

ANALIZA RUCHU PEWNEGO UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO  
O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

ZBIGNIEW WIŚNIEWSKI (GDAŃSK)

Oznaczenia

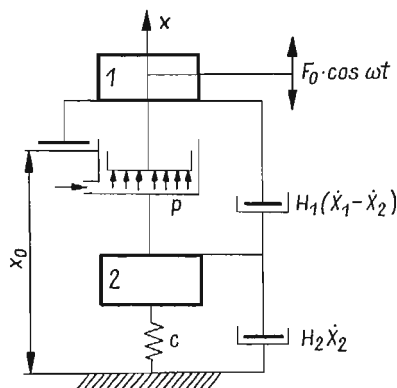
- $x_1$  bezwymiarowe przemieszczenie masy 1  
 $x_2$  bezwymiarowe przemieszczenie masy 2  
 $\dot{x}_1$  bezwymiarowa prędkość masy 1  
 $\dot{x}_2$  bezwymiarowa prędkość masy 2,  
 $\ddot{x}_1$  bezwymiarowe przyspieszenie masy 1,  
 $\ddot{x}_2$  bezwymiarowe przyspieszenie masy 2,  
 $t[s]$  czas,  
 $\tau$  czas bezwymiarowy,  
 $n$  stosunek okresu ruchu do okresu siły wymuszającej,  
 $\omega[s^{-1}]$  częstość zmian siły wymuszającej,  
 $\varphi[rad]$  kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą a przemieszczeniem masy 1,  
 $R$  współczynnik restytucji,  
 $v$  bezwymiarowa prędkość uderzenia,  
 $\delta$  bezwymiarowe przemieszczenie środka masy układu w ciągu jednego cyklu ruchu,  
 $c \left[ \frac{N}{m} \right]$  sztywność sprężystego zawieszenia masy 2,  
 $h_1$  bezwymiarowy współczynnik oporu tłumienia w pneumatycznym elemencie sprężystym,  
 $h_2$  bezwymiarowy współczynnik oporu tłumienia drgań masy 2,  
 $Q_1[N]$  ciężar masy 1,  
 $Q_2[N]$  ciężar masy 2,  
 $P[N/m^2]$  ciśnienie w pneumatycznym elemencie sprężystym,  
 $S[m^2]$  pole powierzchni dna tłoka elementu sprężystego,  
 $F_0[N]$  amplituda siły wymuszającej.

1. Wprowadzenie

Doświadczalne i teoretyczne badania układu wibro-uderzeniowego z elementem sprężystym, umożliwiającym ciągłą regulację częstości uderzeń wykazały [4], że układ ten posiada szereg cech, odróżniających go od innych układów wibro-uderzeniowych.

Korzyści, jakie mogłoby przynieść zastosowanie takiego układu np. w wibro-uderzeniowych urządzeniach do pogrążania pali, były przyczyną podjęcia przez autora dalszych badań teoretycznych [5], dla głębszego poznania zjawisk towarzyszących pracy układu.

W pracy [5] badany był model dynamiczny układu o dwóch stopniach swobody, w którym ogranicznik posiadał skończoną masę i liniową sprężystość, przy czym przyjęto, że środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym.



Rys. 1. Schemat układu badanego w pracy [5]

Założono tam również, że siła oporu towarzysząca ruchowi obu mas drgających jest proporcjonalna do prędkości ruchu.

Model dynamiczny tego układu przedstawiono schematycznie na rys. 1. Ruch układu opisany był równaniami różniczkowymi

$$(1.1) \quad \ddot{x}_1 + h_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + q = \cos(\tau + \varphi),$$

$$(1.2) \quad \ddot{x}_2 - \frac{h_1}{\mu}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2h_2\dot{x}_2 + s^2x_2 = \frac{q}{\mu},$$

przy czym warunki graniczne<sup>1)</sup> miały postać

$$(1.3) \quad x_1(0) = x_2(0) = x_0, \quad x_1(2\pi n) = x_2(2\pi n) = x_0 - \delta, \quad \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = Rv, \\ x_1(2\pi n) - x_2(2\pi n) = -v.$$

Równania (1.1.) i (1.2) wyrażono we współrzędnych bezwymiarowych, przy pomocy podstawień:

$$(1.4) \quad X_1 = \frac{F_0 g}{Q_1 \omega^2} x_1; \quad X_2 = \frac{F_0 g}{Q_2 \omega^2} x_2; \quad \tau = \omega t; \quad \frac{pS - Q_1}{F_0} = q; \\ H_1 = \frac{Q_1 \omega}{g} h_1; \quad H_2 = \frac{Q_2 \omega}{g} 2h_2; \quad Q_2/Q_1 = \mu; \quad \frac{cg}{Q_2 \omega^2} = s^2.$$

Równania (1.1) i (1.2) stanowią ogólny opis ruchu badanego układu. Z uwagi jednak na złożoną formę rozwiązań, występują trudności natury matematycznej w przedstawieniu

<sup>1)</sup> Termin «warunki graniczne» stosuje się w teorii układów wibro-uderzeniowych dla odróżnienia od typowej postaci warunków brzegowych, niezależnych od parametrów układu.

wyników analizy w postaci dogodnej dla zastosowań praktycznych. Dlatego też celowe jest wprowadzenie pewnych założeń upraszczających.

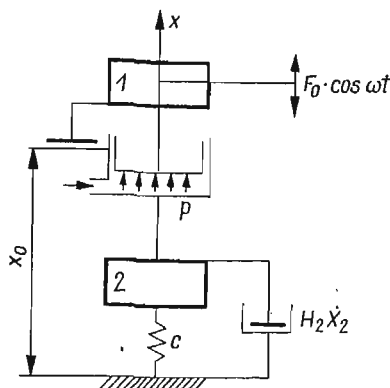
W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem układu wibro-uderzeniowego o dwóch stopniach swobody, zawierającego element sprężysty o charakterystyce niezależnej od położenia masy drgającej [4], w przypadku gdy można pominąć tłumienie w elemencie sprężystym, jako znikome w porównaniu z siłą oporu ruchu masy 2 (rys. 2).

