — zwyczajowe oznaczenia naprężeń normalnych i stycznych,
 μ_r, μ_θ — naprężenia momentowe.

Zgodnie z rys. 1 należy spełnić następujące warunki brzegowe:

$$(2.3) \quad \text{dla } r = a \quad \sigma_r(a, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0, \quad \mu_r(a, \theta) = 0;$$

$$(2.4) \quad \text{dla } r = b \quad \sigma_r(b, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(b, \theta) = 0, \quad \mu_r(b, \theta) = 0;$$

$$(2.5) \quad \text{dla } \theta = 0 \quad \int_a^b \tau_{\theta r} dr = -P, \quad \sigma_\theta(r, 0) = 0, \quad \mu_\theta(r, 0) = 0;$$

$$(2.6) \quad \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \int_a^b \sigma_\theta dr = P, \quad \tau_{\theta r}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \int_a^b (\mu_\theta + \sigma_\theta r) dr = 0.$$

Funkcji F i Φ poszukiwać będziemy w postaci

$$(2.7) \quad \begin{aligned} F(r, \theta) &= f(r) \sin \theta, \\ \Phi(r, \theta) &= \varphi(r) \cos \theta. \end{aligned}$$

Dzięki temu warunki (2.5)_{2,3} i (2.6)₂ spełnione są tożsamościowo.

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia funkcji $F(r, \theta)$ i $\varphi(r)$. Podstawienie (2.7)₁ do (2.1)₁ daje funkcję naprężeń w postaci identycznej, jak w przypadku klasycznym

$$(2.8) \quad F(r, \theta) = (A_1 r + A_2 r \ln r + A_3 r^{-1} + A_4 r^3) \sin \theta.$$

W dalszym ciągu rozpatrujemy związek (2.1)₂ oznaczając

$$(2.9) \quad (1 - l^2 \Delta) \Phi = \psi(r, \theta).$$

Uwzględniając (2.8) otrzymujemy

$$(2.10) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{A}{r} (2A_2 r^{-1} + 8A_4 r) \cos \theta,$$

a stąd

$$(2.11) \quad \psi(r, \theta) = (2AA_2 r^{-1} - 8AA_4 r + C) \cos \theta.$$

Łatwo sprawdzić, że taka postać funkcji $\psi(r, \theta)$ spełnia pozostałą relację (2.1)₃, gdy $C = 0$.

Wracając do (2.9) mamy

$$(2.12) \quad \Phi - l^2 \Delta \Phi = \frac{1}{r^2} (2AA_2 r - 8AA_4 r^3) \cos \theta,$$

a uwzględniając (2.7) otrzymujemy

$$(2.13) \quad \varphi - l^2 \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \frac{1}{r^2} \varphi \right) = \frac{1}{r^2} (2AA_2 r - 8AA_4 r^3).$$

Zajmiemy się najpierw całką szczególną (2.13). Oznaczając ją przez $\varphi_1(r)$ otrzymujemy

$$\varphi_1'' + \frac{1}{r} \varphi_1' - \varphi_1 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{l^2} \right) = -\frac{A}{l^2} (2A_2 r^{-1} - 8A_4 r).$$

Wprowadzając zmienną bezwymiarową $x = r/l$ otrzymujemy równanie

$$(2.14) \quad y'' + \frac{1}{x} y' - y \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = -2A(A_2 l^{-1} x^{-1} - 4A_4 l x)$$

gdzie oznaczono $y(x) = \varphi_1(lx)$.

Jest to niejednorodne równanie Bessela z urojonym argumentem. Należy ono do równań klasy Fuxsa, dlatego jego rozwiązanie szukać będziemy w postaci szeregu

$$(2.15) \quad y(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j x^j.$$

Podstawiając wyrażenie (2.15) do równania (2.14) i porządkując je względem potęg x , dochodzimy do wniosku, że wszystkie współczynniki C_j z wyjątkiem C_2, C_4 są równe zeru. W rezultacie rozwiązaniem (2.14) jest funkcja

$$y = 2AA_2 l^{-1} x^{-1} - 8AA_4 l x.$$

Po powrocie do zmiennej r otrzymujemy zatem poszukiwaną całkę szczególną

$$(2.16) \quad \varphi_1(r) = 2AA_2r^{-1} - 8AA_4r.$$

Całka ogólna równania jednorodnego (2.19) ma znaną postać

$$(2.17) \quad \varphi_0(r) = C_1I_1(r/l) + C_2K_1(r/l).$$

Tutaj $I_1(r/l)$, $K_1(r/l)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela odpowiednio I i II rodzaju i pierwszego rzędu. Zatem funkcja naprężeń momentowych $\Phi(r, \theta)$ przyjmie ostatecznie postać

$$(2.18) \quad \Phi(r, \theta) = [C_1I_1(r/l) + C_2K_1(r/l) + 2AA_2r^{-1} - 8AA_4r] \cos \theta.$$

