

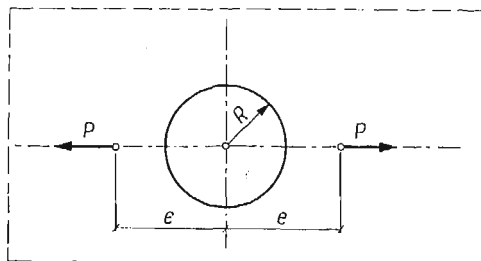
KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ W TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OTWOREM KOŁOWYM
PRZY OBCIĄŻENIU WEWNĘTRZNYM

KAZIMIERZ RYKALUK (WROCLAW)

1. Wstęp

Rozpatrzmy sprężystą izotropową tarczę nieograniczoną z otworem kołowym o promieniu R obciążoną podłużną parą sił, symetryczną względem środka otworu (rys. 1).

Wewnątrz obszaru tarczy wokół brzegu otworu wystąpi koncentracja naprężeń (por. [2]). Zadaniem naszym jest określenie wielkości tej koncentracji, scharakteryzowanej przez tzw. współczynniki koncentracji naprężeń. Przez współczynnik koncentracji naprężeń



Rys. 1

rozumiemy iloraz którejkolwiek składowej tensora naprężenia w dowolnym punkcie strefy koncentracji przez tę samą składową w tym samym punkcie tarczy bez otworu, obciążonej tak samo jak tarcza z otworem (por. [2]).

Do wyznaczenia stanów naprężeń w tarczy bez otworu i z otworem posłużymy się funkcją zmiennej zespolonej, wykorzystując metodę MUSCHELISZWILIEGO (por. [1])

Przy znanych dwóch funkcjach holomorficznym $\varphi_1(z)$ i $\psi_1(z)$, zwanych funkcjami Goursata, składowe tensora naprężenia σ_r , σ_φ , $\tau_{r\varphi}$ oraz wektora przemieszczenia u_r , u_φ obliczymy ze wzorów Kołosowa–Muscheliszwiliego

$$(1.1) \quad \begin{cases} \sigma_r + \sigma_\varphi = 4 \operatorname{Re} \varphi_1'(z), \\ \sigma_\varphi - \sigma_r + 2i \tau_{r\varphi} = 2[\bar{z} \varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \exp(2i\varphi), \end{cases}$$

$$(1.2) \quad 2G(u_r + iu_\varphi) = [\kappa \varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}] \exp(-i\varphi),$$

gdzie G oznacza moduł sprężystości poprzecznej, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ w płaskim stanie naprężenia, lub $\kappa = 3-4\nu$ w płaskim stanie odkształcenia, ν — współczynnik Poissona.

2. Tarcza bez otworu

Przy obranym układzie współrzędnych, jak na rys. 2, funkcje Goursata będą miały następujące postacie (por. [1]):

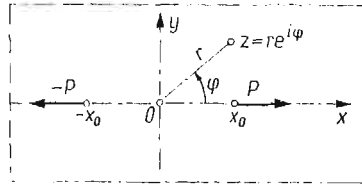
$$(2.1) \quad \varphi_1(z) = A \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \varphi_1^0(z),$$

$$(2.2) \quad \psi_1(z) = A \left(-\kappa \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z+x_0} \right) + \psi_1^0(z),$$

gdzie $A = \frac{P}{2\pi(1+\kappa)}$.

Jeżeli założymy, że naprężenia w nieskończoności są równe zeru, wówczas

$$(2.3) \quad \varphi_1^0(z) = \psi_1^0(z) = 0.$$



Rys. 2

Po wykonaniu potrzebnych we wzorach (1.1) operacji na funkcjach (2.1) i (2.2), z uwzględnieniem (2.3), otrzymamy:

$$(2.4) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_r^{(1)} \\ \sigma_\varphi^{(1)} \end{array} \right\} = 2Ax_0 \left\{ \frac{(2 \pm \kappa \cos 2\varphi)x_0^2 \mp (\kappa \pm 2 \cos 2\varphi)r^2}{r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \pm \frac{r^6 + 4x_0^2 r^4 - x_0^4 r^2 (1 + 2 \sin^2 2\varphi) - (2r^6 - x_0^6 + x_0^2 r^4 + 2x_0^4 r^2) \cos 2\varphi}{(r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi)^2} \right\},$$

$$(2.5) \quad \tau_{r\varphi}^{(1)} = \frac{-2Ax_0 \sin 2\varphi}{r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \left(\kappa x_0^2 + \frac{2r^6 + x_0^6 - 2x_0^4 r^2 - 3x_0^2 r^4 + 2x_0^4 r^2 \cos 2\varphi}{r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \right).$$