Zgodnie z przyjętymi wyżej oznaczeniami mamy więc  $h_1 \cong 0$ . Dla takiego przypadku określimy okresowe rozwiązania równań ruchu; warunki istnienia rozwiązań okresowych, wynikające z matematycznych i fizycznych ograniczeń wartości parametrów układu, jak również kryteria stabilności strukturalnej.

Oddzielnie rozpatrzony zostanie przypadek ruchu, gdy na masę 2 działa siła oporu o stałej wartości przyłożona skokowo w dowolnej chwili, w przedziale czasu pomiędzy uderzeniami.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważa się układ wibro-uderzeniowy z pneumatycznym elementem sprężystym, w którym wpływ zmiany położenia tłoka względem cylindra<sup>2)</sup> na ciśnienie w przestrzeni sprężania jest znikomy. Ogranicznik ruchu masy 1 (rys. 2) stanowi masę skupioną 2, zawieszoną



Rys. 2. Model dynamiczny układu wibro-uderzeniowego z pneumatycznym elementem sprężystym, bez oporów ruchu w elemencie sprężystym

na sprężynie o liniowej charakterystyce. Ruchowi ogranicznika towarzyszy siła oporu proporcjonalna do prędkości.

Do analizy przyjmujemy następujące założenia.

1. Możliwy jest ruch okresowy masy 1, przy czym okres ruchu równy jest okresowi siły wymuszającej lub jego całkowitej krotności;

2. siła wymuszająca zmienia się harmonicznie i działa w kierunku zgodnym z kierunkiem osi symetrii cylindra w elemencie sprężystym, zaś częstość zmian siły wymuszającej jest stała w ciągu cyklu ruchu układu;

3. nie występuje sprzężenie zwrotne pomiędzy układem a źródłem energii;

<sup>2)</sup> Budowę pneumatycznego elementu sprężystego opisano szczegółowo w pracy [4].

4. czas trwania zderzeń pomiędzy masą 1 i ogranicznikiem 2 jest krótki w porównaniu z okresem ruchu układu (odstępem czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zderzeniami);

5. przekazywanie energii kinetycznej przy zderzeniu określa współczynnik restytucji  $R$ , przybierający wartości z przedziału  $[0; 1]$  oraz spełniający założenia podane w pracy [4];

6. opory ruchu tłoka względem cylindra w elemencie sprężystym są nieznaczne w porównaniu z oporami ruchu masy 2;

7. ruch ogranicznika 2 traktujemy jako drgania masy skupionej zawieszonyj na liniowej sprężynie;

8. środek masy całego układu przesuwa się ruchem jednostajnym, w kierunku ujemnego zwrotu osi  $x$ ;

9. położenie środka masy 1 nie zależy od chwilowego położenia mas niewyważonych wibratora bezwładnościowego, stanowiącego źródło siły wymuszającej drgania;

10. wszystkie parametry układu są zdeterminowane.

Uwzględniając powyższe założenia, ruch układu opisać można dwoma równaniami różniczkowymi:

$$(2.1) \quad \ddot{x}_1 + q = \cos(\tau + \varphi),$$

$$(2.2) \quad \ddot{x}_2 + 2h_2 \dot{x}_2 + s^2 x_2 = \frac{q}{\mu}$$

z warunkami okresowości ruchu (1.3).

### 3. Całkowanie równań ruchu

Ponieważ w równaniu (2.1) nie występują człony zależne od  $x_2$ , zaś równanie (2.2) nie zawiera członów zależnych od  $x$ , więc związek pomiędzy parametrami ruchu obu mas wynika jedynie z warunków okresowości ruchu (1.3)<sup>3)</sup>.

Całka równania (2.1) ma postać

$$(3.1) \quad x_1 = -\frac{q\tau^2}{2} + C_1\tau + C_2 - \cos(\tau + \varphi).$$

Korzystając z warunków (1.3) otrzymamy

$$(3.2) \quad x_1 = -\frac{q\tau^2}{2} + \left(\pi nq - \frac{\delta}{2\pi n}\right)\tau + x_0 + \cos\varphi - \cos(\tau + \varphi),$$

$$(3.3) \quad \dot{x}_1 = -q\tau + \pi nq - \frac{\delta}{2\pi n} + \sin(\tau + \varphi).$$

Całkując równanie (2.2), należy rozważyć trzy przypadki:

1)  $h_2 < s$ ,

2)  $h_2 = s$ ,

3)  $h_2 > s$ .

Dla  $h_2 < s$  otrzymamy

$$(3.4) \quad x_2 = \xi e^{-h_2\tau} (\cos \lambda\tau + E \sin \lambda\tau) + \frac{q}{\mu s^2}$$

<sup>3)</sup> Cechą charakterystyczną układów wibro-uderzeniowych jest zależność warunków okresowości od parametrów układu [1].

oraz

$$(3.5) \quad \dot{x}_2 = -\xi[(h_2 - \lambda E) \cos \lambda \tau + (\lambda + h_2 E) \sin \lambda \tau] e^{-h_2 \tau},$$

przy czym oznaczono

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \lambda &= \sqrt{s^2 - h_2^2}; & \xi &= x_0 - \frac{q}{\mu s^2}; \\ \varepsilon &= 1 - \frac{\delta}{\xi}; & E &= \frac{\varepsilon e^{2\pi n h_2} - \cos 2\pi n \lambda}{\sin 2\pi n \lambda}. \end{aligned}$$

Podstawiając warunki (1.3) do (3.3) i (3.5), otrzymamy po wykonaniu koniecznych przekształceń wyrażenia określające prędkość uderzenia oraz kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą i przemieszczeniem:

$$(3.7) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} + \frac{\xi}{1+R} [(h_2 - \lambda E)(1 - e^{-2\pi n h_2} \cos 2\pi n \lambda) - (\lambda + h_2 E) e^{-2\pi n h_2} \sin 2\pi n \lambda],$$

$$(3.8) \quad \sin \varphi = Rv - \pi n q + \frac{\delta}{2\pi n} - \xi(h_2 - \lambda E).$$