Dysponując funkcjami (2.8) i (2.18) możemy obliczyć naprężenia i naprężenia momentowe ze związków (2.2). Otrzymujemy wtedy

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ A_2r^{-1} - 2r^{-3}(A_3 + 2AA_2) + 2A_4r + \frac{C_1}{2rl} [I_0(r/l) + \right. \\ &\quad \left. + I_2(r/l)] - \frac{C_2}{2rl} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] - \frac{C_1}{r^2} I_1(r/l) - \frac{C_2}{r^2} K_1(r/l) \right\} \sin \theta; \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ A_2r^{-1} + 2r^{-3}(A_3 + 2AA_2) + 6A_4r - \frac{C_1}{2rl} [I_0(r/l) + \right. \\ &\quad \left. + I_2(r/l)] + \frac{C_2}{2rl} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] + \frac{C_1}{r^2} I_1(r/l) + \frac{C_2}{r^2} K_1(r/l) \right\} \sin \theta; \\ \tau_{r0} &= \left\{ -A_2r^{-1} + 2(A_3 + 2AA_2)r^{-3} - 2A_4r - \frac{C_1}{2rl} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [I_0(r/l) + I_2(r/l)] + \frac{C_2}{2rl} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] + \frac{C_1}{r^2} I_1(r/l) + \frac{C_2}{r^2} K_1(r/l) \right\} \cos \theta; \\ \tau_{0r} &= \left\{ -A_2r^{-1} + 2(A_3 + 2AA_2)r^{-3} - 2A_4r + \frac{C_1}{4l^2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [I_{-1}(r/l) + 2I_1(r/l) + I_3(r/l)] + \frac{C_2}{4l^2} [K_{-1}(r/l) + 2K_1(r/l) + K_3(r/l)] \right\} \cos \theta; \\ \mu_\theta &= \left[-2AA_2r^{-2} + 8AA_4 - \frac{C_1}{r} I_1(r/l) - \frac{C_2}{r} K_1(r/l) \right] \sin \theta; \\ \mu_r &= \left\{ -2AA_2r^{-2} + 8AA_4 - \frac{C_1}{2l} [I_0(r/l) + I_2(r/l)] - \frac{C_2}{2l} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] \right\} \cos \theta. \end{aligned}$$

Tutaj I_{-1} , I_0 , I_2 , I_3 i K_{-1} , K_0 , K_2 , K_3 — zmodyfikowane funkcje Bessela I i II rodzaju, rzędu -1 , 0 , 2 , 3 .

Wzory (2.19) zawierają pięć nie określonych dotąd stałych A_2 , A_3 , A_4 , C_1 , C_2 . Wyznamy je z warunków brzegowych (2.3) — (2.6). Warunków tych jest w sumie 12. Trzy spośród nich, mianowicie (2.5)_{2,3} oraz (2.6)₂, jak to już wcześniej zaznaczyliśmy, spełnione są tożsamościowo dzięki postaci (2.7). Dwa następne, (2.6)₁ oraz (2.6)₃, spełnione są na mocy zewnętrznych warunków równowagi pręta. Ponadto zauważamy, że

wzory na δ_r i $\tau_{r\theta}$ w części zależnej jedynie od zmiennej r różnią się tylko znakiem — spełnienie warunków $(2.3)_1$ i $(2.4)_1$ pociąga za sobą równoczesne spełnienie $(2.3)_2$ i $(2.4)_2$. Spośród 12 warunków, niezależnych pozostaje tylko pięć — one też w zupełności wystarczają do jednoznacznego obliczenia brakujących pięciu stałych.

