

## MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU ZGINANEJ PŁYTY TRÓJWARSTWOWEJ

HENRYK MIKOŁAJCZAK, BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

### 1. Uwagi wstępne

Płyty trójwarstwowe, z uwagi na swoje zalety, znajdują coraz szersze zastosowanie także w konstrukcjach inżynierskich. Obliczenia statyczne tych płyt, pomimo różnych założeń upraszczających, wymagają dużego nakładu pracy rachunkowej. Stosunkowo prosty model oparty na założeniach HOFFA [1] prowadzi do układu trzech równań różniczkowych cząstkowych (2.1) lub równoważnego im jednego równania rzędu ósmego. Praktyczne wyniki, poza nielicznymi wyjątkami, uzyskać można tylko na drodze obliczeń numerycznych.

Uniwersalną metodą, doskonale przystosowaną do elektronicznej techniki obliczeniowej, jest metoda elementów skończonych szczegółowo opracowana w literaturze [2], [3], [4], [5], [6]. Jej kluczowym problemem jest znajomość macierzy sztywności pozwalająca na ułożenie ogólnego programu obliczeń na drodze standardowego postępowania.

W pracy poniższej przedstawiono ogólną postać macierzy sztywności dla rozważanego zagadnienia, uzyskując ją na dwóch różnych drogach: albo korzystając z metody ortogonalizacyjnej zastosowanej uprzednio do zagadnienia płaskiego [7], albo z warunku na minimum energii potencjalnej odkształcenia sprężystego.

Na zakończenie przedstawiono pewne wyniki liczbowe, przyjmując podział płyty na elementy prostokątne o pięciu stopniach swobody w każdym węzle.

### 2. Podstawowe założenia i zależności

Rozważaniami objęto płytę trójwarstwową symetryczną względem płaszczyzny środkowej (rys. 1), o warstwach zewnętrznych spełniających założenia teorii płyt cienkich i teorii tarcz i o warstwie środkowej stałej grubości, nieodkształcalnej w kierunku pionowym (założenia HOFFA) [1].

Zagadnienie można opisać przez trzy funkcje przemieszczeń:

$u(x, y)$  — przemieszczenie w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej w kierunku osi  $x$ ,

$v(x, y)$  — przemieszczenie w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej w kierunku osi  $y$ ,

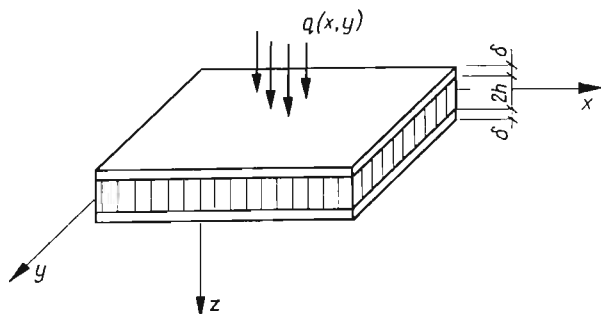
$w(x, y)$  — ugięcie pionowe płyty jednakowe dla wszystkich warstw.

Równania równowagi zagadnienia mają postać [8], [9]:

$$(2.1) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-\nu^2)G_w}{E\delta h} \right] u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu^2)G_w}{E\delta h} \right] v - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$(2.3) \quad - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial v}{\partial y} + \left[ D \frac{1-\nu^2}{2E\delta} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)^2}{4E\delta h} \right] w = \frac{q(1-\nu^2)}{2E\delta}.$$



Rys. 1

**Oznaczenia:**

- $E$  — moduł Younga,
- $\nu$  — liczba Poissona,
- $G_w$  — moduł ścinania dla warstwy środkowej,
- $\delta$  — grubość płytek zewnętrznych,
- $2h$  — grubość warstwy środkowej,
- $q$  — obciążenie prostopadłe do powierzchni płyty,
- $D$  — sztywność giętą płytek zewnętrznych.

Równania (2.1) i naturalne warunki brzegowe można otrzymać z funkcjonału energii potencjalnej odkształcenia sprężystego, który ma postać [10]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_A \int \left\{ 2D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 2hG_w \left[ \frac{u^2}{h^2} + 2\frac{u}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{v^2}{h^2} + 2\frac{v}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Big\} dx dy - \int_A \int q w dx dy. \end{aligned}$$

Wielkości statyczne dla tego typu płyt trójwarstwowych dane są przez poniższe wyrażenia różniczkowe.