3. Tarcza z otworem

Założmy następujące postacie funkcji Goursata:

$$(3.1) \quad \varphi_2(z) = A \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \varphi_2^0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2^0(z),$$

$$(3.2) \quad \psi_2(z) = A \left(-\kappa \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z+x_0} \right) + \psi_2^0(z) = \psi_1(z) + \psi_2^0(z),$$

gdzie funkcje $\varphi_2^0(z)$ i $\psi_2^0(z)$ są holomorficzne w obszarze $|z| > R$. Wyznaczymy je z pierwszego warunku brzegowego

$$(3.3) \quad \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = 0,$$

przy czym t oznacza punkt bieżący na okręgu.

Odwzorujemy obszar tarczy na zewnątrz koła jednostkowego $|\zeta| > 1$, leżącego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej $\zeta = \xi + i\eta$ za pomocą funkcji

$$(3.4) \quad z = \omega(\zeta) = R\zeta.$$

Okrąg jednostkowy oznaczymy przez γ , a punkt tego okręgu odpowiadający punktowi t — przez ϱ .

Na płaszczyźnie ζ będziemy operowali funkcjami

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varphi(\zeta) = \varphi_2[\omega(\zeta)], \\ \psi(\zeta) = \psi_2[\omega(\zeta)]. \end{cases}$$

Uwzględniając (3.4) i (3.5) we wzorach (3.1) i (3.2), otrzymamy

$$(3.6) \quad \varphi(\zeta) = A \ln \frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi} + \varphi_0(\zeta),$$

$$(3.7) \quad \psi(\zeta) = A \left(-\kappa \ln \frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi} + \frac{\xi_0}{\zeta - \xi_0} + \frac{\xi_0}{\zeta + \xi_0} \right) + \psi_0(\zeta),$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{cases} \xi_0 = x_0/R, \\ \varphi_0(\zeta) = \varphi_2^0[\omega(\zeta)], \\ \psi_0(\zeta) = \psi_2^0[\omega(\zeta)], \end{cases}$$

przy czym $\varphi_0(\zeta)$ i $\psi_0(\zeta)$ są funkcjami holomorficznymi w obszarze $|\zeta| > 1$.

Warunek brzegowy (3.3) przyjmie postać

$$(3.9) \quad \varphi(\varrho) + \frac{\omega(\varrho)}{\omega'(\varrho)} \overline{\varphi'(\varrho)} + \overline{\psi(\varrho)} = 0,$$

z którego, na podstawie (3.4), (3.6) i (3.7), otrzymujemy

$$(3.10) \quad \varphi_0(\varrho) + \overline{\varrho \varphi_0'(\varrho)} + \overline{\psi_0(\varrho)} = f_0(\varrho),$$

gdzie

$$(3.11) \quad f_0(\varrho) = A \left(\ln \frac{\varrho - \xi_0}{\varrho + \xi_0} - \kappa \ln \frac{\frac{1}{\varrho} - \xi_0}{\frac{1}{\varrho} + \xi_0} - \varrho \frac{\varrho + \xi_0}{1 + \xi_0 \varrho} + \varrho \frac{\varrho - \xi_0}{1 - \xi_0 \varrho} \right).$$

Ze względu na brak obciążenia zewnętrznego na krawędzi otworu, funkcje $\varphi_0(\zeta)$ i $\psi_0(\zeta)$ wyznaczamy ze wzorów (por. [1]):

$$(3.12) \quad \varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_0(\varrho)}{\varrho - \zeta} d\varrho,$$

$$(3.13) \quad \psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f_0(\varrho)}}{\varrho - \zeta} d\varrho - \frac{\varphi_0'(\zeta)}{\zeta},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \overline{f_0(\varrho)} = A \left(\ln \frac{\frac{1}{\varrho} - \xi_0}{\frac{1}{\varrho} + \xi_0} - \kappa \ln \frac{\varrho - \xi_0}{\varrho + \xi_0} - \frac{1}{\varrho} \frac{1 + \xi_0 \varrho}{\varrho + \xi_0} + \frac{1}{\varrho} \frac{1 - \xi_0 \varrho}{\varrho - \xi_0} \right).$$

Dla wieloznacznych funkcji $\ln \frac{\zeta - \xi_0}{\zeta + \xi_0}$ i $\ln \frac{1/\rho - \xi_0}{1/\rho + \xi_0}$ wybieramy takie gałęzie, aby na okręgu γ były wielkościami sprzężonymi. Dla pierwszej wybieramy gałąź holomorficzną w obszarze $|\zeta| < 1$ i równą πi w punkcie $\zeta = 0$, zaś dla drugiej — gałąź holomorficzną w obszarze $|\zeta| > 1$ i równą πi w punkcie $\zeta = \infty$.