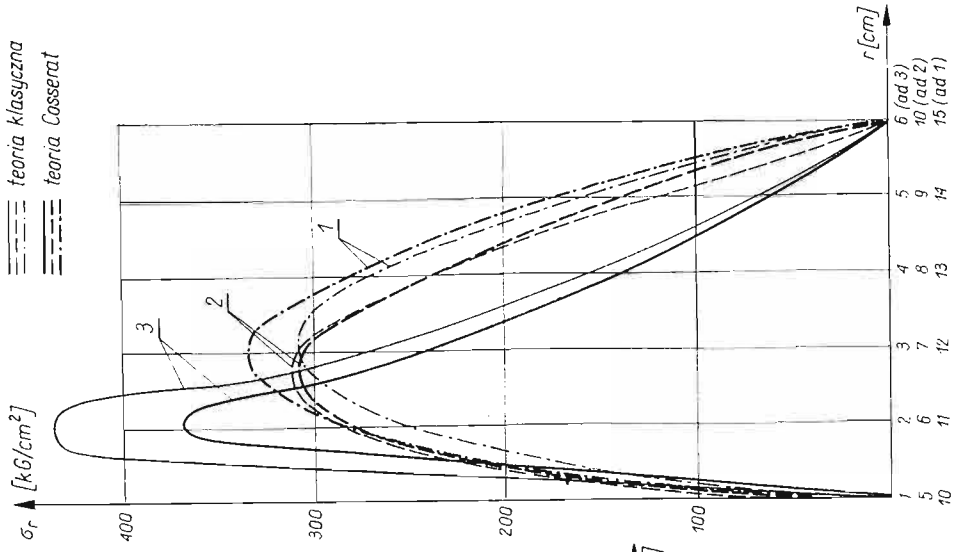
Uwzględniając kolejno warunki $(2.3)_1$, $(2.3)_3$, $(2.4)_1$, $(2.4)_3$ i $(2.5)_1$ otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}
 & A_2(a^{-1} - 4Aa^{-3}) + A_3(-2a^{-3}) + A_4 \cdot 2a + C_1 \left\{ -\frac{1}{2al} [I_0(a/l) + I_2(a/l)] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{a^2} I_1(a/l) \right\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2al} [K_0(a/l) + K_2(a/l)] - \frac{1}{a^2} K_1(a/l) \right\} = 0; \\
 & A_2(-2Aa^{-2}) + A_4(-8A) + C_1 \frac{1}{2l} [I_0(a/l) + I_2(a/l)] - \\
 & \quad - C_2 \frac{1}{2l} [K_0(a/l) + K_2(a/l)] = 0; \\
 (2.20) \quad & A_2(b^{-1} - 4Ab^{-3}) + A_3(-2b^{-3}) + A_4 \cdot 2b + C_1 \left\{ \frac{1}{2bl} [I_0(b/l) + I_2(b/l)] - \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{b^2} I_1(b/l) \right\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2bl} [K_0(b/l) + K_2(b/l)] - \frac{1}{b^2} K_1(b/l) \right\} = 0; \\
 & A_2(-2Ab^{-2}) + A_4(-8A) + C_1 \frac{1}{2l} [I_0(b/l) + I_2(b/l)] - \\
 & \quad - C_2 \frac{1}{2l} [K_0(b/l) + K_2(b/l)] = 0, \\
 & A_2[\ln b/a + 2A(b^{-2} - a^{-2})] + A_3(b^{-2} - a^{-2}) + A_4(b^2 - a^2) + \\
 & \quad + C_1 \frac{1}{2l} [I_0(a/l) + I_2(a/l) - I_0(b/l) - I_2(b/l)] + C_2 \frac{1}{2l} [K_0(b/l) + K_2(b/l) - \\
 & \quad - K_0(a/l) - K_2(a/l)] = P.
 \end{aligned}$$

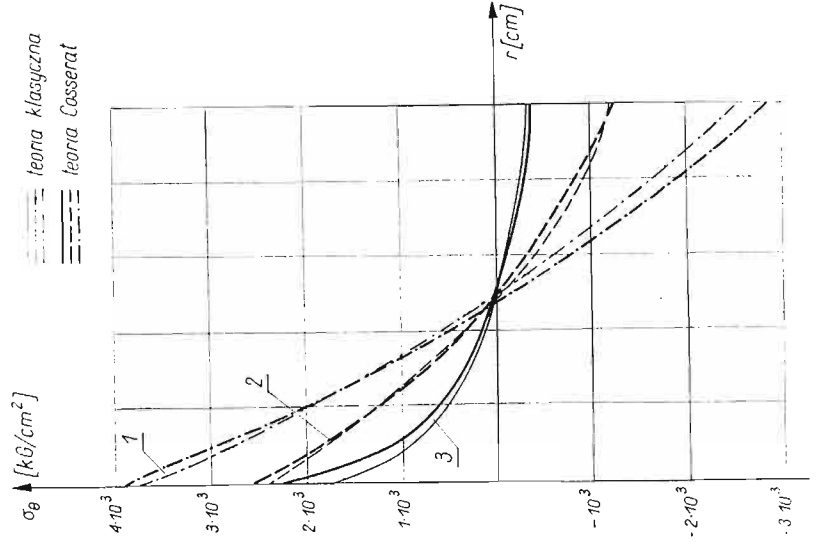
W ten sposób zadanie zostało w zasadzie rozwiązane. Na końcach pręta otrzymujemy rozkłady naprężeń i naprężeń momentowych ($\tau_{\theta r}$ dla $\theta = 0$ oraz τ_{θ} , μ_{θ} dla $\theta = \pi/2$) spełniające warunki brzegowe tylko w postaci całkowitej, a więc podobnie jak i w klasycznej teorii prętów. Nie będziemy rozwiązywali układu (2.20) w postaci ogólnej przechodząc od razu do przykładów liczbowych.

