MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 10 (1972)

TEORIA OŚRODKÓW WIELOFAZOWYCH

CZESŁAW EIMER (WARSZAWA)

1. Definicja ośrodka wielofazowego. Założenia podstawowe

Przez ośrodki wielofazowe rozumiemy ośrodki niejednorodne o budowie ziarnistej, takie jak metale, materiały ceramiczne, beton, skały, polimery zbrojone itp. Skład chemiczny, krystalograficzny itd. są z punktu widzenia teorii obojętne, dopóki spełnione są podstawowe założenia teorii, o których zaraz będzie mowa.

Słowo «faza» ma w mechanice i fizyce wiele znaczeń i występuje w różnych kontekstach, jak np. «przestrzeń fazowa» w mechanice statystycznej, «faza» układu drgającego w dynamice, «układ wielofazowy» w termodynamice i in. W teorii ośrodków wielofazowych określenie «faza» używane jest w specjalnym znaczeniu i, aby uniknąć nieporozumień, mówimy również, zamiast o ośrodkach wielofazowych, o ośrodkach *złożonych*. Nie należy zwłaszcza utożsamiać naszej «fazy» ze zbliżonym pojęciem w termodynamice, gdzie przez «fazę jednolitą» rozumie się część układu o tych samych wartościach parametrów intensywnych.

Układ definicji teorii ośrodków wielofazowych jest następujący. Rozważamy ośrodek ciągły niejednorodny specjalnego typu, mianowicie o własnościach obszarami stałych. Uważamy, że ośrodek składa się z ziaren i powierzchni ograniczających ziarna — granic ziaren. Przez *ziarno* rozumiemy obszar (w zagadnieniu przestrzennym — obszar przestrzeni trójwymiarowej) wypełniony ośrodkiem ciągłym jednorodnym, tj. o stałych własnościach, włącznie z orientacją przestrzenną. Nieco ściślej — obszar otwarty, w którym pole tensorowe opisujące rozważaną własność kierunkową (np. pole tensora sprężystości) jest stałe. Do opisu zjawisk w ziarnie stosuje się więc teoria ośrodka ciągłego; aby odpowiadało to fizycznej rzeczywistości, musimy założyć, że rozmiary ziaren są duże w stosunku do odległości międzycząsteczkowych. Przez *fazę* rozumiemy zbiór ziaren tego samego typu, różniących się wyłącznie orientacją, ściślej — obszar o stałym odnośnym polu tensorowym z dokładnością do pełnej grupy transformacji ortogonalnych (tj. włączając odbicie zwierciadlane). Zakładamy, że liczba faz w ośrodku jest skończona, zaś zbiór ziaren — przeliczalny. Podane określenia umożliwiają definiowanie różnych wielkości *fazowych*, np. średnich w danej fazie.

Zgodnie z wyżej powiedzianym, najprostszym ośrodkiem złożonym jest ośrodek jednofazowy (ziarna różnią się tylko orientacją), w szczególności *polikryształ*. Teoria polikryształu stanowi przejście do teorii ośrodków wielofazowych. Z drugiej strony, przejście takie stanowi teoria ośrodka o fazach izotropowych, w których pojęcia ziarna i fazy utożsamiają się.

Dotychczas nic nie mówiliśmy o geometrii wewnętrznej ośrodka, określającej formę i rozmieszczenie ziaren i faz. Może ona mieć charakter *deterministyczny* (przykładem mogą być konstrukcje z betonu zbrojonego) lub *stochastyczny* (losowy). Ten ostatni przypadek jest charakterystyczny dla materiałów (nie konstrukcji!) i do niego w zasadzie ogranicza się teoria ośrodków wielofazowych, którą należałoby ściślej określić mianem teorii ośrodków stochastycznych wielofazowych.

Podstawowym założeniem teorii na jej obecnym etapie rozwoju jest *niezmienność geometrii wewnętrznej* w toku rozważanego procesu fizycznego (myślimy o niezmienności wzajemnego położenia cząstek, z dokładnością do ruchu sztywnego). Tym samym wyłączone są z rozważań zagadnienia mechaniki ośrodków (do których się ograniczymy), gdzie decydujące znaczenie ma ruch i energia kinetyczna, jak np. teoria turbulencji lub teoria zawiesin. Opis ruchu jest opisem Lagrange'a i ogranicza się do rozważania pól odkształceń, o których zakładamy, że są małe. Są to założenia charakterystyczne dla ciała stałego, aczkolwiek nie wyklucza się, że pewne ziarno może stanowić ciecz, w sensie inkluzji materiału nie stawiającego oporu odkształceniom postaciowym. Zgodnie z tym, na obecnym etapie teoria ośrodków wielofazowych jest teorią *liniową* geometrycznie. W konsekwencji, poza zakresem rozważań pozostaje problematyka związana z topologią ośrodka, np. nieistotna jest kwestia, czy ziarna lub fazy stanowią obszary jednospójne, czy też nie. Z pewnych przyczyn, które staną się jasne w dalszym ciągu, dogodnie jest jednak wydzielić klasę ośrodków, w których ziarna o postaci obszarów jednospójnych są «zanurzone» w ośrodku macierzystym. Mówimy wówczas o *zawiesinie*, przy czym jeśli inkluzje są dostatecznie od siebie odległe, by ich wzajemne oddziaływanie było pomijalne, mówimy o *zawiesinie rzadkiej*.

2. Zakres poszukiwań

Na ogół za punkt startowy poszukiwań w dziedzinie ośrodków wielofazowych uważa się pracę EINSTEINA z r. 1906 [26], w której określił on lepkość zawiesiny rzadkiej sztywnych kulek.

W ogólności klasyczny problem teorii ośrodków wielofazowych stanowi określenie *makroskopowych własności materiałów* («stałych materiałowych») na podstawie znanych własności faz i probabilistycznego opisu geometrii wewnętrznej. Najbardziej podstawowym elementem opisu ośrodka jest podanie koncentracji faz (stosunku objętości fazy do objętości ośrodka). Niewątpliwie u podstaw rozważań pierwszych badaczy tkwiło przeświadczenie, że znajomość koncentracji jest wystarczająca dla wyznaczenia własności makroskopowych. W tym kręgu rozumowań mieszczą się podstawowe prace: VOIGTA z r. 1910 [93] i REUSSA z r. 1929 [79], którzy określili stałe sprężystości ośrodka izotropowego o fazach izotropowych. VOIGT określił makroskopowe stałe sprężystości w postaci średnich arytmetycznych ze stałych fazowych, co odpowiada założeniu jednorodnego (stałego) pola odkształceń w ośrodku wielofazowym

$$\mu_V = \sum_i \nu_i \mu_i, \qquad \varkappa_V = \sum_i \nu_i \varkappa_i;$$

tutaj μ, $\varkappa$ oznaczają stałe sprężystości postaciowej i objętościowej, ν_i koncentrację fazy i, wskaźnik V oznacza stałą Voigta. Reuss podał wyrażenia w postaci średnich harmonicznych, co jest równoznaczne z przyjęciem jednorodnego pola naprężeń,

$$\frac{1}{\mu_R} = \sum_i \frac{\nu_i}{\mu_i}, \qquad \frac{1}{\varkappa_R} = \sum_i \frac{\nu_i}{\varkappa_i}$$

(R oznacza stałą Reussa). Dzisiaj wiemy (wykazał to ściśle dopiero HILL, [43]), że stałe Voigta i Reussa nie są co prawda ogólnymi rozwiązaniami, natomiast stanowią ograniczenia stałych makroskopowych, mianowicie

$$\mu_R \leqslant \mu \leqslant \mu_V, \qquad \varkappa_R \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_V$$

i w tym sensie grają ważną rolę w teorii sprężystości ośrodków wielofazowych, uwypukloną specjalnymi ich oznaczeniami (podanymi wyżej).