Wypadkowe siły tarczowe w płytkach zewnętrznych:

$$(2.5) \quad N_x = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$(2.6) \quad N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$(2.7) \quad N_{xy} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Naprężenia styczne w warstwie środkowej ( $\tau_{xz}^w$ ,  $\tau_{yz}^w$ ) i wypadkowe siły tnące ( $N_{xz}$ ,  $N_{yz}$ ):

$$(2.8) \quad N_{xz} = (2h + \delta) \tau_{xz}^w = G_w(2h + \delta) \left( \frac{u}{h} + \frac{2h + \delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$(2.9) \quad N_{yz} = (2h + \delta) \tau_{yz}^w = G_w(2h + \delta) \left( \frac{v}{h} + \frac{2h + \delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Wielkości płytowe (momenty  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  i siły poprzeczne  $q_x$ ,  $q_y$ ) określone zgodnie z teorią płyt cienkich izotropowych

$$(2.10) \quad m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$(2.11) \quad m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$(2.12) \quad m_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$(2.13) \quad q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w),$$

$$(2.14) \quad q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w).$$

Do dalszych rozważań obszar  $A$  płyty trójwarstwowej podzielono na podobszary  $A^k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ). Podobszary te nazywa się elementami skończonymi. Przemieszczenia w  $k$ -tym elemencie  $u^k$ ,  $v^k$ ,  $w^k$  aproksymować będziemy poniższymi wyrażeniami macierzowymi

$$(2.15) \quad u^k = [\Phi^k] \{U^k\} = [\Phi_1^k \Phi_2^k \dots \Phi_n^k] \begin{Bmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ \vdots \\ U_n^k \end{Bmatrix},$$

$$(2.16) \quad v^k = [\Psi^k] \{V^k\} = [\Psi_1^k \Psi_2^k \dots \Psi_n^k] \begin{Bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ V_n^k \end{Bmatrix},$$

$$(2.17) \quad w^k = [Q^k] \{W^k\} = [\Omega_1^k \Omega_2^k \dots \Omega_m^k] \begin{Bmatrix} W_1^k \\ W_2^k \\ \vdots \\ W_m^k \end{Bmatrix}.$$

W wyrażeniach (2.15) ÷ (2.17)  $U_i^k, V_i^k, W_j^k$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ ) oznaczają odpowiednio  $n$  parametrów związanych z przemieszczeniem w kierunku osi  $x$  w  $k$ -tym elemencie,  $n$  parametrów związanych z przemieszczeniem w kierunku osi  $y$ , oraz  $m$  parametrów związanych z ugięciem płyty.

Wyrażenia te mogą oznaczać np. wartość funkcji przemieszczeń w wyróżnionych punktach elementu (w węzłach), wartość pochodnych funkcji przemieszczeń w tych punktach itp.

Funkcje  $\Phi_i^k = \Phi_i^k(x, y)$ ,  $\Psi_i^k = \Psi_i^k(x, y)$ ,  $\Omega_j^k = \Omega_j^k(x, y)$  określają w jaki sposób przemieszczenia w  $k$ -tym elemencie zależą od współrzędnych  $x, y$  i parametrów węzłowych  $U_i^k, V_i^k, W_j^k$ . Funkcje te nazywane są funkcjami kształtu. Sposoby tworzenia funkcji kształtu oraz warunki jakim muszą odpowiadać znaleźć można np. w pracach ZIENKIEWICZA [4], KOLARA i innych [6].