3. Przykłady liczbowe

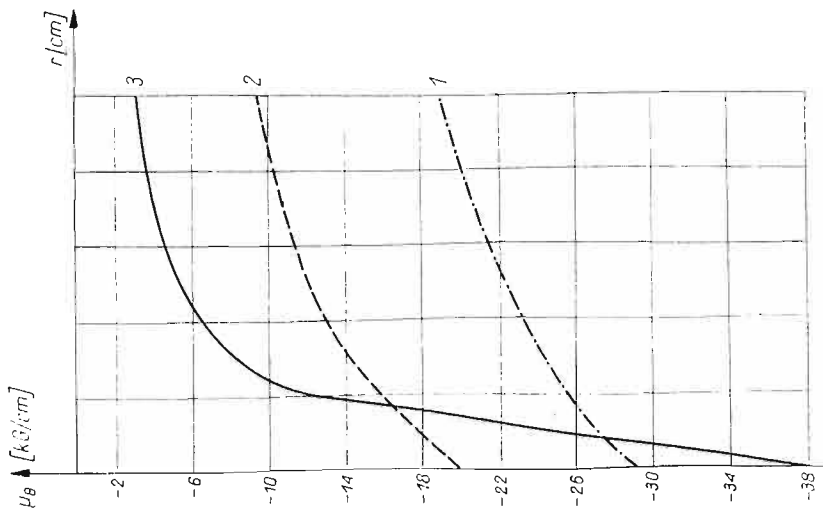
Dla ilościowego zobrazowania rozkładu naprężeń przeprowadzono obliczenia dla różnych wymiarów pręta. Z braku odpowiednich danych dotyczących stałych α , γ , ε (jak wiadomo, brak w tym zakresie odpowiedniego materiału doświadczalnego) przyjęto



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

stałą A tak jak dla ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami. Jest wówczas $A = 2l^2 / (1 + \nu)$, a wszystkie pozostałe wywody pozostają bez zmian.

Rozpatrzono trzy przykłady liczbowe dla następujących danych:

- 1) $a = 10$ cm, 2) $a = 5$ cm, 3) $a = 1$ cm,
 $b = 15$ cm; $b = 10$ cm; $b = 6$ cm.

We wszystkich przypadkach przyjęto $P = 1000$ kG, $l = 0,1$ cm, $\nu = 1/6$.

Na podstawie (2.20) otrzymano stałe, zestawione w tablicy 1.

Tablica 1

Przykład \ Stałe	A_2 [kG/cm]	A_3 [kG/cm]	A_4 [kG/cm]	C_1 [kG]	C_2 [kG]
1	523243	17817000	-817,07	$-0,723046 \cdot 10^{-63}$	$-0,141968 \cdot 10^{46}$
2	10740	107163	-42,9	$-0,205 \cdot 10^{-42}$	$-0,23349 \cdot 10^{23}$
3	1161	545,9	-15,6	$-0,179 \cdot 10^{-25}$	$-0,19019 \cdot 10^6$

Odpowiednie wykresy naprężeń i naprężeń momentowych dla przekroju $\theta = \pi/2$ wraz z odpowiednimi wartościami dla teorii klasycznej podają rys. 2, 3, 4.

Udział naprężeń momentowych w momencie całkowitym przekroju wynosi 0,92% w przykładzie 1, 0,86% w przykładzie 2 oraz 1,34% w przykładzie 3.

Literatura cytowana w tekście

1. W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, *Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosseratów*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1967).
2. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
3. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress concentrations*, Experimental Mechanics, 1 (1963).
4. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
5. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.

Резюме

ИЗГИБ СИЛЬНО ИСКРИВЛЕННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе дано решение задачи об изгибе сильно искривленного стержня с учетом влияния моментных напряжений. Применяется функция напряжений Эри-Миндлина. Задача решена в рамках общей теории со связанными вращениями. Дано точное и замкнутое решение задачи. Даны три численных примера для различных размеров стержня.

S u m m a r y

BENDING OF A STRONGLY CURVED BEAM WITH THE INFLUENCE OF COUPLE-STRESSES

In order to solve the problem outlined in the title, the Airy-Mindlin stress function is applied; the problem is solved within the general couple-stress theory with independent rotations. An exact, closed-form solution is derived. Numerical examples concerning various dimensions of the beam are presented. In absence of any information concerning the values of elastic constants in the Cosserat media considered in the paper, the corresponding values for the media with constrained rotations have to be used.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 sierpnia 1972 r.