Dla  $h_2 = s$  otrzymamy odpowiednio

$$(3.9) \quad x_2 = \left[ \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2}) - \delta}{2\pi n} \tau e^{2\pi n h_2} + \xi \right] e^{-h_2 \tau} + \frac{q}{\mu s^2},$$

$$(3.10) \quad \dot{x}_2 = \left[ (1 - h_2 \tau) \cdot \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2}) - \delta}{2\pi n} e^{2\pi n h_2} - h_2 \xi \right] e^{-h_2 \tau},$$

$$(3.11) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} + \frac{1}{1+R} \left[ h_2 \delta - \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2}) - \delta}{2\pi n} (e^{2\pi n h_2} - 1) \right],$$

$$(3.12) \quad \sin \varphi = Rv - \pi n q + \frac{\delta}{2\pi n} - h_2 \xi + \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2})}{2\pi n} e^{2\pi n h_2}$$

i wreszcie dla  $h_2 > s$ :

$$(3.13) \quad x_2 = - \frac{e^{-h_2 \tau}}{2e^{-2\pi n h_2} \operatorname{sh}(2\pi n \varkappa)} \left\{ [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] e^{\varkappa \tau} - \right. \\ \left. - [\delta - \xi(1 - e^{2\pi n(h_2 - \varkappa)})] e^{-\varkappa \tau} \right\} + \frac{q}{\mu s^2},$$

$$(3.14) \quad \dot{x}_2 = \frac{e^{-h_2 \tau}}{2e^{-2\pi n h_2} \operatorname{sh}(2\pi n \varkappa)} \left\{ (h_2 - \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] e^{\varkappa \tau} - \right. \\ \left. - (h_2 + \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{2\pi n(h_2 - \varkappa)})] e^{-\varkappa \tau} \right\},$$

gdzie

$$(3.15) \quad \varkappa = \sqrt{h_2^2 - s^2},$$

$$(3.16) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} - \frac{e^{2\pi n h_2}}{2(1+R) \operatorname{sh}(2\pi n \varkappa)} \left\{ (h_2 - \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] (1 - e^{-2\pi n(h_2 - \varkappa)}) + \right. \\ \left. + (h_2 + \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 - \varkappa)})] (1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)}) \right\}$$

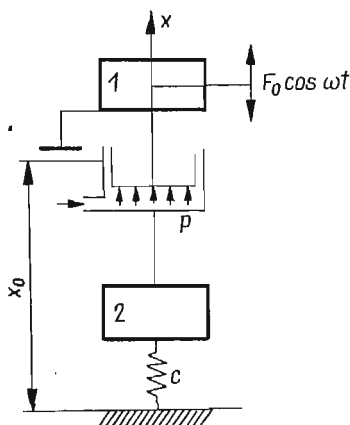
$$(3.17) \quad \sin \varphi = Rv - \pi n q + \frac{\delta}{2\pi n} + \frac{e^{2\pi n h_2}}{2 \operatorname{sh}(2\pi n \varepsilon)} \left\{ (h_2 - \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] - \right. \\ \left. - (h_2 + \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 - \varkappa)})] \right\}.$$

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy opory ruchu ogranicznika 2 są do pominięcia w porównaniu z wartością siły wymuszającej.

Mamy więc  $h_1 = h_2 = 0$ . Model dynamiczny takiego układu przedstawia schematycznie rys. 3. Równania ruchu przybiorą postać

$$(3.18) \quad \ddot{x}_1 + q = \cos(\tau + \varphi),$$

$$(3.19) \quad \ddot{x}_2 + s^2 x_2 = q/\mu.$$



Rys. 3. Schemat układu bez tłumienia

Rozwiązaniem tego układu równań, przy  $s \neq 1$  i  $s \neq \frac{2k+1}{2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), będą związkami:

$$(3.20) \quad x_1 = -\frac{q\tau^2}{2} + \left( \pi n q - \frac{\delta}{2\pi n} \right) \tau + x_0 - \cos \varphi - \cos(\tau + \varphi),$$

$$(3.21) \quad \dot{x}_1 = -q\tau + \pi n q - \frac{\delta}{2\pi n} + \sin(\tau + \varphi),$$

$$(3.22) \quad x_2 = \xi \cos s\tau + \left[ \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2\pi n s} \right) \sin s\tau + \frac{q}{\mu s^2} \right],$$

$$(3.23) \quad \dot{x}_2 = -s\xi \sin s\tau + s \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2\pi n s} \right) \cos s\tau.$$

Prędkość uderzenia określa związek

$$(3.24) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} - \frac{s}{1+R} (2\xi \sin^2 \pi n s - \delta) + \operatorname{tg} \pi n s,$$

zaś kąt przesunięcia fazowego

$$(3.25) \quad \sin \varphi = -\frac{1-R}{1+R} \pi n q + s \left[ \xi \left( 1 - \frac{2R}{1+R} \sin^2 \pi n s \right) + \frac{\delta R}{1+R} \right] \operatorname{tg} \pi n s.$$

Możliwość istnienia ruchów okresowych ograniczona jest warunkiem typu matematycznego, tj. ażeby  $\sin \varphi$  osiągał wartości rzeczywiste

$$(3.26) \quad |\sin \varphi| \leq 1,$$

oraz warunkami typu fizycznego, mianowicie: ażeby prędkość uderzenia była dodatnia

$$(3.27) \quad v > 0,$$

oraz aby siła wywołana ciśnieniem powietrza na dno tłoka w elemencie sprężystym zrównoważyła ciężar masy uderzającej, czyli

