MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 11 (1973)

O UDERZENIU W UKŁADACH TYPU CZETAJEWA — PRZEBORSKIEGO

N. JA. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

W pracy [1] BOŁOTOW otrzymał uogólnioną formę zasady najmniejszego skrępowania dla układów z więzami holonomicznymi i anholonomicznymi pierwszego rzędu poddanych działaniu sił impulsowych.

W niniejszej pracy uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania rozszerza się na zjawisko udaru w układach typu Czetajewa-Przeborskiego.

1. W pracy BOŁOTOWA [1] uogólniona zasada najmniejszego skrępowania dla układu n punktów materialnych przy działaniu na nie sił impulsowych posiada postać

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\partial})^2 < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_{i\delta}-\dot{x}_{i\partial})^2, \tag{1.1}$$

gdzie $\dot{x}_{id}$, $\dot{x}_{i\partial}$, $\dot{x}_{i\delta}$ — rzuty prędkości punktów układu po udarze w ruchu rzeczywistym (d), częściowo zwolnionym z więzów (∂) i możliwym (δ).

Udar w układzie zachodzi albo pod wpływem działania zewnętrznych impulsów udarowych, lub pod wpływem nagłego nałożenia nowych więzów (holonomicznych lub anholonomicznych pierwszego rzędu) lub wskutek wspólnego działania obu tych czynników. Dowód prawdziwości związku (1.1) w pracy BOŁOTOWA [1] oparty jest na dwóch założeniach:

1. przemieszczenia możliwe danego układu zawarte są w zbiorze możliwych przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego z więzów,

2. istnieją możliwe przemieszczenia punktów układu, proporcjonalne do różnicy prędkości po udarze w ruchu rzeczywistym (d) i możliwym (δ).

Przy określeniu przemieszczeń możliwych według CZETAJEWA i PRZEBORSKIEGO, te dwa warunki są spełnione, a więc związek (1.1) będzie prawdziwy i dla układów z nieliniowymi więzami pierwszego rzędu.

Mamy układ n punktów materialnych μ_i z masami m_i. Zakładamy, że do udaru układ miał nałożone idealne, w ogólnym przypadku nieliniowe, anholonomiczne więzy pierwszego rzędu

$$f_j(t, x_i, z_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i,) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

(nie wyklucza się, że niektóre z tych więzów będą liniowe, anholonomiczne lub holonomiczne).

Udar spowodowany jest zewnętrznymi impulsami udarowymi $\bar{S}_i$ (A_i, B_i, C_i) i momentalnym nałożeniem nowych więzów, które zachowują się przy późniejszym ruchu układu. Wśród tych więzów są idealne holonomiczne jednostronne więzy

$$(1.3)\qquad \varphi_\nu(t, x_i, y_i, z_i) \geqslant 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

i idealnie anholonomiczne pierwszego rzędu w ogólnym przypadku nieliniowe, jednostronne więzy

$$(1.4)\qquad \psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \geqslant 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Przez ruch częściowo wyzwolony będziemy rozumieć ruch układu pod działaniem zewnętrznych impulsów udarowych $\bar{S}_i$ i przy nałożeniu nowych więzów (1.3), (1.4) jak w ruchu rzeczywistym, lecz pod warunkiem wstępnego wyzwolenia układu od dowolnej liczby więzów (1.2).

Zgodnie z zasadą D'Alemberta-Lagrange'a dla sił impulsowych mamy

$$(1.5)\qquad \sum_{i=1}^{n} [A_i m_i(\dot{x}_{id} - \dot{x}_{io})]\,\delta x_i + [B_i - m_i(\dot{y}_{id} - \dot{y}_{io})\,\delta y_i] + [C_i - m_i(\dot{z}_{id} - \dot{z}_{io})]\dot{z}_i,$$

gdzie $\dot{x}_{io}, \dot{y}_{io}, \dot{z}_{io}$ — rzuty prędkości punktów układu do udaru,
$\dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id}$ — rzuty prędkości rzeczywistych punktów układu po udarze,
$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ — rzuty możliwych przemieszczeń punktów układu poczas udaru.