Okres międzywojenny charakteryzował się podejściem podobnym, polegającym na bezpośrednim uśrednianiu różnych wielkości, przy czym problem skupiał zainteresowanie głównie metalografów i krystalografów. Znane są z tego okresu prace BOASA, SCHMIDA, BRUGGEMANA, HUBERA, RÖHLA i in. [7], [8], [12], [42], [82]. Naturalną kontynuacją tych badań są ujęcia wariacyjne (por. p. 3).

Problem stałych materiałowych formułujemy dzisiaj ogólniej jako określenie *równania konstytutywnego* ośrodka, gdy znane są także równania dla poszczególnych faz. Niech na przykład w zagadnieniu reologicznym dla ośrodka o fazach izotropowych L będzie operatorem liniowym określającym historię naprężenia $\boldsymbol{\sigma}(t)$, gdy zadana jest historia odkształcenia $\boldsymbol{\epsilon}(t)$, znanym dla każdej fazy i

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = L_i \boldsymbol{\epsilon}.$$

Zadanie polega na znalezieniu operatora makroskopowego $\hat{L}$ wiążącego odnośne «makro»-historie

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{L}\bar{\boldsymbol{\epsilon}},$$

gdzie kreska pozioma nad symbolem oznacza wynik operacji uśredniania (do kwestii, co pod tą operacją rozumiemy, powrócimy poniżej). Lokalność związków fenomenologicznych zachowujemy rozpatrując ośrodek nieograniczony i pola statystycznie jednorodne. W literaturze spotyka się tu pojęcia (nieprecyzyjne) objętości reprezentatywnej (np. [39]), dużej w stosunku do rozmiarów ziaren, małej w porównaniu ze zmianami makroskopowymi pola, po której przeprowadzamy uśrednianie.

Jak widać, określanie własności makroskopowych ośrodka związane jest z wyznaczaniem wartości oczekiwanych (przeciętnych). Problemem szerszym, ogólniejszym zadaniem teorii, jest określenie wszelkich charakterystyk probabilistycznych *pól losowych* (np. naprężenia i odkształcenia) w postaci np. funkcji korelacyjnych lub (wielowymiarowych) rozkładów prawdopodobieństwa dowolnego rzędu. Na takiej podstawie można rozpatrywać szereg zagadnień specjalnych, jak np. tzw. *problem skali* (m.in. zależność fluktuacji wielkości uśrednianych od rozmiarów obszaru uśredniania), problem wartości *ekstremalnych* (np. rozkłady prawdopodobieństwa pewnych wielkości ekstremalnych w określonej objętości), *tworzenie* nowych stałych materiałowych (np. związanych z energią odkształcenia, z funkcjami wytężenia lub opisujących fluktuację) i in. Praktyczne znaczenie naszkicowanej problematyki jest oczywiste.

Oddzielny kierunek rozwoju związany jest z *zagadnieniem brzegowym*; uzyskano tu nowe wyniki o charakterze poznawczym. W szczególności okazuje się, że makroskopowy tensor sprężystości zależny jest od położenia, mimo że geometria wewnętrzna ośrodka opisuje się polem stochastycznie jednorodnym — pojawia się zatem *efekt brzegowy*; w konsekwencji ciało jest sprężyście (makroskopowo) niejednorodne. W ogólności występuje również zależność od pola obciążenia — tensor sprężystości przekształca się w operator sprężystości i problem staje się nielokalny; tym samym określenie «stałe materiałowe» może być tylko luźno rozumiane.

Teoria ośrodków wielofazowych obejmuje różne problemy fizyczne, w zależności od typu równania (operatora) i rzędu pola tensorowego; dla ilustracji wymienimy:

— w zakresie równań *eliptycznych*: problem stałej dielektrycznej i przenikalności magnetycznej; problem tensora sprężystości; zagadnienia ze źródłami dystorsji, np. makroskopowy współczynnik rozszerzalności cieplnej;

— w zakresie równań *parabolicznych*: wyznaczenie stałych dyfuzji, stałych przewodnictwa cieplnego, oporności elektrycznej; charakterystyki różnorodnych pól przepływu;

— w zakresie równań *hiperbolicznych* bogata problematyka propagacji fal w ośrodku wielofazowym: określenie charakterystyk dyspersji, dyfrakcji, tłumienia, polaryzacji, rozkładu widmowego fal; problematyka fal powierzchniowych.

Ogólnie można powiedzieć, że w zasadzie każde zagadnienie fizyki ośrodków ciągłych ma swojego reprezentanta w zakresie ośrodków stochastycznych wielofazowych.

3. Metody matematyczne

Postępy teorii ośrodków wielofazowych zależą być może w większym stopniu od rozwoju metod matematycznych, aniżeli od typu zagadnienia fizycznego.

W obecnej chwili dominują dwie metody, wariacyjna i probabilistyczna, przy czym większość prac korzysta z ujęcia *wariacyjnego* i ogranicza się do rozwiązań przybliżonych. Kierunek ten można scharakteryzować jako poszukiwane odpowiedzi na pytanie: co można powiedzieć o własnościach makroskopowych ośrodka, gdy znana jest tylko *koncentracja* faz? Odpowiedź jest taka, że poszukiwanie wielkości można zamknąć w odpowiednie obustronne nierówności i postęp polega w pierwszym rzędzie na zacieśnianiu tych ostatnich. Pomijając odosobnione przypadki, gdy tą drogą można dojść do rozwiązania ścisłego, istnieją określone «granice» owego zacieśniania, których przekroczyć nie można bez dokładniejszych informacji o geometrii wewnętrznej. W szeregu przypadków udało się osiągnąć te «granice», tj. wykazać, że przy danej wyłącznie koncentracji faz nie istnieje przybliżenie lepsze od uzyskanego. Kierunek ten ma szczególne znaczenie praktyczne, inżynierskie, gdyż koncentracja faz jest zwykle wielkością znaną, a końcowe formuły sprowadzają się do pewnych wyrażeń algebraicznych.

Kierunek *probabilistyczny* zakłada znajomość geometrii wewnętrznej z dowolną dokładnością w sensie opisu pola losowego metodami probabilistycznymi. Uzyskanie takiego opisu drogą eksperymentalną jest na ogół dość pracochłonne i wymaga użycia korelatorów mechanicznych. Wyniki (zwykle w postaci pewnych szeregów całkowych) wymagają, przy przejściu do obliczeń numerycznych, zastosowania maszyn cyfrowych. Natomiast tą drogą uzyskuje się rozwiązanie ścisłe i można zbudować zamkniętą teorię zagadnienia. Stosownie do sposobu opisu pola losowego można wyróżnić tu trzy główne metody: metodę *funkcji korelacyjnych*, metodę *analizy harmonicznej*, oraz zastosowanie wielowymiarowych *rozkładów prawdopodobieństwa*, ogólniej, funkcjonałów prawdopodobieństwa i funkcjonałów charakterystycznych. Niemal cała uwaga, jak dotąd, koncentruje się na ujęciu korelacyjnym, najbardziej bezpośrednim.