Zatem, w myśl twierdzenia Cauchy'ego (por. [3]), mamy

$$(3.15) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \ln \frac{\rho - \xi_0}{\rho + \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = 0,$$

$$(3.16) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \ln \frac{\frac{1}{\rho} - \xi_0}{\frac{1}{\rho} + \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\ln \frac{1 - \xi_0 \zeta}{1 + \xi_0 \zeta} + \pi i.$$

Wyrażenia $\rho \frac{\rho + \xi_0}{1 + \xi_0 \rho}$ i $\rho \frac{\rho - \xi_0}{1 - \xi_0 \rho}$ są wartościami brzegowymi funkcji $\zeta \frac{\zeta + \xi_0}{1 + \xi_0 \zeta}$ i $\zeta \frac{\zeta - \xi_0}{1 - \xi_0 \zeta}$ holomorficznym w obszarze $|\zeta| > 1$ z wyjątkiem punktu $\zeta = \infty$, w którym posiadają bieguny rzędu pierwszego z częściami głównymi odpowiednio $\left(\frac{\zeta}{\xi_0} + 1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)$ i $\left(1 - \frac{\zeta}{\xi_0} - \frac{1}{\xi_0^2}\right)$.

Zatem, w myśl twierdzenia Cauchy'ego, mamy

$$(3.17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \rho \frac{\rho + \xi_0}{1 + \xi_0 \rho} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\zeta \frac{\zeta + \xi_0}{1 + \xi_0 \zeta} + 1 - \frac{1}{\xi_0^2} + \frac{\zeta}{\xi_0},$$

$$(3.18) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \rho \frac{\rho - \xi_0}{1 - \xi_0 \rho} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\zeta \frac{\zeta - \xi_0}{1 - \xi_0 \zeta} + 1 - \frac{1}{\xi_0^2} - \frac{\zeta}{\xi_0}.$$

Wyrażenia $\frac{1}{\rho} \frac{1 + \xi_0 \rho}{\zeta + \xi_0}$ i $\frac{1}{\rho} \frac{1 - \xi_0 \rho}{\zeta - \xi_0}$ są wartościami brzegowymi funkcji $\frac{1}{\zeta} \frac{1 + \xi_0 \zeta}{\zeta + \xi_0}$ i $\frac{1}{\zeta} \frac{1 - \xi_0 \zeta}{\zeta - \xi_0}$ holomorficznym w obszarze $|\zeta| < 1$ z wyjątkiem punktu $\zeta = 0$, w którym posiadają bieguny rzędu pierwszego z częściami głównymi odpowiednio $\left(-\frac{1}{\xi_0 \zeta}\right)$ i $\left(\frac{1}{\xi_0 \zeta}\right)$.

Zatem, w myśl twierdzenia Cauchy'ego, mamy

$$(3.19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{1 + \xi_0 \rho}{\zeta + \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\frac{1}{\xi_0 \zeta},$$

$$(3.20) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{1 - \xi_0 \rho}{\zeta - \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = \frac{1}{\xi_0 \zeta}.$$

Wykorzystując całki (3.15)–(3.20) we wzorach (3.11) i (3.12) oraz (3.13) i (3.14), otrzymamy

$$(3.21) \quad \varphi_0(\zeta) = A \left(\kappa \ln \frac{1 + \xi_0 \zeta}{1 - \xi_0 \zeta} + \frac{2\zeta}{\xi_0} + 2\xi_0 \zeta \frac{\zeta^2 - 1}{1 - \xi_0^2 \zeta^2} \right),$$

$$(3.22) \quad \psi_0(\zeta) = A \left(-\ln \frac{1 + \xi_0 \zeta}{1 - \xi_0 \zeta} - \frac{4}{\xi_0 \zeta} + 4\xi_0 \zeta \frac{\xi_0^2 - 1}{(1 - \xi_0^2 \zeta^2)^2} + \frac{2\xi_0}{\zeta} \frac{1 - \zeta^2 - \varkappa}{1 - \xi_0^2 \zeta^2} \right),$$

przy czym pominięto tu wyrazy stałe, które nie mają wpływu na składowe tensora naprężenia.