### 3. Metoda ortogonalizacyjna

Rozważmy  $k$ -ty element wyodrębniony ze zginanej płyty trójwarstwowej. Na podstawie (2.15) ÷ (2.17) i (2.1) ÷ (2.3) po pewnych przekształceniach otrzymamy równania równowagi w postaci

$$(3.1) \quad \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \right] \{U^k\} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} \right) + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left( \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} \right] \{U^k\} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} \right) - G_w \left( \frac{1}{h} [\Phi^k] \{U^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} \right) = \\ = f_1(x, y, U_1^k, \dots, U_n^k, V_1^k, \dots, V_n^k, W_1^k, \dots, W_m^k),$$

$$(3.2) \quad \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial y^2} \right] \{V^k\} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x \partial y} \right] \{U^k\} \right) + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left( \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x \partial y} \right] \{U^k\} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x^2} \right] \{V^k\} \right) - G_w \left( \frac{1}{h} [\Psi^k] \{V^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \{W^k\} \right) = \\ = f_2(x, y, U_1^k, \dots, U_n^k, V_1^k, \dots, V_n^k, W_1^k, \dots, W_m^k)$$

$$(3.3) \quad \frac{2D}{(2h+\delta)} \left( \left[ \frac{\partial^4 \Omega^k}{\partial x^4} \right] \{W^k\} + 2 \left[ \frac{\partial^4 \Omega^k}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \{W^k\} + \left[ \frac{\partial^4 \Omega^k}{\partial y^4} \right] \{W^k\} + \right. \\ \left. - G_w \left( \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] \{W^k\} \right) - G_w \left( \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2h+\delta}{2h} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] \{W^k\} \right) - q = f_3(x, y, U_1^k, \dots, U_n^k, V_1^k, \dots, V_n^k, W_1^k, \dots, W_m^k).$$

Wielkości statyczne w  $k$ -tym elemencie jako funkcje parametrów węzłowych mają postać

$$(3.4) \quad N_x^k = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} + \nu \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} \right),$$

$$(3.5) \quad N_y^k = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} + \nu \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} \right),$$

$$(3.6) \quad N_{xy}^k = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left( \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \{U^k\} + \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \{V^k\} \right),$$

$$(3.7) \quad N_{xz}^k = G_w(2h+\delta) \left( \frac{1}{h} [\Phi^k] \{U^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} \right),$$

$$(3.8) \quad N_{yz}^k = G_w(2h+\delta) \left( \frac{1}{h} [\Psi^k] \{V^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \{W^k\} \right),$$

$$(3.9) \quad m_x^k = -D \left( \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] + \nu \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] \right) \{W^k\},$$

$$(3.10) \quad m_y^k = -D \left( \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] + \nu \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] \right) \{W^k\},$$

$$(3.11) \quad m_{xy}^k = -(1-\nu) D \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x \partial y} \right] \{W^k\},$$

$$(3.12) \quad q_x^k = -D \left( \left[ \frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial x^3} \right] + \left[ \frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial x \partial y^2} \right] \right) \{W^k\},$$

$$(3.13) \quad q_y^k = -D \left( \left[ \frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial x^2 \partial y} \right] + \left[ \frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial y^3} \right] \right) \{W^k\}.$$

Wyrażenia (3.1)÷(3.3) nie są tożsamościowo równe zero, gdyż funkcje przemieszczeń  $u^k$ ,  $v^k$ ,  $w^k$ , są funkcjami przybliżonymi. Dokładność tak przyjętej aproksymacji równań (2.1)÷(2.3) zależy od dokładności opisu rzeczywistych przemieszczeń w elemencie przez wyrażenia (2.15)÷(2.17). Funkcje  $f_1, f_2, f_3$  oznaczają błąd aproksymacji. W naszym przypadku błąd ten zminimalizujemy przez ortogonalizację funkcji  $f_1, f_2, f_3$  z układem funkcji  $\Phi_i^k, \Psi_i^k, \Omega_j^k$  (metoda Galerkina [7]). Sposób ten prowadzi tutaj do układu  $(2n+m)$  algebraicznych równań liniowych. Macierz współczynników przy niewiadomych jest poszukiwaną macierzą sztywności elementu.

Zastosujemy do równań (3.1)÷(3.3) metodę Galerkina w postaci

$$(3.14) \quad \iint_{A^k} \Phi_i^k f_1 dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3.15) \quad \iint_{A^k} \Psi_i^k f_2 dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3.16) \quad \iint_{A^k} \Omega_j^k f_3 dx dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Całkowanie w powyższych wzorach rozciąga się na obszar elementu  $A^k$ . Funkcje  $\Phi_i^k, \Psi_i^k, \Omega_j^k$  są funkcjami kształtu z zależności (2.15)÷(2.17).