Z uwagi na znaczenie obu ujęć (wariacyjnego i korelacyjnego) omówimy je dokładniej w oddzielnych punktach, obecnie zaś wspomnimy jeszcze o dwóch metodach specjalnych mających zastosowanie do ośrodków o uproszczonej geometrii wewnętrznej.

Pierwsza z nich obejmuje teorię *zawiesin rzadkich* (por. definicję w p. 1). Jeśli znane jest rozwiązanie dla jednej inkluzji określonej formy w ośrodku macierzystym nieograniczonym, to rozwiązanie dla zawiesiny otrzymujemy przez prostą superpozycję skutków. Ma ona zwykle postać (na przykładzie współczynnika sprężystości objętościowej)

$$\hat{\varkappa} = \varkappa_M\Big(1+\sum_i \alpha_i \nu_i\Big),$$

gdzie $\varkappa_M$ oznacza stałą ośrodka macierzystego, α_i pewną stałą bezwymiarową zależną od własności sprężystych ośrodka macierzystego i inkluzji oraz od kształtu tej ostatniej (pozostałe oznaczenia, jak w poprzednich wzorach). Dobre przybliżenia uzyskuje się przy koncentracjach rzędu $\sum_i \nu_i \leqslant 2\%$, przy czym rozwiązania ograniczają się w zasadzie do inkluzji kulistych i elipsoidalnych.

Prostota założeń geometrycznych pozwoliła rozszerzyć krąg zagadnień fizycznych i w rzeczy samej większość rozwiązań dotyczy zawiesin ciała stałego w cieczy. Przytoczyliśmy już rozwiązanie EINSTEINA [26] dla układu ciecz lepka–inkluzje kuliste sztywne. Tenże przypadek dla inkluzji elipsoidalnych analizował JEFFREY [28]; dla inkluzji lepkich sferycznych z uwzględnieniem napięcia powierzchniowego TAYLOR [90], przy dodatkowym uwzględnieniu tarcia i poślizgu OLDROYD [75], dla inkluzji sferycznych sprężystych FRÖHLICH i SACK [31]. Dla ośrodka macierzystego sprężystego znane są wczesne prace BRUGGEMANA [12] i DEWEYA [22]; dla inkluzji elipsoidalnych podstawowe rozwiązania podał ESHELBY [27]; rozwiązanie dla pustek sferycznych przedstawił MACKENZIE [68], dla inkluzji sztywnych sferycznych HASHIN [32]. Warto zauważyć, że niektóre rozwiązania wynikają z innych, jako ich szczególne przypadki. Rozwój tej drogi poszukiwań prowadził do uwzględnienia w mniej lub bardziej ścisły sposób wzajemnego oddziaływania inkluzji, niektóre ujęcia mają charakter półdoświadczalny.

Drugie stosowane często założenie upraszczające polega na tym, że co prawda nie «ograniczamy» w niczym konfiguracji geometrycznej ośrodka, lecz za to przyjmujemy, że własności (np. sprężyste) faz różnią się mało, tj. różnice są na poziomie *fluktuacji*. Tutaj z powodzeniem znajdują zastosowanie metody *perturbacyjne*, wykorzystywane chętnie zwłaszcza w zagadnieniu falowym, z uwagi na trudności pojawiające się przy ściślejszych metodach (por. MOLYNEUX [71], BERAN [1], SOBCZYK [86]).

4. Ujęcie wariacyjne

Ujęcie wariacyjne (scharakteryzowane w p. 3) w zastosowaniu do problemu sprężystości, na którym zilustrujemy koncepcję rozwiązania, polega na wykorzystaniu twierdzeń o energii potencjalnej i energii dodatkowej (komplementarnej) teorii sprężystości. Rozważmy dla przykładu pierwsze zagadnienie brzegowe i ograniczmy (pełną) energię odkształcenia E, następującymi nierównościami

$$\int \sigma^*(2\epsilon_0 - S\sigma^*)\,dV \leqslant 2E \leqslant \int \epsilon^* C\epsilon^* dV.$$

Prawa strona nierówności wynika z twierdzenia o energii potencjalnej, lewa — z twierdzenia o energi dodatkowej; C i S oznaczają kolejno tensor sprężystości i tensor odkształcalności; ϵ^* jest polem odkształceń wirtualnych (odpowiednio gładkim) zgodnych z przemieszczeniami na brzegu, zaś σ^* dowolnym zrównoważonym polem naprężeń i ϵ_0 dowolnym, zgodnym z warunkami brzegowymi, polem odkształceń (notacja jest absolutna i może być interpretowana w znany sposób macierzowo-wektorowy). Weźmy na przykład ośrodek dwufazowy o fazach izotropowych i jednorodne pole odkształceń wirtualnych. Ponieważ $2E = \epsilon\hat{C}\epsilon$, gdyż energia odpowiada określonym przemieszczeniom na brzegu, otrzymamy na podstawie prawej strony nierówności

$$\epsilon\hat{C}\epsilon \leqslant \nu_1\epsilon C_1\epsilon + \nu_2\epsilon C_2\epsilon,$$

a stąd

$$\epsilon(\nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 - \hat{C})\epsilon \geqslant 0.$$

Oznacza to, że macierz w nawiasach jest dodatnio określona (ściślej półokreślona), a stąd otrzymuje się szereg nierówności obejmujących składowe tensora sprężystości (korzystając np. z twierdzenia o dodatniości minorów głównych). W taki sposób można udowodnić (i jednocześnie uogólnić) nierówności Voigta i Reussa.

Przybliżenie to jest jeszcze zbyt grube. W celu zacieśnienia nierówności Hashin i Shtrikman [38] oraz Hill [45] podali bardziej rozwinięte twierdzenia wariacyjne, w których pojawiają się pojęcia tensora polaryzacji naprężenia τ i odkształcenia η grające ważną rolę w całej teorii ośrodków wielofazowych. Są one zdefiniowane następującymi równościami

$$\tau = (C - C_0)\epsilon, \qquad \eta = (S_0 - S)\sigma,$$

gdzie C_0, S_0 oznaczają tensory sprężystości i odkształcalności dla ośrodka odniesienia, za który można przyjąć dowolny ośrodek (np. o własnościach sprężystych jednej z faz izotropowych lub o średnim tensorze sprężystości, w sensie średniej arytmetycznej). Wprowadzenie tensorów polaryzacji prowadzi do zastąpienia ośrodka niejednorodnego jednorodnym (mianowicie ośrodkiem odniesienia) obciążonym polem odnośnego tensora polaryzacji.