Przetransformujemy funkcje (3.21) i (3.22) na płaszczyznę zmiennej z za pomocą odwrotnej funkcji odwzorowującej $\zeta = \omega^{-1}(z) = z/R$:

$$(3.23) \quad \varphi_2^0(z) = A \left(\varkappa \ln \frac{R^2 + x_0 z}{R^2 - x_0 z} + \frac{2z}{x_0} + 2x_0 z \frac{z^2 - R^2}{R^4 - x_0^2 z^2} \right),$$

$$(3.24) \quad \psi_2^0(z) = A \left[-\ln \frac{R^2 + x_0 z}{R^2 - x_0 z} - \frac{4R^2}{x_0 z} + \frac{2R^2 x_0}{z} \frac{(1 - \varkappa)R^2 - z^2}{R^4 - x_0^2 z^2} + 4x_0 z R^4 \frac{x_0^2 - R^2}{(R^4 - x_0^2 z^2)^2} \right].$$

Uwzględniając funkcje (3.23) i (3.24) we wzorach (3.1) i (3.2), otrzymamy rozwiązanie dla tarczy nieograniczonej z otworem kołowym, obciążoną podłużną parą sił skupionych zaczepionych wewnątrz obszaru tarczy.

Składowe tensora naprężenia możemy zapisać w postaci

$$(3.25) \quad \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(0)}, \quad \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(0)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(2)} = \tau_{r\varphi}^{(1)} + \tau_{r\varphi}^{(0)},$$

gdzie $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$ i $\tau_{r\varphi}^{(1)}$ są określone wzorami (2.4) i (2.5), natomiast $\sigma_r^{(0)}$, $\sigma_\varphi^{(0)}$ i $\tau_{r\varphi}^{(0)}$ wyliczymy według wzorów (1.1) na podstawie funkcji (3.23) i (3.24):

$$(3.26) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^{(0)} \\ \sigma_\varphi^{(0)} \end{aligned} \right\} = 4Ax_0 \left\{ \frac{1}{x_0^2} + \frac{(\varkappa - 1)(R^4 - x_0^2 r^2 \cos 2\varphi)R^2 + (R^4 \cos 2\varphi - x_0^2 r^2)r^2}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi} + \right. \\ \left. + 2r^2 R^2 (R^2 - x_0^2) \frac{(R^8 + x_0^4 r^4) \cos 2\varphi - 2x_0^2 r^2 R^4}{(R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^2} \mp \frac{R^2}{x_0^2 r^2} \mp \frac{R^4}{2r^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\varkappa - 1)(R^4 - x_0^2 r^2 \cos 2\varphi)}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \mp R^2 (r^2 - R^2) [(\varkappa - 1)x_0^2 + R^2] \frac{(R^8 + x_0^4 r^4) \cos 2\varphi - 2x_0^2 r^2 R^4}{(R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^2} \mp \right. \\ \left. \mp R^2 (x_0^2 - R^2) \frac{R^4 (R^2 - 2r^2) [R^4 (R^8 + 3x_0^4 r^4) \cos 2\varphi - x_0^6 r^6 \cos 4\varphi - 3x_0^2 r^2 R^8] +}{(R^8 + x_0^4 r^4 -} \right. \\ \left. \left. \frac{+ x_0^2 r^2 (3R^2 - 2r^2) [R^4 (R^8 \cos 4\varphi + 3x_0^4 r^4) - (x_0^6 r^6 + 3x_0^2 r^2 R^8) \cos 2\varphi]}{-2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^3} \right\}, \right.$$

$$(3.27) \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = \frac{2Ax_0 \sin 2\varphi}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi} \left\{ (\varkappa - 1)x_0^2 R^4 + \right. \\ \left. + [(\varkappa - 1)x_0^2 + R^2] \frac{2R^2 (r^2 - R^2) (R^8 - x_0^4 r^4)}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi} + \right. \\ \left. + 2R^2 (x_0^2 - R^2) \frac{R^4 (R^2 - 2r^2) [R^4 (R^8 - 3x_0^4 r^4) + 2x_0^6 r^6 \cos 2\varphi] + x_0^2 r^2 (3R^2 - 2r^2) [(x_0^6 r^6 -}{(R^8 + x_0^4 r^4 -} \right. \\ \left. \left. \frac{-3x_0^2 r^2 R^8) + 2R^2 \cos 2\varphi]}{-2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^2} \right\}.$$

