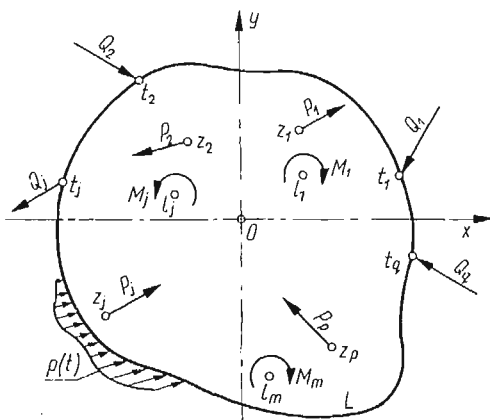


PRAKTYCZNA POSTAĆ OGÓLNEGO ROZWIĄZANIA TARCZY JEDNOSPÓJNEJ

KAZIMIERZ RYKAŁUK (WROCLAW)

1. Wprowadzenie

UGODCZIKOW [1] podał ogólne (zespolone) rozwiązanie sprężystej i jednorodnej tarczy jednorodnej obciążonej dowolnym układem sił. Układ ten stanowią: siły skupione Q_j ($j = 1, 2, \dots, q$) przyłożone w punktach t_j konturu tarczy L (rys. 1), obciążenie roz-



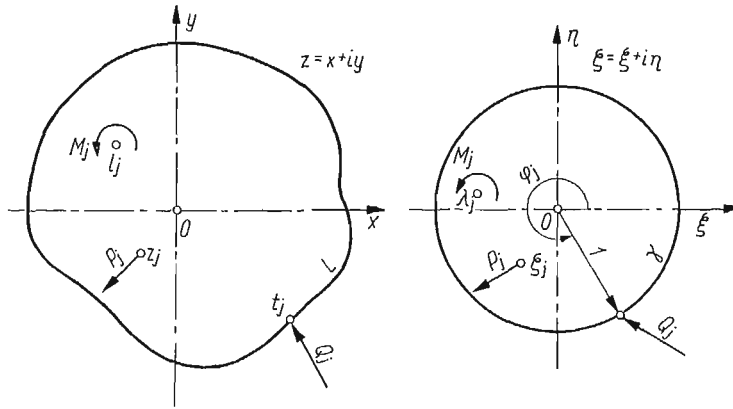
Rys. 1

łożone na konturze $L-p(t) = p_x(t) + ip_y(t)$, siły skupione P_j ($j = 1, 2, \dots, p$) przyłożone w wewnętrznych punktach tarczy z_j oraz momenty skupione M_j ($j = 1, 2, \dots, m$) przyłożone w wewnętrznych punktach l_j .

Rozwiązanie to, dokonane metodą MUSCHELISZWILIEGO [2], dotyczy przypadku, gdy obszar tarczy S leżący na płaszczyźnie zmiennej $z = x + iy$ można odwzorować konformnie na koło jednostkowe $|\zeta| \leq 1$ ($\zeta = \xi + i\eta$) za pomocą wielomianu

$$(1.1) \quad z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^n c_k \zeta^k.$$

Wtedy kontur tarczy L zostaje odwzorowany w okrąg γ (rys. 2), punkty t_j — w punkty $e_j = \exp(i\varphi_j)$, a punkty z_j i l_j — w punkty ζ_j i λ_j odpowiednio.