Przytoczmy obecnie dla przykładu jedno z twierdzeń Hashina-Shtrikmana-Hilla dla pierwszego zagadnienia brzegowego:

$$2(E_0 - E) \geqslant \int \tau^*[(C - C_0)^{-1}\tau^* - \epsilon_0 - \epsilon^*]\,dV,$$

gdzie E_0 jest energią ośrodka odniesienia dla zadanych warunków brzegowych, zaś τ^* oznacza wirtualne pole tensora polaryzacji naprężenia (odpowiednio gładkie). Dalszy ciąg rozwiązania polega na przyjęciu tego pola w postaci pola fazami jednorodnego (tj. obszarami stałego, lecz w ogólności różnego dla kolejnych faz izotropowych), a następnie na doborze (z warunku ekstremum) optymalnego układu wielkości τ_i^* dla poszczególnych faz. Dla przykładu podamy rozwiązanie dla modułu objętościowego, dla ośrodka dwufazowego

$$\varkappa^{(1)} \leqslant \hat{\varkappa} \leqslant \varkappa^{(2)},$$

$$\varkappa^{(1)} = \varkappa_1 + \frac{\nu_2}{\dfrac{1}{\varkappa_1 - \varkappa_2} + \dfrac{3\nu_1}{3\varkappa_1 + 4\mu_1}}$$

$$\varkappa^{(2)} = \varkappa_2 + \frac{\nu_1}{\dfrac{1}{\varkappa_1 - \varkappa_2} + \dfrac{3\nu_2}{3\varkappa_2 + 4\mu_2}},$$

$$\varkappa_1 < \varkappa_2, \quad \mu_1 < \mu_2.$$

Wyrażenia tego typu wyznaczono dla wielu konkretnych przypadków i dla różnych stałych sprężystości (a także innych własności fizycznych). Wyniki przedstawia się zwykle na wykresach w zależności od koncentracji faz; krzywe typu $\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$ wydzielają obszar, w którym musi się mieścić poszukiwana wielkość makroskopowa ($\hat{\varkappa}$).

Aby unaocznić zakres poszukiwań podamy niektóre wyniki. PAUL [76] wyznaczył ograniczenia dla modułu Younga; analizę ośrodków dwufazowych przeprowadził HILL [44], [48]; ośrodki zbrojone włóknami (mające duże znaczenie techniczne) analizowali HASHIN [35], HILL [46]; twierdzenia energetyczne w ujęciu klasycznym stosowali BERAN i MOLYNEUX [4]. Pewną modyfikację metody przedstawił WALPOLE [94]; rozszerzenie badań na ośrodki lepkosprężyste przedstawili ROSCOE [80], CHRISTENSEN [19]; własności zawiesin z zastosowaniem metod harmonicznych analizowali RUBENFELD i KELLER [83]; rozwiązania dla zagadnienia rozszerzalności cieplnej podali ROSEN i HASHIN [81] oraz LEWIN [60]; problem lepkości cieczy analizował HASHIN [34]; zastosowanie metody dla polikryształu przedstawili HASHIN i SHTRIKMAN [39]. Nie podajemy tu dość obszerniej literatury w zakresie stałej dielektrycznej i ograniczamy się do prac BERANA [2] i BROWNA [10] z uwagi na wprowadzenie elementów statystycznego opisu geometrii wewnętrznej; wiele rezultatów zebrał w swej książce BERAN [1].

Dalszy rozwój metod przybliżonych związany będzie niewątpliwie z rozszerzeniem zakresu założeń o ośrodku poza koncentrację faz, tj. uwzględnieniem dalszych informacji o geometrii wewnętrznej, co pozwoli na dalsze zacieśnienie uzyskiwanych nierówności. Główny (aczkolwiek nie jedyny) nurt poszukiwań wiąże się z rozwojem metod probabilistycznych.

5. Ujęcie korelacyjne

Z przyczyn omawianych powyżej należy przewidywać, że ujęcie statystyczne będzie określało w przyszłości główny kierunek poszukiwań, przy czym postępy będą związane z rozwojem teorii operatorów i równań stochastycznych.

Dla wprowadzenia w to zagadnienie przyjmijmy, że mamy ogólnie operator różniczkowy liniowy rzędu drugiego

$$D = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

i że równanie rozważanego problemu fizycznego ma postać

$$D\varphi = f,$$

gdzie φ jest szukaną funkcją, a f oznacza niejednorodność (w chwili obecnej nie precyzujemy, czy chodzi o funkcję skalarną czy tensorową; dla ustalenia uwagi pomyślmy o równaniu Lamégo, gdzie φ oznacza pole przemieszczeń, a f pole sił objętościowych).

Możemy rozróżnić trzy przypadki: 1) D jest operatorem deterministycznym, a f funkcją losową, bądź też warunki brzegowe są losowe (zauważmy, że losowość warunków brzegowych może wynikać zarówno z losowości funkcji na brzegu — np. obciążenia lub przemieszczenia, jak i z losowości geometrii samego brzegu); jest to w szczególności przypadek losowego obciążenia konstrukcji (jednorodnych), związany blisko z problematyką bezpieczeństwa konstrukcji; obejmuje on m.in. prawie całą dynamikę statystyczną konstrukcji; 2) D jest operatorem losowym (f może być funkcją losową lub deterministyczną); ten przypadek obejmuje m.in. teorię (liniową) ośrodków stochastycznych wielofazowych; 3) D jest operatorem losowym skorelowanym z funkcją φ; oznacza to, że własności ośrodka zależą od tejże funkcji, co w szczególności zachodzi przy przejściu do zjawisk nieliniowych (fizycznie).

W każdym z wymienionych przypadków poszukiwana funkcja φ staje się losową i operator D (niezależnie od tego czy jest deterministyczny czy stochastyczny) działa na funkcję losową. Tym samym nie może on być zdefiniowany w zwykły sposób, gdyż nie można mówić o zbieżności funkcji losowej (występującej przy definiowaniu pochodnej) w zwykłym sensie; zwykle korzystamy z definicji pochodnej w sensie zbieżności średniokwadratowej (l.i.m.). Jeśli operator jest stochastyczny, jak np. w przypadku (2) (tzn. współczynniki a_{ij}, b_i, c są funkcjami losowymi), to w ogóle musimy zacząć od jego definicji (zauważmy, że w sensie deterministycznym nie moglibyśmy nawet określić typu równania, zależnego od współczynników). Ograniczymy się tutaj, dla ilustracji, do podania definicji (ściślej, jednej z istniejących definicji) operatora stochastycznego. Najpierw wprowadzamy pojęcie uogólnionej zmiennej losowej w następujący sposób: niech $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie Ω oznacza zbiór zdarzeń elementarnych, $\mathscr{A}$ σ — algebrę podzbiorów tego zbioru, μ miarę zupełną unormowaną na tych podzbiorach. Niech z kolei $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ oznacza przestrzeń mierzalną, gdzie $\mathscr{X}$ jest przestrzenią ośrodkową Banacha, $\mathscr{B}$ σ — algebrą podzbiorów borelowskich. Wówczas uogólnioną zmienną losową nazywamy przekształcenie $x(\omega): \Omega \to \mathscr{X}$, jeśli $\{\omega : x(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}$ dla $B \in \mathscr{B}$ (warunek zachowania prawdopodobieństwa). Operatorem losowym nazywamy przekształcenie $T(\omega): \Omega \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, jeśli $T(\omega)[x]$ jest uogólnioną zmienną losową z wartościami w $\mathscr{X}$, dla każdego $x \in \mathscr{X}$. Jeśli operator jest liniowy ograniczony to mówimy o endomorfizmie losowym.