4. Współczynniki koncentracji naprężeń

Zgodnie z definicją podaną w punkcie 1, współczynniki koncentracji naprężeń są równe:

$$(4.1) \quad k_r = \frac{\sigma_r^{(2)}}{\sigma_r^{(1)}} = 1 + \frac{\sigma_r^{(0)}}{\sigma_r^{(1)}},$$

$$(4.2) \quad k_\varphi = \frac{\sigma_\varphi^{(2)}}{\sigma_\varphi^{(1)}} = 1 + \frac{\sigma_\varphi^{(0)}}{\sigma_\varphi^{(1)}},$$

$$(4.3) \quad k_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}^{(2)}}{\tau_{r\varphi}^{(1)}} = 1 + \frac{\tau_{r\varphi}^{(0)}}{\tau_{r\varphi}^{(1)}},$$

gdzie składowe tensorów naprężeń są określone wzorami (2.4), (2.5) oraz (3.26) i (3.27).

Ze względu na wyteżenie materiału najbardziej interesujący jest współczynnik k_φ na krawędzi otworu. Wynosi on

$$(4.4) \quad k_\varphi|_{r=R} = 1 + \frac{\sigma_\varphi^{(0)}}{\sigma_\varphi^{(1)}} \Big|_{r=R},$$

gdzie

$$(4.5) \quad \sigma_\varphi^{(0)}|_{r=R} = 4Ax_0 \left\{ \frac{2}{x_0^2} + \frac{3(\kappa-1)(R^2 - x_0^2 \cos 2\varphi) + 2(R^2 \cos 2\varphi - x_0^2)}{2(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)} + \right. \\ \left. + 2(R^2 - x_0^2) \frac{(R^4 + x_0^4) \cos 2\varphi - 2x_0^2 R^2}{(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)^2} + \right. \\ \left. + (x_0^2 - R^2) \frac{(R^4 + x_0^4) x_0^2 R^2 (3 + \cos 4\varphi) - (R^8 + 6x_0^4 R^4 + x_0^8) \cos 2\varphi}{(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)^3} \right\},$$

$$(4.6) \quad \sigma_\varphi^{(1)}|_{r=R} = \frac{2Ax_0}{(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)^2} \{ (\kappa-1)R^6 + (\kappa+3)x_0^4 R^2 + 2x_0^6 - \\ - 2x_0^2 R^4 + [(\kappa+1)x_0^6 + (1-3\kappa)x_0^2 R^4 - 4x_0^4 R^2] \cos 2\varphi + \\ + [2(\kappa-1)x_0^4 R^2 + 4x_0^2 R^4] \cos^2 2\varphi \}.$$

5. Przykład liczbowy

Obliczyć naprężenia $\sigma_\varphi^{(0)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$ i $\sigma_\varphi^{(2)}$ oraz współczynnik k_φ w trzech punktach krawędzi otworu o promieniu R : $\varphi = 0$, $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{2}$. Przyjmąc $x_0 = 2R, 4R, 8R$ i $16R$ oraz $\kappa = 2$, co odpowiada $\nu = 0,333$.

Obliczone wartości $\sigma_\varphi^{(0)}$ i $\sigma_\varphi^{(1)}$ według wzorów (4.5) i (4.6), $\sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(0)}$ oraz k_φ według wzoru (4.4) zestawiono w tablicy 1.

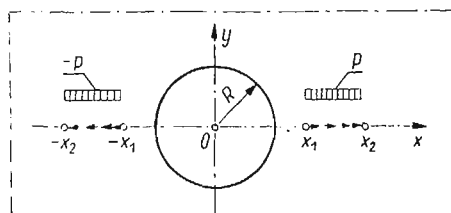
6. Uwagi końcowe i wnioski

1. Przedstawiony problem tarczy nieograniczonej może stanowić podstawę do wyznaczenia rozkładów naprężeń w tarczach dwuspójnych obciążonych wewnątrz ich obszarów.