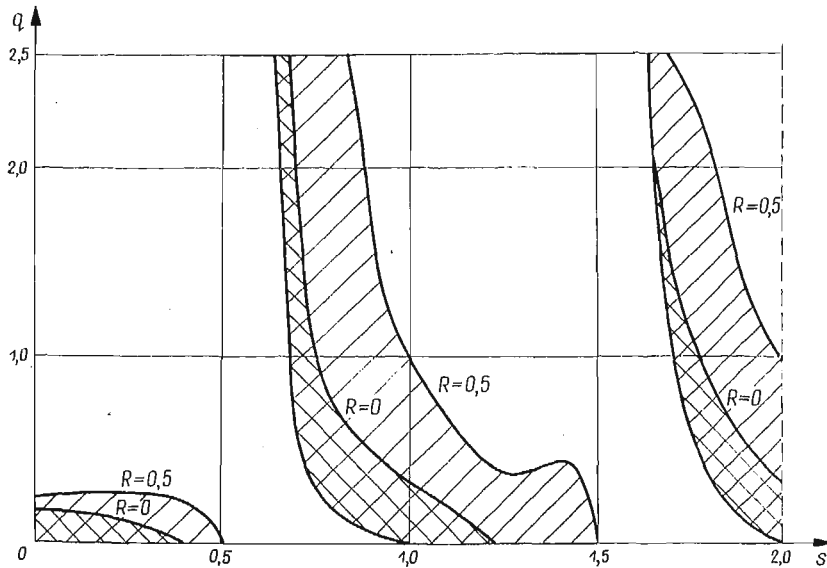
$$(3.28) \quad q > 0.$$

Z (3.26) otrzymamy po wykonaniu koniecznych przekształceń nierówność

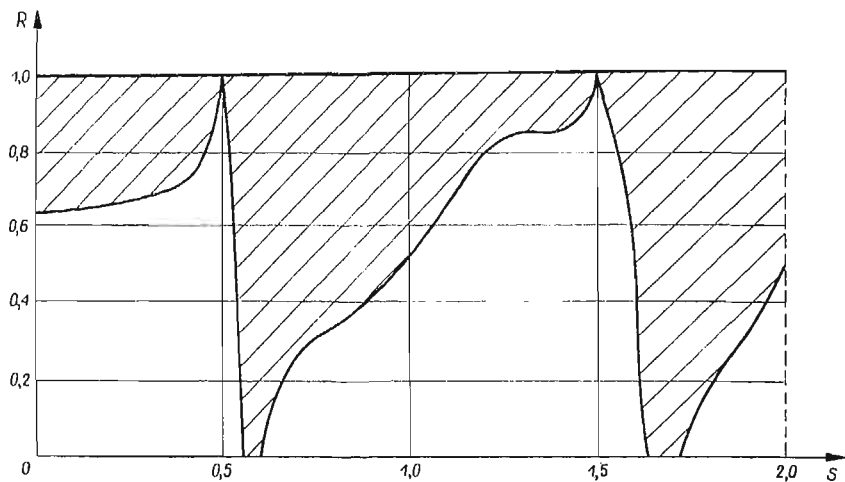
$$\frac{a-1}{b} \leq q \leq \frac{a+1}{b},$$

gdzie

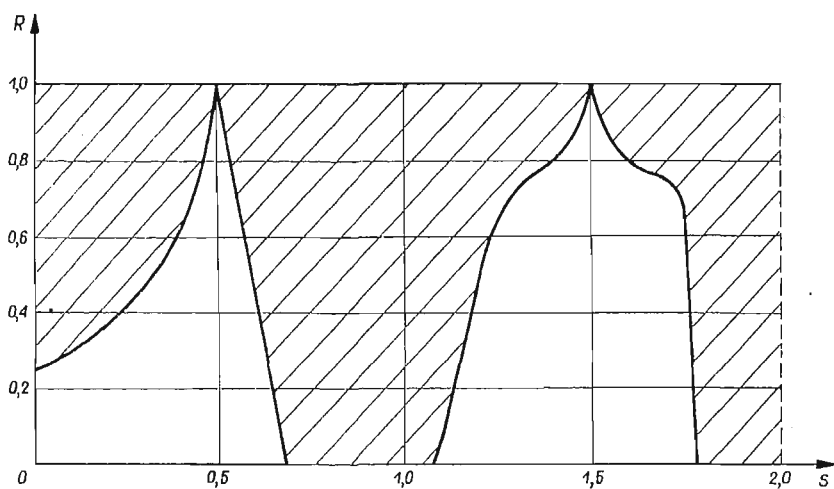
$$(3.29) \quad \left. \begin{aligned} a &= s \left[ \frac{\delta R}{1+R} + x_0 \left( 1 - \frac{2R}{1+R} \sin^2 \pi n s \right) \right] \operatorname{tg} \pi n s, \\ b &= \frac{1-R}{1+R} \pi n + \frac{1}{\mu s} \left( 1 - \frac{2R}{1+R} \sin^2 \pi n s \right) \operatorname{tg} \pi n s \end{aligned} \right\}$$



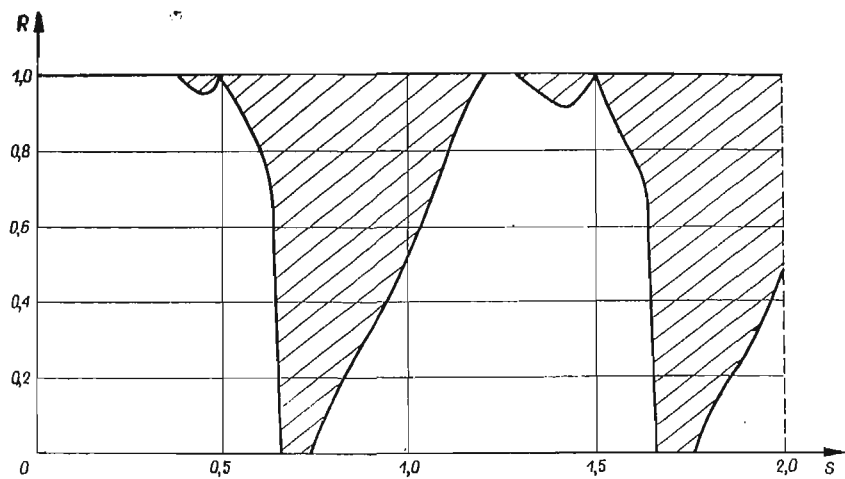
Rys. 4. Zakresy wartości parametrów układu, odpowiadających rozwiązaniom okresowym, przy  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 1$ ; dla  $R = 0$  i  $R = 0,5$



Rys. 5. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin \varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 10$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $q = 1$