Rys. 2

Dwie funkcje analityczne Goursata $\varphi(\zeta)$ i $\psi(\zeta)$, będące rozwiązaniem problemu, zostały podane w następujących postaciach:

$$(1.2) \quad \varphi(\zeta) = A_*(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \ln(1 - \bar{\varrho}_j \zeta) - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^p \left\{ P_j [\ln(\zeta - \zeta_j) + \right. \\ \left. + \kappa \ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)] - \bar{P}_j \left[\sum_{k=1}^n D_k^{(j)} \zeta^k + \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \bar{\zeta}_j \zeta \omega(\zeta_j)}{\bar{\zeta}_j(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) \bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \right] \right\} + \\ + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{\zeta}{1 - \bar{\lambda}_j \zeta} - \sum_{k=1}^n K_k \zeta^k + C_1,$$

$$(1.3) \quad \psi(\zeta) = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{T}}{2\pi} \ln \zeta - \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta),$$

gdzie

$$(1.4) \quad T = - \sum_{j=1}^q Q_j - \sum_{j=1}^p P_j,$$

$$(1.5) \quad F(\varrho) = i \int_{\rho_0}^{\rho} \{p_x[\omega(\varrho)] + ip_y[\omega(\varrho)]\} \omega'(\varrho) d\varrho - \frac{T}{2\pi} \ln \varrho = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* \varrho^k,$$

$$(1.6) \quad A_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^k,$$

$$(1.7) \quad D_k^{(j)} = - \frac{1}{\bar{\zeta}_j} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{b_{k+r}}{\bar{\zeta}_j^r}, \quad k = n, n-1, \dots, 1,$$

$$(1.8) \quad b_k = \frac{1}{\bar{c}_1} \left(c_k - \sum_{r=2}^{n-k+1} r \bar{c}_r b_{k+r-1} \right), \quad k = n, n-1, \dots, 1, 0,$$

$$(1.9) \quad K_k = A_k - a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(1.10) \quad A_k = A_k^* + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \frac{\bar{\varrho}_j^k}{k} + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{j=1}^p \left\{ \frac{\varkappa P_j}{k} \bar{\zeta}_j^k + \right. \\ \left. + \bar{P}_j \left[D_k^{(j)} + \bar{\zeta}_j^{k-1} \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\zeta_j)} \right] \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j \bar{\lambda}_j^{k-1}}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)},$$

$\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ w płaskim stanie naprężenia i $\varkappa = 3-4\nu$ w płaskim stanie odkształcenia, ν — współczynnik Poissona.

Współczynniki a_k są zespolone,

$$(1.11) \quad a_k = \alpha_k + i\beta_k$$

i należy je obliczyć z następującego układu równań liniowych:

$$(1.12) \quad a_k + \sum_{r=1}^{n-k+1} b_{k+r-1} r \bar{a}_r = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Warunkiem jednoznaczności rozwiązania układu (1.12) jest [1]

$$(1.13) \quad \beta_1 = 0.$$

Składowe tensora naprężenia oraz wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie z obliczymy ze wzorów Kotosowa-Muscheliszwiliego [2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{aligned} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \mp \left[\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \right] \exp(2i\varphi) \right\}, \\ (1.14) \quad \tau_{r\varphi} = \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \right] \exp(2i\varphi) \right\}, \\ 2G \left\{ \begin{aligned} u_r \\ u_\varphi \end{aligned} \right\} = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left\{ \left[\varkappa\varphi(\zeta) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'(\zeta) \right] \exp(-i\varphi) \right\},$$

gdzie G jest modułem Kirchhoffa.

Potrzebny we wzorach (1.14) punkt ζ odpowiadający punktowi z wyznaczmy z funkcji odwrotnej $\zeta = \omega^{-1}(z)$. Funkcja taka istnieje, gdyż odwzorowanie jest konforemne i jednoznaczne [3]. Sposoby wyznaczania funkcji odwrotnej podaje FIŁCZAKOW [6].

Przytoczone powyżej rozwiązanie Ugodczikowa posiada dwie niedogodności:

1) Przy działaniu jednej z sił P_j w punkcie $z_j = 0$ (czyli również w $\zeta_j = 0$) nie można obliczyć dla tej siły współczynników $D_k^{(j)}$ według wzoru (1.7).