2. Z obciążeniami wewnętrznymi tarcz spotykamy się przy obliczaniu poszycia w tzw. płytach zestawnych (por. [4, 5]).

Tablica 1. Wartości naprężeń σ_φ oraz współczynnika k_φ na krawędzi otworu

x_0	$2R$	$4R$	$8R$	$16R$
$\varphi = 0$				
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(0)} =$	-10,666 667	-3,866 667	-1,793 650	-0,880 392
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(1)} =$	17,629 620	3,350 281	1,343 655	0,636 344
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(2)} =$	6,962 954	-0,516 385	-0,449 995	-0,244 048
$k_\varphi =$	0,394 958	-0,154 132	-0,334 903	-0,383 516
$\varphi = \frac{\pi}{4}$				
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(0)} =$	4,816 609	1,446 108	0,557 958	0,257 305
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(1)} =$	2,782 007	1,143 514	0,519 156	0,252 430
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(2)} =$	7,598 616	2,589 622	1,077 114	0,509 735
$k_\varphi =$	2,731 343	2,264 617	2,074 740	2,019 312
$\varphi = \frac{\pi}{2}$				
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(0)} =$	7,471 104	4,880 165	2,663 615	1,362 010
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(1)} =$	0,902 400	-0,111 780	-0,194 179	-0,117 764
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(2)} =$	8,373 504	4,768 385	2,469 436	1,244 246
$k_\varphi =$	9,279 148	-42,658 659	-12,717 317	-10,565 588



Rys. 3

3. Do obliczenia wartości naprężeń obwodowych na krawędzi otworu wystarczy znać tylko funkcję $\varphi_2(z)$, gdyż

$$\sigma_\varphi^{(2)}|_{r=R} = 4 \operatorname{Re} \varphi_2'(z).$$

4. Rozwiązanie tarczy dla obciążenia rozłożonego wzdłuż linii uzyskuje się drogą całkowania (w sensie Riemanna) wyrażeń na naprężenia lub funkcji Goursata. I tak dla obciążenia o stałej intensywności p na odcinku $|x_2 - x_1|$ (rys. 3) funkcja $\varphi_2(z)$ wynosi

$$\varphi_2(z) = \frac{p}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ z \ln \frac{x_2^2(z^2 - x_2^2)}{x_1^2(z^2 - x_1^2)} - \frac{z^2 - R^2}{z} \ln \frac{R^4 - x_2^2 z^2}{R^4 - x_1^2 z^2} + x_2 \ln \frac{z + x_2}{z - x_2} - \right. \\ \left. - x_1 \ln \frac{z + x_1}{z - x_1} + \kappa \left[\frac{R^2}{z} \ln \frac{(R^2 + x_2 z)(R^2 - x_1 z)}{(R^2 - x_2 z)(R^2 + x_1 z)} + x_2 \ln(R^4 - x_2^2 z^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - x_1 \ln(R^4 - x_1^2 z^2) - 2(x_2 - x_1) \right] \right\}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1966.
2. Г. Н. Савин, *Концентрация напряжений около отверстий*, Москва-Ленинград 1951.
3. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, t. 3, Warszawa 1967.
4. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, Warszawa 1966.
5. С. BRANICKI, К. WYSIATYCKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy statycznej lekkich jezdni mostowych*, XVI Konferencja Naukowa Kł PAN i KN PZITB — Krynica 1970. Referaty i komunikaty, t. I.

Резюме

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛИТЕ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ НАХОДЯЩИМСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕЙ НАГРУЗКИ

Дан расчет коэффициентов концентрации напряжений (по определению Г. Н. Савина) в неограниченной плите с круглым отверстием, симметрично нагруженным продольной парой сил.

Для решения задачи о плите с отверстием использованы методы функций комплексного переменного, в частности метод Н. И. Мусхелишвили, основанные на использовании конформных отображений и интегралов типа Коши.

Вычислены окружные напряжения и коэффициенты концентрации напряжений в трех характерных точках края отверстия при четырех различных точках приложения усилий x_0 .

Полученное решение является исходным для определения напряжений и концентрации напряжений в задаче о действии внутренней распределенной нагрузки.

Summary

STRESS CONCENTRATION UNDER INTERNAL LOADING IN AN INFINITE DISK WITH A CIRCULAR HOLE

The paper presents a method of calculation of stress concentration coefficients (according to Savin's definition) for an infinite disk with a circular hole. The disk is loaded by two longitudinal forces symmetric with respect to the centre of the hole. The methods of complex argument functions and, in particular, the

method of Muskhelishvili based on conformal mappings and Cauchy type integrals is applied to the solution of the problem. The circumferential stresses as well as the coefficient of stress concentration are calculated in three characteristic points of the hole edge, for the case of four different points of application x_0 of the forces. The solution obtained gives a basis to determine the stresses and their concentrations under distributed internal loads.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1971 r.