Nie kontynuując tych abstrakcyjnych rozważań wyjaśnimy tok rozwiązania używając «języka deterministycznego» i ograniczając się na razie do przypadku (1). Uśredniając obustronnie równanie problemu otrzymujemy (uwzględniając, że D jest deterministyczny)

$$D\overline{\varphi} = \overline{f}.$$

Jest to równanie (w którym wszystkie elementy są deterministyczne) na średnią funkcję $\overline{\varphi}$. Chcąc wyznaczyć funkcję momentu korelacyjnego wypisujemy równanie dwa razy dla różnych argumentów i mnożymy stronami

$$D\varphi(\boldsymbol{x}_1) D\varphi(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) f(\boldsymbol{x}_2),$$

po czym znowu uśredniamy

$$D_1 D_2 \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = D^{(2)} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \langle f_1 f_2 \rangle,$$

w czym nawiasy $\langle\ \rangle$ oznaczają operację uśredniania, a $D^{(2)}$ jest skrótowym zapisem operatora IV rzędu działającego na funkcję argumentów $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$; otrzymaliśmy więc równanie IV rzędu na funkcję korelacyjną (niescentrowaną) $\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \langle \varphi_1\, \varphi_2 \rangle$. Postępowanie to można kontynuować w sposób oczywisty, otrzymując równania (deterministyczne) na funkcje korelacyjne dowolnego rzędu, co rozwiązuje problem.

Rozwiązanie przedstawia się jeszcze prościej, jeśli podanie funkcji Greena dla problemu deterministycznego nie nastręcza trudności; wówczas

$$\varphi = G*f,$$

gdzie G jest operatorem całkowym z funkcją Greena jako jądrem. Uśredniając kolejno, w sposób identyczny jak poprzednio, otrzymujemy od razu w postaci jawnej wyrażenia na poszukiwane funkcje korelacyjne:

$$\bar{\varphi} = G*\bar{f}, \qquad \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = G^{(2)} * \langle f_1 f_2 \rangle \quad \text{itd.}$$

Przechodząc do operatorów stochastycznych [przypadek (2)] i do teorii ośrodków wielofazowych napotykamy trudność wynikającą z niemożności bezpośredniego uśredniania lewej strony równania (gdyż $\langle D\varphi \rangle \neq \bar{D}\bar{\varphi}$). Widać stąd, że pożądane byłoby sprowadzenie zagadnienia do obciążenia ośrodka *jednorodnego* (któremu odpowiada operator D deterministyczny) jakimś polem losowym. Jest to, jak widzieliśmy w p. 4, możliwe, przy czym polem tym jest pole tensora polaryzacji $\boldsymbol{\tau}$. Np. dla zagadnienia Lamégo otrzymuje się równanie

$$L_0 \boldsymbol{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0,$$

gdzie L_0 jest operatorem Lamégo dla ośrodka odniesienia (jednorodnego) o tensorze sprężystości C_0. Przechodząc do przedstawienia całkowego otrzymuje się następujący wynik końcowy, rozpisany we współrzędnych kartezjańskich

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = a_{ijkl} \tau_{kl}(\boldsymbol{x}) + \bar{\int} \Lambda_{ijkl}(\boldsymbol{x}, \xi) \tau_{kl}(\xi)\, dV,$$

$$\Lambda_{ijkl} = G_{k(i,j)l},$$

$$a_{ijkl} = -\lim_{r \to 0} \oint G_{k(i,j)} n_l\, dS,$$

$$n_l = \frac{x_l - \xi_l}{r},$$

który zapisujemy krótko w postaci operatorowej

$$\boldsymbol{\epsilon} = \Lambda \boldsymbol{\tau},$$

Tutaj $\boldsymbol{\epsilon}$ jest poszukiwanym polem tensora odkształcenia, G tensorem Greena dla zagadnienia Lamégo, $\bar{\int}$ wartością główną całki (osobliwej), $\oint$ całką po małej sferze o promieniu $\boldsymbol{r}$, ξ punktem bieżącym, a, jak widać, pewnym stałym tensorem. Ponieważ pole $\boldsymbol{\tau}$ zależy od pola $\boldsymbol{\epsilon}$ otrzymujemy równanie całkowe

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \Lambda c \boldsymbol{\epsilon},$$

gdzie ϵ_0 jest rozwiązaniem dla ośrodka odniesienia (jednorodnego) oraz $c = C - C_0$. Podobne równanie otrzymujemy dla pola tensora polaryzacji. Rozwijając te równania w szeregi typu Neumanna i uśredniając wyraz po wyrazie otrzymujemy następujący wzór końcowy na makroskopowy tensor sprężystości

$$\hat{C} = BA^{-1} + c_0,$$
$$A = I + A_{12}\langle c_2\rangle + A_{123}\langle c_2 c_3\rangle + \ldots$$
$$B = \langle c_1\rangle + A_{12}\langle c_1 c_2\rangle + A_{123}\langle c_1 c_2 c_3\rangle + \ldots$$

gdzie A_{12}, A_{12} , ... oznaczają operatory iterowane po punktach odpowiednio x_1, x_2; x_1, x_2, x_3 ; itd.

Jak widać, do pełnego rozwiązania konieczna jest znajomość funkcji korelacyjnych dowolnego rzędu, $\langle c_1\rangle$, $\langle c_1\, c_2\rangle$, ... Wyrażają się one dla faz izotropowych następująco:

$$\langle c_1 c_2 \ldots c_n\rangle = \sum p_{k_1 \ldots k_n}(x_1, \ldots x_n)\, c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_n}.$$

Tutaj $p_{k_1 \ldots k_n}$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że w ustalonym zbiorze punktów $x_1, \ldots, x_n$ punkt x_1 jest położony w fazie k_1, punkt x_2 w fazie k_2 itd., zaś $c_{k_n} = C_{k_n} - C_0$. Widać stąd wyraźnie, że funkcje korelacyjne zależą od geometrii wewnętrznej ośrodka.

Przy naszkicowanym rozwiązaniu wyłania się oczywiście szereg kwestii matematycznych, np. gładkości funkcji, zbieżności szeregów itp. Rozwiązanie powyższego typu, przy zastosowaniu tensora polaryzacji, zostało podane przez EIMERA [23], [25]. Wydaje się, że prowadzi ono najszybciej do celu, aczkolwiek nie jest jedynym możliwym. Uogólnienie założeń matematycznych podał TRZĘSOWSKI [92]. Rozpatruje on zagadnienie w kontekście przestrzeni Sobolewa funkcji różniczkowalnych w sposób uogólniony i dochodzi do wniosku, że wyniki uzyskane przy silniejszych założeniach obowiązują również, gdy materiał nie zachowuje się jak ośrodek ciągły w stanie równowagi.

Kierunek rozwoju polegający na ścisłym rozwiązaniu probabilistycznym został zapoczątkowany przez LIFSZYCA i ROZENZWEIGA [62], 1946. Również pionierską rolę odegrały prace BROWNA [10] (problem dielektryczny) i PRAGERA [78] (problem dyfuzji). W kontekście pola elektrycznego, z opisem do dwupunktowych funkcji korelacyjnych włącznie problem został opracowany przez BERANA i MOLYNEUX [4]. Teoria polikryształu została rozwinięta przez KRÖNERA [55], [57]; warto tu też wymienić prace HERSHEYA i DAHLGRENA [41] oraz KNEERA [53]. Kierunek probabilistyczny był szeroko rozwijany przez autorów radzieckich. Wymienić tu można prace DARINSKIEGO i SZERMIERGOWA [21], FOKINA i SZERMIERGOWA [29], ŁOMAKINA [66], BOŁOTINA i MOSKALENKI [9], CHOROSZUNA [18], WOŁKOWA i KLINSKICHA [98]; ta ostatnia zajmuje się zwłaszcza analizą pól losowych. Rozwinięcia na zagadnienia brzegowe i ośrodki lepkosprężyste podał autor niniejszego szkicu [24], [25]. Obszerną dyskusję całości zagadnienia można znaleźć w książce BERANA [1].