2) Funkcja $\psi(\zeta)$ określona wzorem (1.3) posiada w punkcie $\zeta = 0$ osobliwość, co uniemożliwia analizę stanu naprężenia i odkształcenia w tym punkcie oraz w jego otoczeniu. Obszar wpływu osobliwości jest tym większy im wyższy jest stopień wielomianu (1.1).

Celem niniejszej pracy jest doprowadzenie funkcji $\psi(\zeta)$ (1.3) oraz współczynników $D_k^{(j)}$ (1.7) do takich postaci, aby można je było obliczyć w każdym punkcie ζ z wyjątkiem punktów ζ_j i λ_j , które są punktami istotnie osobliwymi.

2. Rozwiązanie problemu

Rozpatrzmy najpierw działanie siły P_1 w początku układu współrzędnych ($\zeta_1 = 0$). Obliczmy całkę typu Cauchy'ego oznaczoną w pracy [1] jako $J_5^{(j)}$.

$$J_5^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'(\varrho)} \frac{1}{\varrho - \bar{\zeta}_j} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{1}{\frac{1}{\varrho} - \bar{\zeta}_j} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Korzystając z własności całki sumy, możemy napisać

$$(2.1) \quad J_5^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{1}{\frac{1}{\varrho}} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{1}{\frac{1}{\varrho} - \bar{\zeta}_j} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta},$$

$j = 2, 3, \dots, p.$

Wyrażenie $\omega(\varrho)/\bar{\omega}'(\varrho^{-1})$ jest wartością brzegową funkcji $\omega(\zeta)/\bar{\omega}'(\zeta^{-1})$ regularnej w obszarze $|\zeta| > 1$ i ciągłej w obszarze $|\zeta| \geq 1$ z wyjątkiem punktu $\zeta = \infty$, w którym posiada biegun rzędu n . Funkcję tę można zatem zapisać w postaci [2]

$$(2.2) \quad \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \zeta^k.$$

Wyrażenie $\varrho\omega(\varrho)/\bar{\omega}'(\varrho^{-1})$ jest wartością brzegową funkcji $\zeta\omega(\zeta)/\bar{\omega}'(\zeta^{-1})$ regularnej w obszarze $|\zeta| \geq 1$ z wyjątkiem punktu $\zeta = \infty$, w którym posiada biegun rzędu $n+1$.

Korzystając z (2.2), otrzymamy

$$(2.3) \quad \zeta \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \zeta^{-k+1}.$$

W myśl twierdzenia Cauchy'ego jest [4]

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varrho \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} + b_{-1}.$$

Dla drugiej całki po prawej stronie wyrażenia (2.1) zastosujemy wzory podane w [1]. Stąd

$$(2.5) \quad J_5^{(j)} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} + b_{-1} + \sum_{k=1}^n D_k^{(j)} \zeta^k + \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \frac{1}{\bar{\zeta}_j(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)}, \quad j = 2, 3, \dots, p.$$

Funkcja $\varphi(\zeta)$ wyrazi się ostatecznie następującym wzorem:

$$(2.6) \quad \varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^k - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \ln(1 - \bar{\varrho}_j \zeta) + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left[\bar{P}_1 \left[b_{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} \right] + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[\frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \bar{\zeta}_j \zeta \omega(\zeta_j)}{\bar{\zeta}_j(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) \bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^n D_k^{(j)} \zeta^k \right] - \sum_{j=1}^p P_j [\ln(\zeta - \zeta_j) + \varkappa \ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)] \right] + \\ \left. + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{\zeta}{1 - \bar{\lambda}_j \zeta} - \sum_{k=1}^n K_k \zeta^k + C_1, \right.$$

przy czym zmieni się także wzór na współczynniki A_k

$$(2.7) \quad A_k = A_k^* + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \frac{\bar{\varrho}_j^k}{k} + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left[\sum_{j=1}^p \frac{\varkappa P_j}{k} \bar{\zeta}_j^k + \bar{P}_1 b_{k-1} + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[D_k^{(j)} + \bar{\zeta}_j^{k-1} \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \right] \right] + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j \bar{\lambda}_j^{k-1}}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)}.$$