Wykonajmy działania opisane zależnościami (3.14)÷(3.16). Dla (3.14) otrzymamy (dla  $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} & \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \right] \{U^k\} dx dy + \nu \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} dx dy \right) + \\ & + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left( \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} \right] \{U^k\} dx dy + \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} dx dy \right) + \\ & - G_w \left( \frac{1}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k [\Phi^k] \{U^k\} dx dy + \frac{2h+\delta}{2h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} dx dy \right) = 0. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu do powyższych całek przekształcenia Greena według wzorów

$$\begin{aligned} (3.17) \quad \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \right] \{U^k\} dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} \cos \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} dx dy &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} \cos \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} dx dy = \\ (3.18) \quad &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \{V^k\} \sin \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.19) \quad \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} \right] \{U^k\} dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \{U^k\} \sin \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \{U^k\} dx dy \end{aligned}$$

(gdzie  $\Gamma_{\square}^k$  oznacza brzeg elementu,  $\alpha$  jest kątem między normalną zewnętrzną a osią  $x$ ) otrzymamy ostatecznie pierwsze  $n$  równań w postaci

$$\begin{aligned} (3.20) \quad 2 \iint_{A^k} \left( \frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] + \frac{G_w}{h} \Phi_i^k [\Phi^k] \right) \{U^k\} dx dy + \\ + 2 \iint_{A^k} \left( \frac{E\delta\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \right) \{V^k\} dx dy + \\ + G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} dx dy = 2 \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k (N_x^k \cos \alpha + N_{xz}^k \sin \alpha) ds, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Postępując analogicznie otrzymamy dla (3.15) i (3.16) pozostałe równania układu,

$$(3.21) \quad 2 \iint_{A^k} \left( \frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] + \frac{G_w}{h} \Psi_i^k [\Psi^k] \right) \{V^k\} dx dy +$$

$$+ 2 \iint_{A^k} \left( \frac{E\delta\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \right) \{U^k\} dx dy +$$

$$+ G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \Psi_i^k \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \{W^k\} dx dy = 2 \int_{r^k} \Psi_i^k (N_y^k \sin \alpha + N_x^k \cos \alpha) ds,$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(3.22) \quad G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} [\Phi^k] \{U^k\} dx dy + G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} [\Psi^k] \{V^k\} dx dy +$$

$$+ 2D \iint_{A^k} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] + \nu \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] + \nu \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x \partial y} \left[ \frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x \partial y} \right] + \frac{G_w}{D} \frac{(2h+\delta)^2}{4h} \left( \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \right) \right\} \{W^k\} dx dy = \iint_{A^k} \Omega_j^k q dx dy + 2 \int_{r^k} \Omega_j^k (q_x^k \cos \alpha + q_y^k \sin \alpha) ds +$$

$$+ \int_{r^k} \Omega_j^k (N_{xz}^k \cos \alpha + N_{yz}^k \sin \alpha) ds - 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} (m_x^k \cos \alpha - m_{xy}^k \sin \alpha) ds -$$

$$- 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} (m_y^k \sin \alpha - m_{xy}^k \cos \alpha) ds,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Otrzymany układ  $(2n+m)$  równań dla wyznaczenia nieznanymi parametrów węzłowych  $U_i^k, V_i^k, W_j^k$  można przedstawić w postaci macierzowej

$$(3.23) \quad \begin{bmatrix} k^{11} & k^{12} & k^{13} \\ k^{21} & k^{22} & k^{23} \\ k^{31} & k^{32} & k^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^k\} \\ \{V^k\} \\ \{W^k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{Bmatrix},$$

gdzie  $k^{ij}, p^i, b_i^j$  są podmacierzami określonymi przez poniższe wyrażenia:

$$(3.24) \quad [k^{11}]_{ij} = 2\delta \iint_{A^k} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial y} + \frac{G_w}{\delta h} \Phi_i^k \Phi_j^k \right] dx dy,$$

$$(3.25) \quad [k^{12}]_{ij} = 2\delta \iint_{A^k} \left[ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial x} \right] dx dy,$$