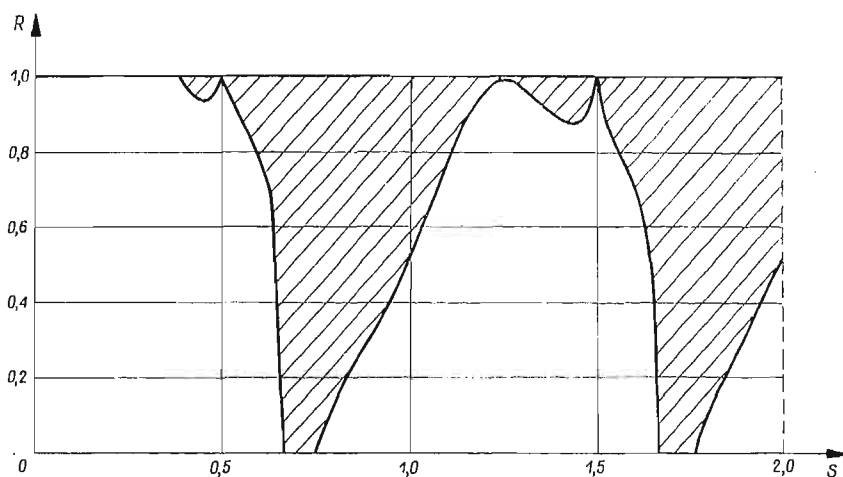
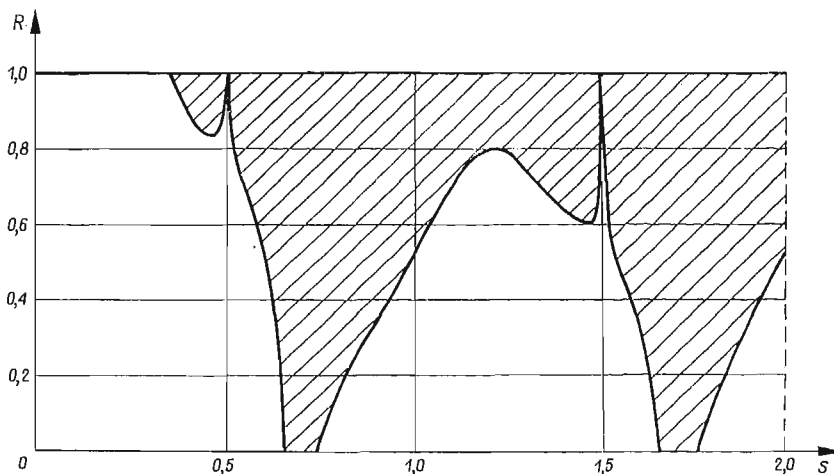


Rys. 6. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin \varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $q = 0,2$



Rys. 7. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin \varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $q = 1$



Rys. 8. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin\varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,1$ ;  $q = 1$ Rys. 9. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin\varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 1$ ;  $q = 1$ 

Warunek (3.27) prowadzi do nierówności

$$(3.30) \quad q > \frac{\mu s^2 (2x_0 \sin^2 \pi n s - \delta) \operatorname{tg} \pi n s}{2(\pi \mu s + \sin^2 \pi n s \operatorname{tg} \pi n s)}$$

Związki (3.28), (3.29) (3.30) określają obszary wartości parametrów, dla których ruch opisany równaniami (3.18) i (3.19) jest okresowy. Na rys. 4-9 przedstawiono graficznie obszary istnienia rozwiązań okresowych dla wybranych wartości parametrów układu.

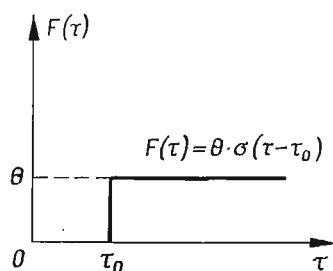
Z wykresów widać, że przy częstotliwości uderzeń równej częstotliwości siły wymuszającej ( $n = 1$ ) w żadnym z przypadków nie istnieje możliwość ruchów okresowych dla  $s = 0,5$ .

## 4. Ruch układu w przypadku dociężenia ogranicznika

Rozpatrzmy przypadek ruchu, gdy ogranicznik dociężony został siłą  $F(\tau)$  (rys. 10) przyłożoną w dowolnej chwili — w przedziale czasu pomiędzy uderzeniami.

Równanie ruchu masy 2 pod działaniem siły  $F(\tau)$  przyjmie postać

$$(4.1) \quad \ddot{x}_2 + s^2 x_2 = \frac{q}{\mu} - \theta \sigma(\tau - \tau_0).$$



Rys. 10.

Stosując do równania (4.1) transformację Laplace'a i wykonując niezbędne przekształcenia, otrzymamy

$$(4.2) \quad x_2 = \xi \cos(s\tau) + \frac{1}{s} \dot{x}_2(0) \sin(s\tau) - \frac{\theta}{s^2} (1 - \tau_0) + \frac{\theta}{s^2} \cos[s(\tau - \tau_0)] + \frac{q}{\mu s^2},$$

$$\dot{x}_2 = -s\xi \sin(s\tau) + \dot{x}_2(0) \cos(s\tau) - \frac{\theta}{s} \sin[s(\tau - \tau_0)],$$

gdzie

$$(4.3) \quad \dot{x}_2(0) = s\xi \operatorname{tg}(\pi ns) + \theta \left[ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right] \frac{1}{\sin(2\pi ns)} - \frac{\delta s}{\sin(2\pi ns)}.$$

Prędkość uderzenia opisuje zależność

$$(4.4) \quad v = \frac{2\pi n}{1+R} q - \frac{1}{1+R} \left\{ \left[ 2s\xi + \theta \left( \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right) \right] \operatorname{tg} \pi ns - \right. \\ \left. - \frac{\theta}{s} \sin s(2\pi n - \tau_0) - \delta s \operatorname{ctg} 2\pi ns \right\},$$

kąt zaś przesunięcia fazowego

$$(4.5) \quad \sin \varphi = \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right] \operatorname{ctg} \pi ns - \frac{\theta}{2s} \sin s(2\pi n - \tau_0) - \\ - \frac{v(1-R)}{2} - \delta s \operatorname{ctg} 2\pi ns.$$

Porównując odpowiednio związki (3.22) (3.25) i (4.2)–(4.5), można ocenić wpływ dociężenia masy 2 siłą  $F(\tau)$ .

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &= (x_2)_0 - x_2, & \Delta v &= v_0 - v, \\ \Delta \dot{x}_2 &= (\dot{x}_2)_0 - \dot{x}_2, & \Delta(\sin \varphi) &= (\sin \varphi)_0 - \sin \varphi,\end{aligned}$$

(indeks  $\theta$  oznacza wielkość liczoną z uwzględnieniem dociążenia).