Możliwe przemieszczenia rozpatrywanego układu według Czetajewa [2] i Przeborskiego [3] określone są związkami

$$(1.6)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i}\,\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i}\,\delta z_i\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(1.7)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(1.8)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{x}_i}\,\delta x_i + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{y}_i}\,\delta y_i + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{z}_i}\,\partial z_i\right) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Dla ruchu częściowo wyzwolonego zasada D'Alemberta-Langrange'a przyjmie postać:

$$(1.9)\qquad \sum_{i=1}^{n} [A_i - m_i(\dot{x}_{i\partial} - \dot{x}_{io}]\,\partial x_i + [B_i - m_i(\dot{y}_{i\partial} - y_{io})]\,\partial y_i + [C_i - m_i(z_{i\partial} - z_{io})]\,\partial z_i,$$

gdzie $\dot{x}_{i\partial}$, $y_{i\partial}$, $\dot{z}_{i\partial}$ — rzuty prędkości punktów układu po udarze w ruchu częściowo wyzwolonym, ∂x_i, ∂y_i, ∂z_i — rzuty przemieszczeń możliwych punktów układu częściowo wyzwolonego.

Ponieważ dla układów typu Czetajewa–Przeborskiego możliwe przemieszczenia danego układu znajduje się wśród możliwych przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego, to równanie (1.9) przyjmie postać

$$(1.10)\qquad \sum_{i=1}^{n} [A_i - m_i(\dot{x}_{i\partial} - \dot{x}_{io})\,\delta x_i + [B_i - m_i(\dot{y}_{i\partial} - y_{io})]\,\delta y_i + [C_i - m_i(\dot{z}_{i\partial} - \dot{z}_{io})]\,\delta z = 0.$$

Odejmując równanie (1.10) od równania (1.5) otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i[(\dot{x}_{i\partial}-\dot{x}_{id})\,\delta x_i+(\dot{y}_{i\partial}-\dot{y}_{id})\,\delta y_i+(\dot{z}_{i\partial}-\dot{z}_{id})\,\delta z_i] = 0. \tag{1.11}$$

Udowodnimy, że istnieją możliwe przemieszczenia układu podczas udaru, proporcjonalne do różnicy prędkości punktów układu w ruchu rzeczywistym i możliwym.

Zapiszemy warunki, które spełniają prędkości punktów układu po udarze w ruchu rzeczywistym i możliwym. Jeśli w ruchu rzeczywistym układu w końcu udaru słabnie jakikolwiek z więzów (1.3), to wielkość

$$\beta_\nu = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i}\dot{x}_{id}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_i}\dot{y}_{id}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z_i}\dot{z}_{id}\right), \tag{1.12}$$

którą BOLOTOW [1] nazywa prędkością osłabiania więzów, nie może być ujemną [4]: $\beta_\nu \geqslant 0$.

Jeśli słabnie w końcu udaru jakikolwiek z więzów (1.4), to prędkości w chwili, kiedy układ odrzuca więź, spełniają warunek [4]

$$\psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id}) = 0. \tag{1.13}$$

Będziemy rozpatrywać tylko takie możliwe ruchy, w których prędkości osłabiania więzów (1.3) będą równe takim samym prędkościom w ruchu rzeczywistym. Dla takich ruchów możliwych prędkości spełniają następujące warunki:

$$\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i}\dot{x}_{i\delta}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_i}\dot{y}_{i\delta}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z_i}\dot{z}_{i\delta}\right) = \beta_\nu, \tag{1.14}$$

$$\psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{i\delta}, \dot{y}_{i\delta}, \dot{z}_{i\delta}) = 0. \tag{1.15}$$

Odejmując odpowiednie związki (1.14) i (1.15) od związków (1.12) i (1.13) otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i}(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta})+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_i}(\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\delta})+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial z_i}(\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\delta}) = 0, \tag{1.16}$$

$$\psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id})-\psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{i\delta}, \dot{y}_{i\delta}, \dot{z}_{i\delta}) = 0. \tag{1.17}$$

Rozkładając funkcję $\psi_\lambda(t, x_i y_i z_i \dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id})$ na różnice $\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta}$; $\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\delta}$, $\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\delta}$, i ograniczając się do członów pierwszego rzędu odnośnie tych różnic — z równości (1.17) otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\dot{x}_i}(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta})+\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\dot{y}_i}(\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\delta})+\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\dot{z}_i}(\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\delta}) = 0. \tag{1.18}$$

Jeśli chodzi o więzy dwustronne (1.2), które były nałożone na układ do udaru i które pozostają w czasie udaru, to dla nich widocznie spełnia się warunek