$$(3.26) \quad [k^{13}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \Phi_i^k \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} dx dy,$$

$$(3.27) \quad [k^{21}]_{ij} = 2\delta \int_{A^k} \int \left[ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(3.28) \quad [k^{22}]_{ij} = 2\delta \int_{A^k} \int \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial x} + \frac{G_w}{\delta h} \Psi_i^k \Psi_j^k \right] dx dy,$$

$$(3.29) \quad [k^{23}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \Psi_i^k \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} dx dy,$$

$$(3.30) \quad [k^{31}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} \Phi_j^k dx dy,$$

$$(3.31) \quad [k^{32}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} \Psi_j^k dx dy,$$

$$(3.32) \quad [k^{33}]_{ij} = 2D \int_{A^k} \int \left[ \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{G_w}{D} \frac{(2h + \delta)^2}{4h} \left( \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} \right) \right] dx dy,$$

$$(3.33) \quad [p]_i = \int_{A^k} \int \Omega_i^k q dx dy,$$

$$(3.34) \quad [b^1]_i = 2 \int_{r^k} \Phi_i^k (N_x^k \cos \alpha + N_{xy}^k \sin \alpha) ds,$$

$$(3.35) \quad [b^2]_i = 2 \int_{r^k} \Psi_i^k (N_y^k \sin \alpha + N_{xy}^k \cos \alpha) ds,$$

$$(3.36) \quad [b^3]_i = \int_{r^k} \Omega_i^k (N_{xz}^k \cos \alpha + N_{yz}^k \sin \alpha) ds + 2 \int_{r^k} \Omega_i^k (q_x^k \cos \alpha + q_y^k \sin \alpha) ds + \\ - 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} (m_x^k \cos \alpha - m_{xy}^k \sin \alpha) ds - 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} (m_y^k \sin \alpha - m_{xy}^k \cos \alpha) ds.$$

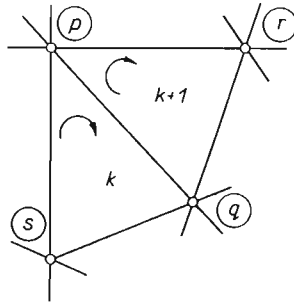
Ponieważ funkcjonal (2.4) jest formą kwadratową przemieszczeń i ich pochodnych, macierz współczynników przy niewiadomych  $U_i^k$ ,  $V_i^k$ ,  $W_j^k$  jest macierzą symetryczną.

Macierz (3.23) jest poszukiwaną macierzą sztywności elementu  $k$ . Macierz sztywności całej płyty (macierz globalną) uzyskuje się przez sumowanie po wszystkich elementach ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) wyrażeń (3.23). Przy zapewnieniu ciągłości przemieszczeń i naprężeń między elementami całki po konturze typu (3.34)—(3.36) są równe zeru dla brzegów



elementu wewnątrz płyty. Dla elementów graniczących z konturem zewnętrznym płyty można je wyznaczyć z warunków brzegowych.

Zaznaczyć należy, że przy prowadzeniu obliczeń według tej metody konieczne jest przyjęcie zerowania się całek (3.34)—(3.36) wzdłuż brzegów wewnętrznych [7], nawet w wypadku, gdy stosowane funkcje kształtu nie zapewniają ciągłości przemieszczeń i naprężeń. Jednakże po wyznaczeniu przemieszczeń i naprężeń można obliczyć wartości całek dla wszystkich lub tylko niektórych elementów. Pozwala to na oszacowanie błędu dyskretyzacji.



Rys. 2

Rozpatrzmy dla przykładu całkę (3.34) na brzegu  $p-q$  dla dwóch graniczących ze sobą elementów  $k$  i  $k+1$  (rys. 2). Dla elementu  $k$  mamy

$$(b_i^1)^k = 2 \int_p^q \Phi_i^k (N_x^{k+1} \cos \alpha + N_{xy}^{k+1} \sin \alpha) ds.$$

Podobnie dla elementu  $k+1$  otrzymamy

$$(b_i^1)^{k+1} = 2 \int_q^p \Phi_i^{k+1} (N_x^k \cos \alpha + N_{xy}^k \sin \alpha) ds.$$