Aczkolwiek zasadnicza droga rozwiązania zagadnień liniowych metodą funkcji korelacyjnych jest już dziś dostatecznie jasna, to jednak stosunkowo niewiele zrobiono w zakresie zastosowań teorii do całej masy konkretnych zagadnień. Wydaje się, że na przeszkodzie takiej «rozbudowie wszerz» popartej pomiarami doświadczalnymi, stoi brak odpowiednich metod takich pomiarów, zwłaszcza korelatorów mechanicznych i należałoby życzyć sobie wzmożenia wysiłków w tym kierunku.

6. Rzut oka w przyszłość

Powyższy szkic jest daleki od kompletności, gdyż staraliśmy się skoncentrować uwagę na kluczowych kierunkach rozwoju. Pominęliśmy szereg metod o mniejszym zasięgu takich, jak np. metody «self consistent» i «smearing-out» por. HILL [48], BUDIANSKY [14], KERNER [52], a także metody funkcjonalne, typu stosowanych w kwantowej teorii pola. Również pominęliśmy obszerną problematykę dynamiczną i falową, gdyż rozwija się ona głównie w kontekście dynamiki statystycznej, stanowiącej oddzielną dyscyplinę. To samo dotyczy zagadnień elektrostatyki i elektrodynamiki; interesują one w mniejszym stopniu mechaników. Wydaje się, że rozszerzenie poszukiwań na zagadnienie *falowe*, w tym problematykę *elektrodynamiki*, wyznacza jeden z kierunków rozwoju teorii.

Natomiast chcielibyśmy jeszcze powiedzieć kilka słów o zagadnieniach nieliniowych w kontekście zjawisk plastyczności. Celem jest tu określenie zachowania się materiału polikrystalicznego i wielofazowego przy znanym zachowaniu poszczególnych krystalitów. Wskutek plastycznego płynięcia sieci krystaliczne ulegają obrotom, co zwykle się pomija, pomijając tym samym efekt anizotropii generowanej tymi zjawiskami. Podstawowe prace zawdzięczamy tu TAYLOROWI [88]. (dyskusja ogranicza się do sieci kubicznych centrowanych) oraz [89] (związek naprężenia z odkształcenia przy obciążeniu jednoosiowym). Kluczowym zagadnieniem jest tu określenie aktywnego systemu poślizgu, np. za pomocą odpowiednich zasad minimalizujących oraz ustalenie miejsca poślizgu. Przeglądy wcześniejszych prac można znaleźć u BISHOPA i HILLA [6] oraz COTTRELLA [20]. Rozszerzenie metod Taylora, m.in. na krystality sprężysto-plastyczne przeprowadził LIN [63], PAYNE [77] i in. Warto zauważyć, że założenia, z uwagi na stopień trudności, są tu znacznie bardziej ograniczone niż w teorii liniowej, np. przyjmuje się jednorodne pole odkształceń całkowitych. W innym ujęciu rozważa się krystalit jako kulę izotropową zanurzoną w ośrodku sprężystym (BUDIANSKY, HASHIN, SANDERS [15]), w czym można odnaleźć podobieństwo do teorii zawiesin rzadkich, a nawet z uwzględnieniem w pewien sposób oddziaływań wzajemnych inkluzji (KRÖNER [56]). Z powodu tych upraszczających założeń teoria plastyczności polikryształu stoi «na pograniczu» teorii ośrodków wielofazowych, lecz nie ma powodów, by w przyszłości nie miała nią być w pełni objęta.

Istotne rozszerzenie i pogłębienie teorii ośrodków wielofazowych zarysowuje się w kontekście przejścia do mechaniki *nieliniowej* (geometrycznie), skąd dopiero z właściwego punktu widzenia można ocenić przybliżenie liniowe, jak również naszkicowaną problematykę plastyczności. Określi to niewątpliwie drugi istotny kierunek rozwoju.

Szkic niniejszy nie obejmuje problematyki badań eksperymentalnych ośrodków wielofazowych. Są one prowadzone w licznych przodujących ośrodkach naukowych i to na dużą skalę, z uwagi na znaczenie techniczne różnego typu materiałów «wzmocnionych», lecz wydają się biec torem równoległym, niezależnym od rozwoju teorii. O jednej z przyczyn (trudności ustalenia geometrii ośrodka) wspomnieliśmy już wyżej. Warto zwrócić uwagę na dwie, obiecujące metody eksperymentalne (w sensie możliwego powiązania z teorią), mianowicie analizy strukturalnej (metoda proszkowa Debye'a — Scherrera w monochromatycznej wiązce promieni Roentgena) oraz analizy widmowej dla ośrodków, gdzie dysponujemy długościami fal zbliżonymi do rozmiarów ziaren.

Przyszłość powinna przynieść ustalenie związków (zrazu korelacyjnych, w dalszej przyszłości być może opartych na rozwiązaniach teoretycznych) między parametrami określającymi warunki *wytwarzania* materiałów a strukturą (geometrią) ośrodka. Jest to, być może, najbardziej perspektywiczny kierunek rozwoju, który pozwoli w pełni opanować problem projektowania materiałów o pożądanych własnościach.