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial\dot{x}_i}(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta})+\frac{\partial f_i}{\partial\dot{y}_i}(\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\delta})+\frac{\partial f_i}{\partial\dot{z}_i}(\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\delta}) = 0. \tag{1.19}$$

Porównując warunki (1.16) z warunkami (1.7), warunki (1.18) z warunkami (1.8), warunki (1.19) z warunkami (1.6) wnioskujemy, że

(1.20) $$\delta x_i = k(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta}), \quad \delta y_i = k(\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\delta}), \quad \delta z_i = k(\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\delta})$$

(k — dowolny współczynnik dodatni), co oznacza istnienie możliwych przemieszczeń podczas udaru, proporcjonalnych do różnic prędkości punktów układu po udarze w ruchu rzeczywistym i możliwym.

Na podstawie związku (1.20) równanie (1.11) zapiszemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^{m_i} m_i[(\dot{x}_{i\partial}-\dot{x}_{id})(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta})+(\dot{y}_{i\partial}-\dot{y}_{id})(\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\delta})+(\dot{z}_{i\partial}-\dot{z}_{id})(\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\delta})] = 0.$$

Skąd otrzymamy

(1.21) $$T_{d\partial} = T_{\delta\partial}-T_{\delta d},$$

gdzie $T_{d\partial} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i[(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\partial})^2+(\dot{y}_{id}-\dot{y}_{i\partial})^2+(\dot{z}_{id}-\dot{z}_{i\partial})^2]$ odchylenie ruchu rzeczywistego układu po udarze od ruchu częściowo wyzwolonego.

$T_{\delta\partial}$ i $T_{\delta d}$ — określa się analogicznie. Ze związku (1.21) wynikają dwie nierówności

(1.22) $$T_{d\partial} < T_{\delta\partial},$$

(1.23) $$T_{\delta d} < T_{\delta\partial},$$

z których pierwsza wyraża uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania, a druga — twierdzenie CZETAJEWA [2] dla udaru.

2. Na podstawie nierówności (1.22) i (1.23) można otrzymać związek między energiami kinetycznymi w (d), (δ) i (∂) — ruchach po udarze.

Dodając nierówności (1.22) i (1.23), podstawiając otrzymane nierówności do wzorów na $T_{d\delta}$, $T_{d\partial}$, $T_{\delta\partial}$ — otrzymamy

(2.1) $$\sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta})^2+\sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\partial})^2 < 2\sum_{i=1}^{3n} m_i(x_{i\delta}-x_{i\partial})^2.$$

Wprowadzając energię kinetyczną dla ruchu rzeczywistego możliwego i wyzwolonego i oznaczając je odpowiednio T_d, T_δ, T_∂, nierówność (2.1) zapiszemy w postaci

(2.2) $$T_d < \frac{T_\delta+T_\partial}{2}+\frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_{i\partial}(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\delta})+\sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_{i\delta}(\dot{x}_{id}-\dot{x}_{i\partial})\Big].$$

Sumy w nawiasach kwadratowych w ostatniej nierówności mają określony sens mechaniczny.

Rozpatrzymy pierwszą sumę. Wchodzące w nią różnice można uważać za przemieszczenia możliwe. Wówczas suma ta będzie miała postać

(2.3) $$\sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_{i\partial}\delta_{xi}.$$

Zgodnie z równaniami teorii udaru

$$m_i \dot{x}_{i\partial} = A_i + R^{\partial}_{ix} + m_i \dot{x}_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{2.4}$$

gdzie $\dot{x}_{i0}$ — rzuty prędkości punktów układu do udaru, a R^{∂}_{ix} — rzut impulsów sił reakcji układu częściowo wyzwolonego. Dlatego sumę (2.3) można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\partial} \delta_{xi} = \sum_{i=1}^{3n} (A_i + R^{\partial}_{ix}) \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i0} \delta_{xi}. \tag{2.5}$$

Ponieważ więzy są idealne, a możliwe przemieszczenia danego układu mieszczą się wśród możliwych przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego

$$\sum_{i=1}^{3n} R^{\partial}_{ix} \delta_{xi} = 0,$$

to równanie (2.5) przyjmie postać

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\partial} \delta_{xi} = \sum_{i=1}^{3n} A_i \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i0} \delta_{xi}. \tag{2.6}$$

Rozważymy drugą sumę, wchodzącą w skład nierówności (2.2)