W macierzy globalnej wystąpi suma powyższych całek

$$(3.37) \quad (b_i^1)^k + (b_i^1)^{k+1} = 2 \int_p^q [\Phi_i^k (N_x^{k+1} \cos \alpha + N_{xy}^{k+1} \sin \alpha) - \Phi_i^{k+1} (N_x^k \cos \alpha + N_{xy}^k \sin \alpha)] ds.$$

Wyrażenie (3.37) będzie równe zero, gdy  $\Phi_i^k = \Phi_i^{k+1}$ ,  $N_x^k = N_x^{k+1}$ ,  $N_{xy}^k = N_{xy}^{k+1}$  wzdłuż brzegu  $p-q$ , to znaczy, gdy przemieszczenia i naprężenia będą ciągłe na granicy elementów. Obliczona po wyznaczeniu przemieszczeń wartość całki (3.37) służyć może jako oszacowanie błędu dyskretyzacji. Podobnie uczynić można dla pozostałych całek typu (3.34)—(3.36).

#### 4. Metoda energetyczna

Przez podstawienie zależności (2.15)—(2.17) do (2.4) wyrazimy funkcjonal energii sprężystej w  $k$ -tym elemencie ( $\Pi^k$ ) jako funkcję nieznanymi parametrów węzłowych. Energię potencjalną całej płyty otrzymamy przez sumowanie po wszystkich elementach [2], [4],

$$(4.1) \quad \Pi = \sum_{k=1}^r \Pi^k.$$

Wykorzystując warunki na minimum funkcjonału

$$(4.2) \quad \frac{\partial \Pi^k}{\partial U_i^k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial \Pi^k}{\partial V_i^k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial \Pi^k}{\partial W_j^k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

otrzymamy układ  $(2n+m)$  równań algebraicznych dla  $k$ -tego elementu.

Wykonajmy dla przykładu działania opisane zależnościami (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^k}{\partial U_i^k} = & \frac{1}{2} \iint_{A^k} \left\{ \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[ 2 \frac{\partial u^k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial v^k}{\partial y} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial u^k}{\partial y} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left( \frac{\partial u^k}{\partial y} \right) + (1-\nu) \frac{\partial v^k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left( \frac{\partial u^k}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ & \left. + 2hG_w \left[ 2 \frac{u^k}{h^2} \frac{\partial}{\partial U_i^k} (u^k) + 2 \frac{1}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w^k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial U_i^k} (u^k) \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że (por. (2.15)—(2.17))

$$\frac{\partial}{\partial U_i^k} \left( \frac{\partial u^k}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left( \frac{\partial u^k}{\partial y} \right) = \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial U_i^k} (u^k) = \Phi_i^k,$$

otrzymamy ostatecznie  $n$  pierwszych równań układu

$$\begin{aligned} (4.5) \quad 2 \iint_{A^k} \left( \frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] + \frac{G_w}{h} \Phi_i^k [\Phi^k] \right) \{U^k\} dx dy + \\ + 2 \iint_{A^k} \left( \frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \right) \{V_{\blacksquare}^k\} dx dy + \\ + G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[ \frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W_{\blacksquare}^k\} dx dy = 0, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Dla warunków (4.3) i (4.4) otrzymamy pozostałe równania układu.

Macierz współczynników jest identyczna z macierzą (3.23) (macierz sztywności). Uzyskany w ten sposób układ równań nie zawiera całek po konturze elementu. Brak całek (3.34)—(3.36) jest konsekwencją założenia prawdziwości związku (4.1) i ukrytego założenia, że związki (2.15)—(2.17) spełniają warunki brzegowe płyty. W praktycznych zastosowaniach dobór funkcji kształtu  $\Phi_i^k$ ,  $\Psi_i^k$ ,  $\Omega_j^k$  spełniających warunki brzegowe płyty jest bardzo uciążliwy. Trudność tę można ominąć przez dodanie do funkcjonału (2.4) całek krzywoliniowych rozciągniętych na brzeg płyty, które po minimalizacji prowadzą automatycznie do całek (3.34)—(3.36), [7].