Literatura cytowana w tekście

1. M. J. Beran, *Statistical continuum theories*, Wiley, 1968.
2. M. J. Beran, *Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media*, Il nuovo cimento, 38 (1965), no 2.
3. M. J. Beran, J. J. McCoy, *The use of strain gradients theory for analysis of random media*, Int. J. Sol. Struct., 6, (1970), no 9.
4. M. J. Beran, J. Molyneux, *Statistical properties of the electric field in a medium with small random variations in permittivity*, Il nuovo cimento, 30 (1963), no 6.
5. M. Ben-Amoz, *The effective thermal properties of two-phase solids*, Int. J. Eng. Sci., 8 (1970), no 1,
6. J. F. W. Bishop, R. Hill, *A theory of a plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses*, Phil. Mag., 42 (1951), 414.
7. W. Boas, *Zur Berechnung des Torsionsmoduls quasiisotroper Vielkristalle aus den Einkristallkonstanten*, Helv. Phys. Acta, 8 (1935), 674.
8. W. Boas, E. Schmid, *Zur Berechnung physikalischer Konstanten quasiisotroper Vielkristalle*, Helv. Phys Acta, 7 (1934), 628.
9. В. В. Болотин, В. Н. Москаленко, *Макроскопические характеристики сильно изотропных стохастических материалов*, Пробл. Надежн. в Строит. Мех., Конф., Вильнюс 1968, с. 93.
10. W. F. Brown, Jr, *Solid mixture permittivities*, Journ, Chem. Phys., 23 (1955), no 8.
11. W. F. Brown Jr., *Dielectric constants, permeabilities and conductivities of random media*, Symp. Phys. Mech. Random Media, Pa, Oct. 1964.
12. D. A. Bruggeman, *Die elastischen Konstanten der quasiisotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen*, Ann. Phys., 29, (1937), 160.
13. B. Budiansky, *On the elastic moduli of some heterogeneous materials*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), no. 4.
14. B. Budiansky, N. F. Dow, R. W. Peters, R. P. Shepherd, *Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity*, Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1951, p. 503.
15. B. Budiansky, Z. Hashin, J. L. Sanders, *The stress field of a slipped crystal and the early plastic behavior of polycrystalline materials*, Plasticity, Proc. 2nd Symp. Naval Struct. Mech., Pergamon Press, N. York 1960, s. 239.
16. B. Budiansky, Wu Tai Te, *Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals*, Proc. 4th US Nat. Cong. Appl. Mech., 1962, s. 1175.
17. B. Bürgel, A. J. Perry, W. R. Schneider, *On the theory of fibre strengthening*, J. Mech. Phys. Sol., 18 (1970), no 2.
18. Л. П. Хорошун, *Реологические свойства твердых тел со случайно расположенними неоднородностями*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", Вып. 7, АН Укр. ССР, Инст. Мех., Киев 1966.
19. R. M. Christensen, *Viscoelastic properties of heterogeneous media*, J. Mech. Phys.Sol., 17 (1969), s. 23.
20. A. H. Cottrell, *Dislocations and plastic flow in crystals*, Oxford Univ. Press, London 1953.
21. Б. М. Даринский, Т. Д. Шермергор, *К теории релаксации в поликристаллах*, ПМТФ, 1968 № 5.

22. J. M. DEWEY, *The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers*, J. Appl. Phys., 18 (1947), 578.
23. Cz. EIMER, *Stresses in multiphase media*, Arch. Mech. Stos., 19 (1967), no 4
24. Cz. EIMER, *The boundary effect in multiphase media*, Arch. Mech. Stos., 20 (1968), no 1.
25. Cz. EIMER, *The viscoelasticity of multiphase media*, Arch. Mech. Stos., 23 (1971), no 1.
26. A. EINSTEIN, *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen*, Ann. Phys., 19 (1906), 289.
27. J. D. ESHELBY, *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*, Proc. Roy. Soc. London (A), 241 (1957), 376.
28. G. B. JEFFREY, *The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid*, Proc. Roy. Soc., London (A), 102 (1923), 161.
29. А. Г. ФОКИН, Т. Д. ШЕРМЕРГОР, *К расчету упругих модулей неоднородных материалов*, Мех. Полимер., 1968, № 4.
30. А. Г. ФОКИН, Т. Д. ШЕРМЕРГОР, *Вычисление упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействии*, Журн. Прикл. Мех. Тех. Физ., 1969, № 1.
31. H. FRÖHLICH, R. SACK, *Theory of the rheological properties of dispersions*, Proc. Roy. Soc. London (A), 185, 1946, s. 415.
32. Z. HASHIN, *The moduli of an elastic solid reinforced by rigid particles*, Bull. Res. Counc. Israel, 5C 1955, s. 46.
33. Z. HASHIN, *The moduli of an elastic solid containing spherical particles of another elastic material*, Non--Hom. in Elast. and Plast., Symp. IUTAM, Warszawa 1958.
34. Z. HASHIN, *Bounds for viscosity coefficients of fluid mixtures by variational methods*, IUTAM Symp. 1962, Haifa, Pergamon Press, 1964, s. 434.
35. Z. HASHIN, *On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1955), no 3.
36. Z. HASHIN, *The inelastic inclusion problem*, Intern. Journ. Eng. Sci., 7 (1969), no 1.
37. Z. HASHIN, *Complex moduli of viscoelastic composites I. General theory and application to particulate composites*, Int. J. Sol. Struct., 6, 1970, no 5; II. *Fiber reinforced materials*, id. 6, 1970, no 6.
38. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), 395.
39. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), 343.
40. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, J. Mech. Phys. Solid, 11 (1963), no 2.
41. A. V. HERSHEY, DAHLGREN, *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals*, J. Appl. Mech., 1954, s. 236.
42. A. HUBER, E. SCHMID, *Bestimmung der elastischen Eigenschaften quasiisotroper Vielkristalle durch Mittelung*, Helv. Phys. Acta, 7, 1934, s. 620.
43. R. HILL, *Report on theories of the elastic properties of composite media*, British Iron and Steel Research Association, Rep. P(19)62, 1962.
44. R. HILL, *Elastic properties of reinforced solids; some theoretical principles*, Journ. Mech. Phys. Solids, 11, 1963, no 5.
45. R. HILL, *New derivations of some elastic extremum principles*, Progress in Applied Mechanics, the Prager Anniv. Vol., N. York-London 1963, s. 99.
46. R. HILL, *Theory of mechanical properties of fibre — strenghtened materials; I. Elastic behaviour*, Jour. Mech. Phys. Solids, 12, 1964, no 4.; II *Inelastic behaviour*, id., 12 1964, no 4; III *Self — consistent model*, id. 13, 1965, no 4.
47. R. HILL, *Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965, no 2.
48. R. HILL, *A self-consistent mechanics of composite meterials*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965, no 4.
49. R. HILL, *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*, J. Mech. Phys. Sol., 15, 1967, s. 79.

50. V. KAFKA, *Der Einfluss der mikroskopischen Heterogenität auf die elastisch-plastischen Verformungsgesetze*, Z.A.M.M., 46, 1966, no. 8.

51. H. H. KAUSCH-BLECKEN VON SCHMELING, *Elastic properties of anisotropic heterogeneous materials*, Journ. Appl. Physics, **38** (1967), No 11.

52. E. H. KERNER, *The elastic and thermoelastic properties of composite media*, Proc. Phys. Sol. (B), 69 (1956), 808.

53. G. KNEER, *Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur*, Phys. Stat. Sol., 9 (1965), 825.

54. A. Г. КОСТЮК, *О статистической модели микронеоднородной среды*, Механика, 1965, № 1.

55. E. KRÖNER, *Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls*, Zeitschr. f. Physik, **151** (1958), no 4.

56. E. KRÖNER, *Zur plastischen Verformung des Vielkristalls*, Acta Metallurg., 9 (1961), 155.

57. E. KRÖNER, *Elastic moduli of perfectly disordered composite materials*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 319.

58. E. KRÖNER, B. K. DATTA, D. KESSEL, *On the bounds of the shear modulus of macroscopically isotropic aggregates of cubic crystals*, J. Mech. Phys. Solids, **14** (1966), no 1.

59. P. V. MC LAUGHLIN Jr, S. C. BATTERMAN, *Limit behavior of fibrous materials*, Int. J. Sol. Struc., **6** (1970), no 10.

60. В. М. ЛЕВИН, *О коэффициентах температурного расширения*, Мех. Твер. Тела, 1967, № 1.

61. В. М. ЛЕВИН, *Вариационный метод в теории вязкоупругих композитных тел*, Мех. Твер. Тела, 1968, № 2.

62. И. М. ЛИФШИЦ, Л. Н. РОЗЕНЦВЕЙГ, *К теории упругих свойств поликристаллов*, Журн. Эксп. Теор. Физ., **16** (1946), № 11.