Rozpatrzmy teraz drugie interesujące nas zagadnienie. Otóż każdą funkcję regularną $f(\zeta)$ można w otoczeniu punktu $\zeta = 0$ zapisać w postaci sumy jej części regularnej $R(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \zeta^k$ i części osobliwej $O\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r_{-k} \zeta^{-k}$ [3], a więc

$$(2.8) \quad f(\zeta) = R(\zeta) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia płaskiego metodą Muscheliszwiliego zachodzi potrzeba obliczania całek typu Cauchy'ego z wartości brzegowych pewnych funkcji. Całki te równają się częściom regularnym tych funkcji [2], czyli

$$(2.9) \quad I(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\varrho)}{\varrho - \zeta} d\varrho = R(\zeta).$$

Na podstawie (2.8) całkę tę można zapisać także w postaci

$$(2.10) \quad I(\zeta) = f(\zeta) - O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Postać (2.10) była stosowana w pracy [1] przy obliczaniu funkcji $\psi(\zeta)$ co spowodowało, że niektóre jej wyrazy stały się osobliwe w punkcie $\zeta = 0$. Z powyższych rozważań wynika jednak, że osobliwość ta jest pozorna i można się jej pozbyć poprzez wyodrębnienie części regularnej funkcji $\psi(\zeta)$ w obszarze $|\zeta| < 1$.

Na podstawie (1.5) można napisać

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}^* \zeta^{-k}.$$

Stąd

$$(2.11) \quad F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}^* \zeta^k.$$

Pochodna funkcji (2.6) wynosi

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \varphi'(\zeta) = & \sum_{k=1}^{\infty} k A_k^* \zeta^{k-1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \frac{Q_j \bar{Q}_j}{1 - \bar{Q}_j \zeta} + \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left\{ \bar{P}_1 \sum_{k=0}^n (k+1) b_k \zeta^k + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[\sum_{k=1}^n k D_k^{(j)} \zeta^{k-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \omega(\bar{\zeta}_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \frac{1}{(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)^2} \right] + \sum_{j=1}^p P_j \left[\frac{\varkappa \bar{\zeta}_j}{1 - \bar{\zeta}_j \zeta} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_j} \right] \right\} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{1}{(1 - \bar{\lambda}_j \zeta)^2} - \sum_{k=1}^n k K_k \zeta^{k-1}. \end{aligned}$$

Po wstawieniu (1.4), (2.6), (2.11) i (2.12) do wzoru (1.3) otrzymamy:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \psi(\zeta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{-k}^* \zeta^k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \bar{Q}_j \ln(\zeta - \varrho_j) + \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{P}_j [\ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) + \varkappa \ln(\zeta - \bar{\zeta}_j)] - P_1 \left(\bar{b}_{-1} + \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \zeta^{-k-1} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^p P_j \left[\sum_{k=1}^n \bar{D}_k^{(j)} \zeta^{-k} + \frac{\zeta \bar{\omega}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \bar{\zeta}_j \bar{\omega}(\bar{\zeta}_j)}{\bar{\zeta}_j \bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j) (\zeta - \bar{\zeta}_j)} \right] \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{1}{\zeta - \bar{\lambda}_j} + \\ & + \sum_{k=1}^n \bar{K}_k \zeta^{-k} - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - C_1. \end{aligned}$$

W obszarze $|\zeta| < 1$ funkcję $\varphi(\zeta)$ można przedstawić w postaci [1]

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k - \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{j=1}^p P_j \ln(\zeta - \zeta_j).$$

Wtedy:

$$(2.14) \quad \varphi'(\zeta) = \sum_{k=1}^n k a_k \zeta^{k-1} - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^p \frac{P_j}{\zeta - \zeta_j}.$$