W analizowanym przypadku do funkcjonału (2.4) należy dodać wyrażenie

$$(4.6) \quad -2 \int_{\Gamma} \left( q_n w - \frac{\partial w}{\partial n} m_n + \frac{\partial w}{\partial t} m_{nt} + \frac{1}{2} N_{nz} w + N_n u_n + N_t u_t \right) ds.$$

Wyrażenie (4.6) ma prostą interpretację fizyczną, stanowi bowiem pracę obciążeń brzegowych na odpowiadających im przemieszczeniach.

### 5. Uwagi końcowe

Otrzymana macierz sztywności (3.23) może być przedstawiona w postaci sumy trzech macierzy: macierzy sztywności płytek zewnętrznych pracujących jako tarcze w płaskim stanie naprężenia  $[k_1]$ , macierzy sztywności płytek zewnętrznych pracujących jako płyty cienkie  $[k_2]$ , macierzy sztywności wynikającej z trójwarstwowej struktury płyty  $[k_3]$

$$(5.1) \quad [k] = 2[k_1] + 2[k_2] + [k_3] = 2 \begin{bmatrix} k_1^{11} & k_1^{12} & 0 \\ k_1^{21} & k_1^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2^{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3^{11} & k_3^{12} & k_3^{13} \\ k_3^{21} & k_3^{22} & k_3^{23} \\ k_3^{31} & k_3^{32} & k_3^{33} \end{bmatrix}.$$

Czynnik 2 w zależności (5.1) wynika z istnienia dwóch płytek zewnętrznych.

Dla przykładu podajemy niektóre wyrazy tych macierzy:

$$[k_1^{11}]_{ij} = \delta \iint_{A^k} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$[k_3^{11}]_{ij} = \frac{2G_w}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \Phi_j^k dx dy,$$

$$[k_2^{33}]_{ij} = D \iint_{A^k} \left( \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x \partial y} \right) dx dy,$$

$$[k_3^{33}]_{ij} = G_w \frac{(2h+\delta)^2}{2h} \iint_{A^k} \left( \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} \right) dx dy, \text{ itd.}$$

Takie przedstawienie macierzy sztywności pozwala na stwierdzenie, że wyrazy macierzy  $[k_1]$  są identyczne z wyrażeniami otrzymanymi przez SZABO i LEE [7], a  $[k_2]$  jest identyczna z wyrażeniem użytym przez SZMELTERA i DOBROCIŃSKIEGO w pracy [11]. Macierz  $[k_3]$  ujmuje wpływ przyjętego modelu płyty trójwarstwowej. Otrzymanej macierzy sztywności nie odniesiono do żadnego konkretnego elementu ani konkretnej funkcji kształtu. Po wyborze elementu i określeniu funkcji kształtu [4], [6] można obliczyć macierz sztywności (3.23). Obliczenia te można wykonać na EMC.

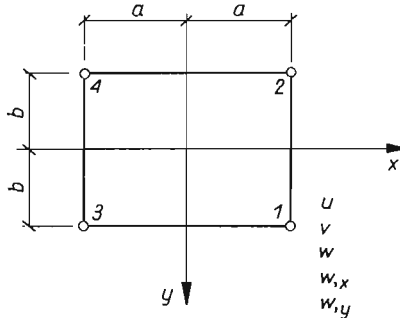
Przykładowo obliczymy wyraz  $k_{11}$  macierzy (3.23) przyjmując najprostszy element o pięciu stopniach swobody w każdym węźle (rys. 3).  $\Phi_1$  można wyrazić poniższym wielomianem

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \right).$$

Otrzymamy [por. (3.24)]

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{2\delta E}{1-\nu^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{16a^2} \left( 1 + \frac{y}{b} \right)^2 dx dy + \frac{\delta E}{1+\nu} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{16b^2} \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^2 dx dy + \\ &+ \frac{2G_w}{h} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{2\delta E}{1-\nu^2} \left[ \frac{b}{3a} + \frac{(1-\nu)a}{6b} \right] + \frac{8}{9} \frac{G_w}{h} ab. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik sumy jest identyczny z obliczonym dla tarczy w płaskim stanie naprężenia [12], a drugi ujmuje wpływ warstwowej struktury płyty.