Po wykonaniu koniecznych działań otrzymamy

$$(4.6) \quad \Delta x_2 = \frac{\theta}{s^2} \left\{ (1 - \tau_0) \left( 1 - \frac{\sin s\tau}{\sin 2\pi ns} \right) + \cos[s(\tau - \tau_0)] - \frac{s \cos[s(2\pi n - \tau_0)] \sin s\tau}{\sin 2\pi ns} \right\},$$

$$(4.7) \quad \Delta \dot{x}_2 = \theta \left\{ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos[s(2\pi n - \tau_0)] \right\} \frac{\cos s\tau}{\sin 2\pi ns} - \frac{\theta}{s} \sin[s(\tau - \tau_0)],$$

$$(4.8) \quad \Delta v = -\frac{s\xi}{1+R} \sin 2\pi ns - \frac{\theta s}{1+R} \{ [1 - \tau_0 + s \cos s(2\pi n - \tau_0)] \operatorname{tg} \pi ns + \\ + \sin s(2\pi n - \tau_0) \} + \frac{s\delta}{1+R} (2 \operatorname{tg} \pi ns - \operatorname{ctg} 2\pi ns),$$

$$(4.9) \quad \Delta(\sin \varphi) = \frac{\theta}{2} \left( \operatorname{ctg} \pi ns + \frac{1-R}{1+R} \operatorname{tg} \pi ns \right) \left[ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right] - \\ - \frac{\theta}{s} \sin s(2\pi n - \tau_0) - \frac{2s\xi R}{1+R} \left( 1 + \frac{\sin^2 \pi ns}{1+R} \right) \operatorname{tg} \pi ns - \frac{\delta s}{1+R} [(1+3R) \operatorname{ctg} \pi ns + R \operatorname{tg} \pi ns].$$

W przypadku szczególnym, gdy dociążenie pojawia się na początku cyklu ruchu, czyli  $\tau_0 = 0$ , związki (4.6) – (4.9) przyjmą postać

$$(4.10) \quad \Delta x_2 = \frac{\theta}{s^2} \left[ 1 + \cos s\tau - \frac{\sin s\tau}{\sin 2\pi ns} (1 + s \cos 2\pi ns) \right],$$

$$(4.11) \quad \Delta \dot{x}_2 = \frac{\theta}{s} \left[ (1 - s \cos 2\pi ns) \frac{\cos(s\tau)}{\sin 2\pi ns} - \sin(s\tau) \right],$$

$$(4.12) \quad \Delta v = -\frac{s\xi}{1+R} \sin 2\pi ns - \frac{\theta}{s(1+R)} [(1 + s \cos 2\pi ns) \operatorname{tg} \pi ns + \sin 2\pi ns] + \\ + \frac{s\delta}{1+R} (2 \operatorname{tg} \pi ns - \operatorname{ctg} \pi ns),$$

$$(4.13) \quad \Delta(\sin \varphi) = \frac{\theta}{2} \left( \operatorname{ctg} \pi ns + \frac{1-R}{1+R} \right) \left( \frac{1}{s} - \cos 2\pi ns \right) - \\ - \frac{\theta}{s} \sin 2\pi ns - \frac{2sR}{1+R} \xi \left( 1 + \frac{\sin^2 \pi ns}{1+R} \right) \operatorname{tg} \pi ns - \\ - \frac{s\delta}{1+R} [(1+3R) \operatorname{ctg} \pi ns + R \operatorname{tg} \pi ns].$$

### 5. Stabilność strukturalna układu

Z punktu widzenia zastosowań technicznych badanie stabilności strukturalnej przynosi szczególnie korzyści, gdyż pozwala określić wpływ błędów realizacji układu na charakter ruchu.

Dla określenia warunków stabilności strukturalnej posłużymy się metodą «dopasowywania» [1], polegającą na nadaniu stałym w całkach ogólnych równań opisujących ruch układu, pewnych małych zaburzeń (przyrostów), a następnie na porównaniu ruchu zaburzonego i niezaburzonego, przy liczbie przedziałów ruchu dążącej do nieskończoności.

Niech całki ogólne równań (3.18) i (3.19) mają postać

$$(5.1) \quad x_1 = x_1(\tau; C_1; C_2; \varphi),$$

$$(5.2) \quad x_2 = x_2(\tau; C_3; C_4).$$

Nadajmy stałym  $C_1; C_2; C_3; C_4$  oraz kątowni przesunięcia fazowego  $\varphi$  — małe przyrosty — odpowiednio:  $\alpha_v; \beta_v; \gamma_v; \sigma_v; \Delta_v$ . Ruch układu zostanie zaburzony, a całki ogólne dla ruchu zaburzonego w  $\nu$ -tym przedziale przyjmą postać:

$$(5.3) \quad x_1^{(\nu)} = x_1^{(\nu)}(\tau; C_1 + \alpha_{\nu-1}; C_2 + \beta_{\nu-1}; 2\pi n + \delta_\nu; \varphi + \Delta_{\nu-1}),$$

$$(5.4) \quad x_2^{(\nu)} = x_2^{(\nu)}(\tau; C_3 + \gamma_{\nu-1}; C_4 + \sigma_{\nu-1}; 2\pi n + \delta_\nu).$$

Czas trwania  $\nu$ -go cyklu ruchu wynosić będzie  $(2\pi n + \delta_\nu)$  zamiast  $2\pi n$ .

Określmy różnicę pomiędzy ruchem zaburzonym i niezaburzonym na końcu  $\nu$ -go przedziału ruchu

$$(5.5) \quad \Delta x_{1k}^{(\nu)} = x_1^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - x_1(2\pi n),$$

$$(5.6) \quad \Delta x_{2k}^{(\nu)} = x_2^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - x_2(2\pi n),$$

oraz na początku  $(\nu+1)$ -go przedziału

$$(5.7) \quad \Delta x_{1p}^{(\nu+1)} = x_1^{(\nu+1)}(0) - x_1(0),$$

$$(5.8) \quad \Delta x_{2p}^{(\nu+1)} = x_2^{(\nu+1)}(0) - x_2(0).$$

Podobnie określimy przyrosty pochodnych na końcu  $\nu$ -go przedziału

$$(5.9) \quad \Delta \dot{x}_{1k}^{(\nu)} = \dot{x}_{1k}^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - \dot{x}_1(2\pi n),$$

$$(5.10) \quad \Delta \dot{x}_{2k}^{(\nu)} = \dot{x}_{2k}^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - \dot{x}_2(2\pi n),$$

oraz na początku  $(\nu+1)$ -go przedziału

$$(5.11) \quad \Delta \dot{x}_{1p}^{(\nu+1)} = \dot{x}_{1p}^{(\nu+1)}(0) - \dot{x}_1(0),$$

$$(5.12) \quad \Delta \dot{x}_{2p}^{(\nu+1)} = \dot{x}_{2p}^{(\nu+1)}(0) - \dot{x}_2(0).$$