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\partial}).$$

Z równań teorii udaru mamy

$$m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\partial}) = R^{(d-\partial)}_{ix}, \tag{2.7}$$

gdzie $R^{(d-\partial)}_{ix}$ — rzuty impulsów reakcji więzów odrzuconych przy częściowym wyzwoleniu układu. Biorąc pod uwagę związki (2.6) i (2.7), nierówność (2.2) przedstawimy w postaci

$$T_d < \frac{T_\delta + T_\partial}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{3n} A_i \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i0} \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_{i\partial} R^{(d-\partial)}_{ix} \right]. \tag{2.8}$$

Jeśli do udaru prędkości punktów układu były równe zeru, to powyższa nierówność przyjmie postać

$$T_d < \frac{T_\delta + T_\partial}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{3n} A_i \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} \dot{x}_{i\delta} R^{(d-\partial)}_{ix} \right]; \tag{2.9}$$

to znaczy, że energia kinetyczna układu po udarze jest mniejsza od połowy sumy energii kinetycznych ruchu wyzwolonego i możliwego, zwiększonych o połowę sumy pracy wirtualnej zewnętrznych impulsów udarowych i pracy impulsów sił reakcji więzów odrzuconych, wykonanej na prędkościach ruchu możliwego.

Kiedy udar w układzie występuje tylko wskutek nałożenia nowych więzów, to ze związku (2.9) otrzymamy

$$T_d < \frac{T_\delta + T_\partial}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} \dot{x}_{i\delta} R^{(d-\partial)}_{ix}. \tag{2.10}$$

Jeśli ograniczymy się tylko do takich możliwych ruchów, w których prędkości są ortogonalne do impulsów sił reakcji więzów odrzuconych, to z nierówności (2.10) otrzymamy

$$T_d < \frac{T_\delta + T_\partial}{2}, \tag{2.11}$$

to znaczy, że jeżeli udar w układzie punktów materialnych znajdujących się w bezruchu następuje wskutek nałożenia nowych więzów, to energia kinetyczna ruchu rzeczywistego układu po udarze jest mniejsza od połowy sumy energii kinetycznych ruchu częściowo wyzwolonego i takiego ruchu możliwego, w którym prędkości punktów są ortogonalne do impulsów odrzuconych reakcji więzów przy wyzwoleniu układu.

3. W pracy [2] Czetajew wyprowadził twierdzenie: *odchylenie ruchu rzeczywistego układu z więzami idealnymi (w przypadku ogólnym nieliniowymi anholonomicznymi) od jakiegokolwiek ruchu możliwego jest mniejsze niż odchylenie tego ostatniego od ruchu częściowo wyzwolonego.*

Dla udaru twierdzenie Czetajewa przyjmuje postać nierówności (1.23), które zapisujemy następująco:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_{id} - \dot{x}_\delta)^2 < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_{i\partial} - \dot{x}_{i\delta})^2, \tag{3.1}$$

gdzie $\dot{x}_{id}$, $\dot{x}_{i\partial}$, $\dot{x}_{i\delta}$ — prędkości punktów układu po udarze w (d), (∂) i (δ) — ruchach, lub

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \dot{x}_{id}^2}{2} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \dot{x}_{i\partial}^2}{2} < \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_\delta (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\partial}). \tag{3.2}$$

Ta ostatnia nierówność na podstawie związku (2.7) będzie sprowadzona do postaci

$$T_d - T_\partial < \sum_{i=1}^{3n} \dot{x}_{i\delta} R_{ix}^{(d-\partial)}, \tag{3.3}$$

gdzie $R_{ix}^{(d-\partial)}$ — impulsy sił reakcji więzów odrzucanych przy częściowym oswobodzeniu układu.

Jeżeli prędkości ruchu możliwego po udarze są ortogonalne do impulsów sił reakcji więzów odrzucanych przy częściowym oswobodzeniu układu, to biorąc pod uwagę nierówność (3.3)

$$T_d < T_\partial;$$

widzimy, że energia kinetyczna ruchu rzeczywistego po udarze jest mniejsza od energii kinetycznej ruchu częściowo wyzwolonego.

Literatura cytowana w tekście

1. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Изв. физ.-мат. Об-ва при Казанском университете, 1916, т. 21, в. 3.
2. Н. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат. Об-ва при Казанском университете, 1932—33, сер. 3, 6.

3. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der relatiwistichen Dynamik*, Math. Zeitschrift., Bd. 36, Berlin 1933, s. 184—194.
4. Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, Гостехиздат, 1944, стр. 281.

POLITECHNIKA, WOŁGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.