Na podstawie (2.2) obliczymy

$$(2.15) \quad \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} = \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \zeta^{-k} - \frac{\sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k}{\omega'(\zeta)},$$

gdzie współczynniki \bar{b}_k wyrażają się wzorem (1.8) jako wartości sprzężone, natomiast współczynniki g_k obliczymy z następującego wzoru rekurencyjnego:

$$(2.16) \quad g_k = (k+2)c_{k+2}b_1 + (k+3)c_{k+3}b_2 + \dots + nc_n b_{n-k-1}.$$

Iloczyn funkcji (2.14) i (2.15) wynosi

$$(2.17) \quad \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \zeta^{-k} \cdot \sum_{r=1}^n r a_r \zeta^{r-1} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k - \\ - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^p \frac{P_j}{\zeta - \zeta_j} \cdot \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \zeta^{-k}.$$

Ze wzorów (1.9) i (1.12) wynika, że

$$\bar{K}_k = \sum_{r=1}^{n-k+1} \bar{b}_{k+r-1} r a_r.$$

Stąd

$$(2.18) \quad \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \zeta^{-k} \cdot \sum_{r=1}^n r a_r \zeta^{r-1} = \sum_{k=1}^n \bar{K}_k \zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} h_k \zeta^k,$$

gdzie współczynniki h_k wyrażają się następującym wzorem rekurencyjnym:

$$(2.19) \quad h_k = n a_n \bar{b}_{n-k-1} + (n-1) a_{n-1} \bar{b}_{n-k-2} + \dots + (k+2) a_{k+2} \bar{b}_1.$$

Rozwińmy funkcję $\frac{1}{\zeta - \zeta_j}$ w szereg Maclaurina:

$$\frac{1}{\zeta - \zeta_j} = -\frac{1}{\zeta_j} \frac{1}{1 - \zeta/\zeta_j} = -\frac{1}{\zeta_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{\zeta_j}\right)^k.$$

Jeżeli wykorzystamy (1.7), to otrzymamy

$$(2.20) \quad \frac{1}{\zeta - \zeta_j} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\bar{b}_k}{\zeta^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{D}_k^{(j)}}{\zeta^k} - \frac{\bar{D}_1^{(j)}}{\zeta - \zeta_j}.$$

Wstawiając (2.17) do (2.13), z uwzględnieniem (2.18) i (2.20), otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad \psi(\zeta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{-k}^* \zeta^k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \bar{Q}_j \ln(\zeta - \varrho_j) + \\
 & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{P}_j [\ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) + \kappa \ln(\zeta - \zeta_j)] - P_1 \left(\bar{b}_{-1} + \sum_{k=0}^n \frac{\bar{b}_k}{\zeta^{k+1}} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=2}^p P_j \left[\frac{\bar{D}_1^{(j)}}{\zeta - \zeta_j} + \frac{\zeta \bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta_j} \right) - \zeta_j \bar{\omega}(\bar{\zeta}_j)}{\zeta_j \bar{\omega}'(\zeta_j)(\zeta - \zeta_j)} \right] \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\omega'(\lambda_j)} \frac{1}{\zeta - \lambda_j} + \\
 & + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k - \sum_{k=0}^{n-2} h_k \zeta^k - C_1.
 \end{aligned}$$

Funkcja (2.21) posiada w punkcie $\zeta = 0$ osobliwość, ale jest to związane tylko z działaniem siły P_1 w tymże punkcie.