Ażeby ruch był stabilny, określone wyżej przyrosty spełniać muszą następujące warunki:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \Delta x_{1p}^{(\nu+1)} &= \Delta x_{1k}^{(\nu)}, & \Delta x_{2p}^{(\nu+1)} &= \Delta x_{2k}^{(\nu)}, & \Delta x_{1k}^{(\nu)} &= \Delta x_{2k}^{(\nu)}, \\ \Delta \dot{x}_{1p}^{(\nu+1)} &= -R \Delta \dot{x}_{1k}^{(\nu)}, & \Delta \dot{x}_{2p}^{(\nu+1)} &= -R \Delta \dot{x}_{2k}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Po wykonaniu koniecznych przekształceń warunki (5.13) sprowadzą się do układu równań różnicowych, liniowych, jednorodnych, względem przyrostów  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \sigma_v, \Delta_v$ . Rozwiązań tego układu poszukujemy w postaci

$$(5.14) \quad \alpha_v = k_1 e^{\nu}, \quad \beta_v = k_2 e^{\nu}, \quad \gamma_v = k_3 e^{\nu}, \quad \sigma_v = k_4 e^{\nu}, \quad \Delta_v = k_5 e^{\nu},$$

gdzie  $k_1, \dots, k_5$  — pewne stałe.

Podstawiając (5.11) do układu równań, wyprowadzonych z warunków (5.13), otrzymamy układ równań algebraicznych, liniowych, względem stałych  $k_1, \dots, k_5$ . Z kolei

tworzymy wyznacznik charakterystyczny tego układu równań. Zerowanie się tego wyznacznika jest warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań niezerowych układu.

Rozwijając wyznacznik charakterystyczny, otrzymano równanie algebraiczne względem  $\varepsilon$ .

Ażeby układ był stabilny, przyrosty  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \sigma_v, \Delta_v$  muszą dążyć do zera przy liczbie przedziałów ruchu  $\nu$  dążącej do nieskończoności. Wynika stąd warunek

$$(5.15) \quad |\varepsilon| < 1;$$

czyli moduły pierwiastków równania charakterystycznego muszą być mniejsze od jedności.

Warunek konieczny i dostateczny spełnienia związku (5.15) wyznaczmy, posługując się twierdzeniem Schura [1]. Zgodnie z tym twierdzeniem moduły pierwiastków równania charakterystycznego są mniejsze od jedności, gdy zachodzi nierówność

$$(5.16) \quad |W_i| < 1,$$

gdzie  $W_i$  oznacza wielomiany utworzone ze współczynników równania charakterystycznego.

Dla rozpatrywanego układu wielomiany  $W_i$  mają postać:

$$(5.17) \quad W_0 = \frac{a_4}{a_0},$$

$$(5.18) \quad W_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_4}{a_0^2 - a_4^2},$$

$$(5.19) \quad W_2 = \frac{(a_0 a_1 - a_3 a_4)(a_0^2 - a_4^2 - a_0 a_3 + a_1 a_4)}{(a_0^2 - a_4^2)^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_4)^2},$$

$$(5.19) \quad W_3 = (a_0 - a_4) \times$$

$$\times \left[ \frac{(a_0^2 - a_4^2)[(a_0^2 - a_4^2) - (a_0 a_1 - a_3 a_4)] - (a_0 a_3 - a_1 a_4)[(a_0 a_3 - a_1 a_4) - (a_0 a_1 - a_3 a_4)]}{[(a_0^2 - a_4^2)^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_4)^2]^2 - (a_0 a_1 - a_3 a_4)^2 [a_0^2 - a_4^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_4)]^2} \right] \times$$

$$\times [(a_0 + a_4)(a_0 a_1 - a_3 a_4) - a_2(a_0 a_3 - a_1 a_4)]:$$

W związkach (5.17)–(5.19) oznaczono:

$$(5.20) \quad a_0 = s[\pi n q + \sin \varphi - s \xi \operatorname{tg} \pi n s + \delta s \operatorname{ctg} 2 \pi n s] \cos 2 \pi n s.$$

$$(5.21) \quad a_1 = 2s(\pi n q + \sin \varphi)(R - \cos^2 \pi n s) \cos 2 \pi n s - 2s^2(2 - R) \xi \sin 2 \pi n s \sin^2 \pi n s +$$

$$+ \delta s^2(2 - R) \operatorname{ctg} 2 \pi n s + 1.$$

$$(5.22) \quad a_2 = s^2 \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2 \pi n s} \right) [R^2 - 2R - (1 - 2R) \cos^2 \pi n s] -$$

$$- \frac{s^2}{2} (1 - 2R) \xi \sin 4 \pi n s + 2 \pi n s [(1 + R) \cos \varphi - R q] +$$

$$+ s(\pi n q + \sin \varphi) [(1 - 2R) \cos^2 2 \pi n s - R(2 - R) \cos 2 \pi n s - R s \sin^2 2 \pi n s].$$

$$(5.23) \quad a_3 = R s \left\{ (\pi n q + \sin \varphi) [1 + \cos^2 2 \pi n s - R(\cos 2 \pi n s + \sin^2 2 \pi n s)] + \right.$$

$$+ 2 \pi n (1 + R) (\cos 2 \pi n s + \sin^2 2 \pi n s) \cos \varphi + (1 - R) \cos 2 \pi n s +$$

$$\left. + s \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2 \pi n s} \right) (1 - 2R + \cos^2 2 \pi n s) \right\}.$$

$$(5.24) \quad a_4 = R^2 s \left[ \pi n q + \sin \varphi + s \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta s}{\sin 2 \pi n s} + 2 \pi n q (\cos 2 \pi n s + \sin^2 2 \pi n s) \right].$$

Zależności (5.17)–(5.19) określają warunki stabilności strukturalnej układu wibro-uderzeniowego, opisanego równaniami (3.18) i (3.19). Na podstawie tych związków można określić obszary wartości parametrów układu, dla których ruch pozostaje okresowy po wprowadzeniu małych zaburzeń.