63. T. H. LIN, *Analysis of elastic and plastic strains of a face-centred cubic crystal*, J. Mech. Phys. Sol., 5 (1954), 143.

64. T. H. LIN, *Slip and stress fields of a polycrystalline aggregate at different stages of loading*, J. Mech. Phys. Sol., 12, (1964), 391.

65. T. H. LIN, M. ITO, *Theoretical plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined and reversed stresses*, J. Mech. Phys. Solids, **13** (1965), no 2.

66. В. А. ЛОМАКИН, *О деформировании микронеоднородных упругих тел*, Прикл. Мех., 29, 1965.

67. В. А. ЛОМАКИН, *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*, Изд, „Наука" 1970.

68. J. K. MACKENZIE, *The elastic contants of a solid containing spherical holes*, Proc. Phys. Soc., (B) 63 (1950), no 2.

69. MELVIN H. MILLER, *Bounds for effective modulus of heterogeneous materials*, J. Math. Phys., **10** (1969), no 11.

70. MELVIN H. MILLER, *Bounds for effective electrical, thermal and magnetic properties of heterogeneous materials*, J. Math. Phys., **10** (1969), no 11.

71. J. E. MOLYNEUX, *Application of perturbation techniques to problems in statistical continuum theory*, Doct. diss. Univ. P-a, 1964.

72. J. F. MULHERN, *Cylindrically symmetric deformations of a fibre reinforced material*, Quart., J. Mechanics and Appl. Math., **22**, Part I, II (1969).

73. J. F. MULHERN i in., *A continuum theory of a plastic-elastic fibre reinforced material*, Int. J. Eng. Sci, **7** (1969), no 2.

74. J. F. MULHERN, T. G. ROGERS, A. J. M. SPENCER, *A continuum theory of a plastic-elastic fibre-reinforced material*, Int. J. Eng. Sci, **7** (1969), no 2.

75. J. G. OLDROYD, *The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions*, Proc. Roy-Soc., London (A), 218, 1954, s. 122.

76. B. PAUL, *Prediction of elastic constants of multiphase materials*, Trans. AIME, 218, 1960, s. 36.

77. H. PAYNE, *The slip theory of plasticity for crystalline aggregates*, J. Mech. Phys. Sol., 7 (1957), 126.

78. S. PRAGER, *Diffusion in heterogeneous media*, J. Chem. Phys., **33** (1960), no 1.

79. A. REUSS, *Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle*, ZAMM, 9, 1929, s. 49.
80. R. ROSCOE, *Bounds for the real and imaginary parts of the dynamic moduli of composite viscoelastic systems*, J. Mech. Phys. Sol., 17 (1969), 17.
81. B. W. ROSEN, Z. HASHIN, *Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials*, Int. Journ. Eng. Sci., **8** (1970), no 2.
82. H. RÖHL, *Die elastischen Eigenschaften von Gold-Silber-Einkristallen*, Ann. der Physik, 5 Folge, **16** (1933), s. 887.
83. L. A. RUBENFELD, J. B. KELLER, *Bounds on elastic moduli of composite media*, SIAM J. Appl. Math., 17 (1969), no 3.
84. A.R.T. de SILVA, G. A. CHADWICK, *Thermal stresses in fibre reinforced composites*, J. Mech. Phys. Sol., **17** (1969) no 5.
85. G. E. SMITH, A. J. M. SPENCER, *Interfacial tractions in a fibre reinforced elastic composite material*, J. Mech. Phys. Sol., **18** (1970), no 2.
86. K. SOBCZYK, *Random vibrations of statistically inhomogeneous elastic systems*, Proc. Vibr. Probl, **4** *(1970), no 11.*
87. T. R. STEEL, *Linearised theory of plane strain of a mixture of two solids*, Intern. J. Eng. Sci., **5** (1967), 775.
88. G. J. TAYLOR, C. F. ELAM, *The plastic extension and fracture of aluminium crystals*, Proc. Roy. Soc. London (A), 108, 1925, s. 28.
89. G. J. TAYLOR, W. S. FARREN, *The distortion of crystals of aluminium under compression*, Proc. Roy. Soc. London (A), 111, 1926; s. 529; G. J. Taylor, id., 116, 1927, s. 16.
90. G. J. TAYLOR, *The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid*, Proc. Roy. Soc. London (A), 138, 1932, s. 41.
91. G. J. TAYLOR, *Plastic strain in metals*, J. Inst. Metals, 62 (1938), 307.
92. A. TRZĘSOWSKI, *Analiza problemu brzegowego w ośrodku wielofazowym*, dysert., 1971.
93. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, Berlin 1910.
94. L. J. WALPOLE, *On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems*, J. Mech. Phys. Solids, **14** (1966), no 3.
95. L. J. WALPOLE, *On the overall elastic moduli of composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, **17** (1969), no 4.
96. L. J. WALPOLE, *Strengthening effects in elastic solids*, J. Mech. Phys. Sol., **18** (1970), no 5.
97. С. Д. ВОЛКОВ, *О краевой задаче теории упругости поликристаллов*, Физ. Мет. и Металловед., **13** (1962), № 2.
98. С. Д. ВОЛКОВ, Н. А. КЛИНСКИХ, *К теории свойств упругости поликристаллов*, Физ. Мет. и Металловед., **10** (1965), № 1.
99. TAI TE WU, *The effect of inclussion shape, on the elastic moduli of a two-phase material*, Int. J. Solids Struct., **2** (1966), no 1.
100. C. ZWEBEN, B. W. ROSEN, *A statistical theory of material strength with application to composite materials*, J. Mech. Phys. Sol., **18** (1970), no 3.

Резюме

ТЕОРИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Работа имеет обзорный характер. Изложены основные понятия, такие как определения зерна, фазы и тп., а также исходные предположения и предмет исследований данной теории, в частности вывод определяющих уравнений для многофазных сред. Наряду со специальными методами, относящимся к более узким областям применения, например к теории слабых растворов, теории сред с флуктуационными изменениями свойств и пр., внимание сосредоточено на: 1° вариационном подходе, использующем приближенные методы решения, путем включения искомых величин в некоторые неравенства, 2° вероятностном подходе, использующем точные решения в виде рядов корреляционных функций возврастающего порядка.

Перечисленные вопросы изложены в приложении к теории упругости многофазных сред, указаны, однако, и другие возможности их приложений. Отмечены возможные направления развития теории, в частности в области волновых задач, теории пластичности, а также усиления её связи с физико-механическим производством материалов.

Summary

THEORY OF MULTI-PHASE MEDIA

The paper provides a survey of the present state and basic trends of the theory. Following topics are dealt with: basic definitions (grain, phase, etc.), field of research (in particular, macroscopic constitutive equations), fundamental assumptions. Apart from some special methods (e.g. dilute suspensions, fluctuating inhomogeneities), main attention is focused on (1) variational approach (approximate solutions, closing inequalities for effective quantities), (2) probabilistic approach (exact solutions in the form of series according to correlation functions of increasing order). Problems are mainly tackled in the context of the theory of elasticity, other fields of applications, however, being also pointed out. Some possible future trends are discussed, especially the wave problem, theory of micro- and macro-plasticity, relations to chemical physics of manufacturing of materials.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.