Rys. 3

Rozkład macierzy sztywności (3.23) na sumę trzech macierzy składowych (5.1) pozwala na znaczne uproszczenie pracy rachunkowej, gdyż dwa pierwsze składniki są opracowane dla elementów o różnych kształtach jak i różnej liczbie stopni swobody (np. [4], [5], [12]).

#### Literatura cytowana w tekście

1. N. J. HOFF, *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, NACA (1950), No. 2225.
2. T. H. H. PIAN, P. TONG, *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969), 3—28.
3. J. T. ODEN, *A General Theory of Finite Elements I. Topological considerations, II. Applications*, Int. J. Num. Math. Eng., 1 (1969) 205—211 i 247—259.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, ARKADY, Warszawa 1972.
5. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw Hill (1968).
6. V. KOLAR, J. KRATOCHVIL, M. ZLÁMAL, A. ŽENIŠEK, *Technical, Physical and Mathematical Principles of the Finite Element Methods*, Rozpr. CSAV, z. 2, 81 (1971).

7. B. A. SZABO, G. C. LEE, *Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969), 301—310.
8. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inż. Łądowej, 1, 12 (1966), 71—90.
9. H. MIKOŁAJCZAK, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, Roczn. WSR Poznań, 1965, dod. 12.
10. J. GOŁAŚ, *Pewne przypadki nieciągłych warunków brzegowych dla kołowych płyt trójwarstwowych*, Politechnika Poznańska (1969).
11. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementów płyty*, Biul. WAT, 4, 18 (1969), 44—55.
12. I. HOLAND, K. BELL (ed.), *Finite Element Methods in Stress Analysis*, TAPIR, Trondheim-Norway 1970.

## Р е з ю м е

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТА ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ,  
ПОДВЕРЖЕННОЙ ИЗГИБУ

Двумя способами выведено общее выражение для матрицы жесткостей элемента трехслойной пластины, подверженной изгибу и удовлетворяющей предположениям Хоффа [1]. Путем разделения пластины на элементы и аппроксимации перемещений в элементе при помощи формулы (2.15)—(2.17) выведены приближенные уравнения равновесия (3.1), причем функционал потенциальной энергии (3.1)—(3.3) представлен как функция неизвестных узловых параметров (обобщенных перемещений в узлах). Ортогонализация выражений для погрешности дискретизации  $f_1, f_2, f_3$  с системой функций  $\Phi_i, \Psi_i, \Omega_j$  [7] приводит к системе  $2n+m$  алгебраических линейных уравнений с неизвестными узловыми параметрами (3.6).

Матрица коэффициентов при неизвестных является искомой матрицей жесткостей элемента. Точно такой же результат получен при использовании принципа минимума функционала потенциальной энергии упругой деформации. Формулу (3.6) можно использовать для написания процедуры для ЭЦВМ при расчете конкретных задач. В качестве примера вычислена одна компонента матрицы жесткостей для прямоугольного элемента, обладающего пятью степенями свободы в каждом из узлов.

## S u m m a r y

## STIFFNESS MATRIX OF AN ELEMENT OF A SANDWICH PLATE IN BENDING

Two different methods are used to derive the general expression for the stiffness matrix of an element of a three-layer sandwich plate satisfying N. J. Hoff's [1] assumptions. Dividing the region of the plate into elements and approximating the element displacements by expressions (2.15)—(2.17), an approximate equilibrium equation [(3.1)—(3.3)] is obtained, and the potential energy functional (2.4) is expressed in terms of the unknown nodal parameters (generalized displacements of the nodes). Applying Galerkin's method to the expressions for discretization errors  $f_1, f_2, f_3$  and the set of functions  $\Phi_i, \Psi_i, \Omega_j$  [7], a system of  $(2n+m)$  simultaneous algebraic equations is obtained making it possible to determine the nodal parameters (3.23). The matrix of coefficients at the unknowns is the element stiffness matrix required. Using the principle of minimum of the potential energy functional of elastic deformation, an identical expression may be obtained. Eq. (3.23) may also be used to prepare the EMC procedures for particular elements. As an example, one term of the stiffness matrix is evaluated for the case of a rectangular element with five degrees of freedom at each node.

AKADEMIA ROLNICZA, POZNAŃ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1973 r.*