Taka metoda badania stabilności daje istotne informacje dla praktyki konstrukcyjnej, ponieważ pozwala ocenić wpływ błędów powstających przy technicznej realizacji urządzenia na charakter jego pracy.

Warunki (5.17)–(5.19), po podstawieniu do nich wartości współczynników  $a_0 \div a_4$ , przybierają złożoną postać, co utrudnia znacznie ich praktyczne wykorzystanie.

Numeryczne określenie dopuszczalnych wartości poszczególnych parametrów wymagałoby zaangażowania szczególnie wydajnych środków obliczeniowych na długi okres czasu.

Tak więc, korzystanie z powyższych warunków stabilności sprowadza się do możliwości sprawdzenia stabilności strukturalnej układu o przyjętych uprzednio parametrach.

## 6. Uwagi końcowe

W przedstawionych wyżej rozważaniach badano model dynamiczny układu wibro-uderzeniowego, w którym ogranicznik stanowił masę skupioną, zawieszoną na elemencie podatnym, o liniowej charakterystyce. Opisany model przedstawiać może wibro-uderzeniowe urządzenie do pograżania pali, z pneumatycznym elementem sprężystym, przy czym masa 2 odpowiada w układzie rzeczywistym elementowi pograżanemu i drgającej wraz z nim części otaczającego gruntu.

Jakkolwiek taki model ruchu elementu pograżanego jest znacznie uproszczony w stosunku do warunków rzeczywistych, to jednak jego analiza daje szereg informacji istotnych dla oceny wpływu podatności elementu pograżanego na pracę urządzenia do pograżania.

Jak widać z rys. 4–9, bardzo istotne znaczenie ma dobór częstości wymuszającej drgania, a w szczególności «omijanie» wartości

$$s = \frac{2k+1}{2},$$

gdyż dla tych wartości  $s$  nie ma możliwości realizacji ruchu ustalonego.

Wartość  $\delta$  określa prędkość pograżania. Jak wynika z rys. 7–9, większym prędkościom pograżania odpowiadają większe obszary stabilnej pracy.

Wyrażenie  $\theta\sigma(\tau - \tau_0)$  — po prawej stronie równania (4.1) interpretować można jako dociążenie urządzenia do pograżania, wywołane wejściem elementu pograżanego w nową warstwę podłoża, o większym oporze.

Na podstawie wyprowadzonych zależności można stwierdzić, że wpływ dociążenia wywołanego przejściem przez granicę dwóch różnych warstw gruntu — zarówno ilościowy, jak i jakościowy — jest istotny i zależy od stosunku częstości własnej elementu pograżanego do częstości wymuszającej.

Porównując wyniki analizy rozpatrywanego wyżej modelu z odpowiednimi wynikami, otrzymanymi w pracy [4], dla układu ze sztywnym ogranicznikiem, można stwierdzić wyraźny jakościowy i ilościowy wpływ podatności elementu pograżanego.

Złożona forma rozwiązań wskazuje na celowość zastosowania w badaniach takich układów techniki modelowania analogowego.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. Е. Ковринский, *Механизмы с упругими связями*, Москва 1964.
2. X. И. Раскин, *О переходных режимах при движении с односторонними ударами*, Сб. Вопросы динамики и прочности, № 15, Рига 1967.
3. О. А. Савинов, А. Я. Лускин, *Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве*, Ленинград 1960.
4. Z. WIŚNIEWSKI, *Badania układu wibro-uderzeniowego z pneumatycznym elementem sprężystym*, Archiwum Budowy Maszyn, 3 (1968).
5. Z. WIŚNIEWSKI, *Układ wibro-uderzeniowy z pneumatycznym elementem sprężystym i z podatnym ogranicznikiem*, Archiwum Budowy Maszyn 1(1972).

#### Резюме

#### АНАЛИЗ НЕКОТОРОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В статье описаны исследования виброударной системы с пневматическим упругим элементом и с подвижным ограничителем.

Экспериментальные исследования такой системы с жестким ограничителем, проведенные ранее автором, показали что система обладает возможностью непрерывной регулировки частоты ударов во время работы устройства.

В настоящей работе рассматривается модель, состоящая из двух масс, одна из которых соответствует массе погружаемого элемента и вибрирующей вместе с ним части грунта, так как исследуемая система представляет динамическую модель виброударного погружающего устройства. Для этой системы решаются дифференциальные уравнения движения при отсутствии рассеяния энергии в пневматическом упругом элементе. Особо рассмотрен случай движения без затухания. Для этого случая решены уравнения движения, вычислены главные параметры системы, выведены условия структурной устойчивости. Рассмотрен случай нестационарного движения, вызванного внезапным действием постоянной внешней силы. Некоторые результаты исследований изображены на графиках. Выведенные в работе формулы могут найти применение при проектировании виброударных погружателей.

#### S u m m a r y

#### ON CERTAIN VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

The paper deals with a vibratory-impact system with pneumatic suspension element and a movable stop.

The experimental investigation of the model of a similar system (with a rigid stop) which had been carried out formerly by the author, proved an important feature of the system, namely the possibility of continuous control of impact frequency during the work of the system.

The model considered in this paper consists of two masses, one of which represents the mass of a driven pile and the vibrating part of surrounding soil (the system investigated is to be applied to pile driving). Equations of motion are formulated and solved under the assumption of negligibility of energy dissipation in pneumatic suspension element. The main parameters of motion are calculated.

The case of system with no energy dissipation received a special treatment. For that case the main parameters of motion were calculated. The structural stability conditions were formulated. The non-stationary motion caused by suddenly applied external force was considered as an analogy of the behaviour of a real system, while the driven pile passes the contact surface of two layers of soil.

Some results of the analysis is presented by graphs. The formulae derived in the paper might be applied in the vibratory-impact pile drivers design.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 września 1970 r.; po raz drugi dnia 1 marca 1971 r.*

---