Współczynnik b_{-1}^+ obliczymy z rozwinięcia funkcji $\omega(\varrho)/\omega'(\bar{\varrho})$ w szereg Lauranta, a więc według wzoru [4]

$$(2.22) \quad b_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega(\varrho)}{\omega'(\bar{\varrho})} e^{-i\varphi} d\varphi.$$

Stałą zespoloną C_1 należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Obliczymy jeszcze potrzebne we wzorach (1.14) pochodne:

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad \varphi''(\zeta) = & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k^* \zeta^{k-2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \frac{Q_j \bar{\varrho}_j^2}{(1 - \bar{\varrho}_j \zeta)^2} + \\
 & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p P_j \left[\frac{\kappa \bar{\zeta}_j^2}{(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)^2} + \frac{1}{(\zeta - \zeta_j)^2} \right] + \bar{P}_1 \sum_{k=1}^n k(k+1) b_k \zeta^{k-1} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[\sum_{k=2}^n k(k-1) D_k^{(j)} \zeta^{k-2} + 2 \frac{\omega \left(\frac{1}{\zeta_j} \right) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \frac{\bar{\zeta}_j}{(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)^3} \right] \right\} + \\
 & + \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\omega'(\lambda_j)} \frac{\bar{\lambda}_j}{(1 - \bar{\lambda}_j \zeta)^3} - \sum_{k=2}^n k(k-1) K_k \zeta^{k-2},
 \end{aligned}$$

$$(2.24) \quad \psi'(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{A}_k^* \zeta^{k-1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \frac{\bar{Q}_j}{\zeta - \varrho_j} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{P}_j \left(\frac{\kappa}{\zeta - \zeta_j} - \frac{\bar{\zeta}_j}{1 - \bar{\zeta}_j \zeta} \right) + P_1 \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)\bar{b}_k}{\zeta^{k+2}} + \right. \\
 & + \sum_{j=2}^p \frac{P_j}{(\zeta - \zeta_j)^2} \left[\bar{D}_1^{(j)} + \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta_j} \right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_j)}{\omega'(\zeta_j)} \right] \left. \right\} - \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\omega'(\lambda_j)} \frac{1}{(\zeta - \lambda_j)^2} + \\
 & + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{k=1}^{n-2} k g_k \zeta^{k-1} + \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} \sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k - \sum_{k=1}^{n-2} k h_k \zeta^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że wzory, (2.21), i (2.24) obowiązują tylko w obszarze $|\zeta| < 1$, natomiast na konturze γ funkcja $\psi(\zeta)$ wyraża się wzorem (1.3).

3. Przykłady liczbowe

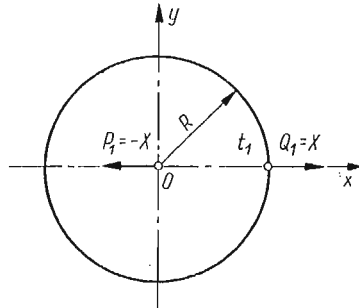
1. Wyznaczyć rozkład naprężeń obwodowych σ_φ na konturze tarczy kołowej o promieniu R obciążonej, jak na rys. 3.

Funkcja odwzorowująca jest w tym przypadku jednomianem i wynosi

$$z = R\zeta.$$

Ze wzoru (1.8) obliczymy $b_1 = 1$.

Punkt zaczepienia siły $Q_1 - t_1 = R$ zostaje odwzorowany w punkt $\varrho_1 = 1$.



Rys. 3

Na podstawie wzorów (2.7), (1.12) i (1.9) obliczamy kolejno $A_1 = X/2\pi$, $a_1 = X/4\pi$, $K_1 = X/4\pi$.

Ze względu na to, że na konturze $\sigma_r = 0$, wystarczy obliczyć tylko funkcję $\varphi'(\zeta)$, gdyż

$$\sigma_\varphi = 4 \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\varrho)}{\omega'(\varrho)}.$$

Ze wzoru (2.12) otrzymamy

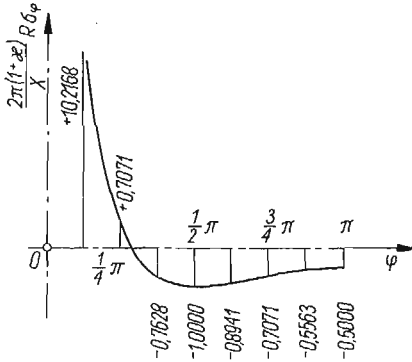
$$\varphi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{X}{1-\zeta} + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \frac{X}{\zeta} - \frac{X}{4\pi} = \frac{X}{4\pi(1+\kappa)} \frac{2 + (\kappa-1)\zeta + (\kappa+1)\zeta^2}{\zeta(1-\zeta)}.$$

Na konturze $\gamma - \zeta = \rho = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Wtedy

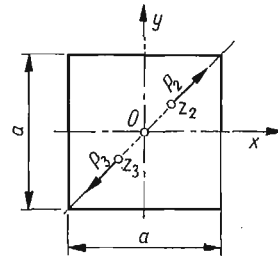
$$\sigma_\varphi = \frac{X}{2\pi R(1+\nu)} \frac{\cos\varphi - \sin^2\varphi}{1 - \cos\varphi}.$$

Przebieg naprężeń obwodowych dla połowy konturu pokazano na rys. 4.

Dla różnych materiałów otrzymujemy różne wartości naprężenia σ_φ . I tak w płaskim stanie naprężenia te będą większe o 50% dla materiału posiadającego $\nu = 0,5$ w stosunku do materiału posiadającego $\nu = 0$.



Rys. 4



Rys. 5

2. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych wzdłuż przekątnych tarczy kwadratowej o boku a obciążonej, jak na rys. 5.

Funkcja odwzorowująca (1.1) oraz funkcja odwrotna mają następujące postacie [5]:

$$z = \omega(\zeta) = c_1 \zeta + c_5 \zeta^5 + c_9 \zeta^9 = (0,53935\zeta - 0,05393\zeta^5 + 0,02247\zeta^9)a,$$

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = m_1 z + m_5 z^5 + m_9 z^9 = 1,85408z/a + 2,19138(z/a)^5 + 2,16062(z/a)^9.$$

Przyjmijmy jednostkowe moduły sił, tzn. $P_2 = -P_3 = (1+i)/\sqrt{2}$ oraz następujące punkty zaczepienia tych sił: $\zeta_2 = -\zeta_3 = (1+i)/2$, co odpowiada na płaszczyźnie $z = x+iy$ punktom $z_2 = -z_3 = 0,27712(1+i)$.

Współczynniki b_k , obliczone według wzoru (1.8), wynoszą

$$b_1 = 1 - 5 \left(\frac{c_5}{c_1} \right)^2 - 9 \left(\frac{c_9}{c_1} \right)^2 + 25 \left(\frac{c_5}{c_1} \right)^2 \frac{c_9}{c_1} = 0,94484,$$

$$b_5 = \left(1 - 5 \frac{c_9}{c_1} \right) \frac{c_5}{c_1} = -0,07917,$$

$$b_9 = \frac{c_9}{c_1} = 0,04166,$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = 0.$$

Obliczamy teraz współczynniki $D_k^{(j)}$ według wzoru (1.7).

$$D_1^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left(b_1 + \frac{b_5}{\zeta_2^4} + \frac{b_9}{\zeta_2^8} \right) = -D_1^{(3)} = -1,92808(1+i),$$

$$D_2^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left(\frac{b_5}{\zeta_2^3} + \frac{b_9}{\zeta_2^7} \right) = D_2^{(3)} = -0,98324,$$

$$D_3^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left(\frac{b_5}{\zeta_2^2} + \frac{b_9}{\zeta_2^6} \right) = -D_3^{(3)} = -0,49162(1-i),$$

$$D_4^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left(\frac{b_5}{\zeta_2} + \frac{b_9}{\zeta_2^5} \right) = D_4^{(3)} = 0,49162i,$$

$$D_5^{(2)} = -\left(\frac{b_5}{\zeta_2} + \frac{b_9}{\zeta_2^5} \right) = -D_5^{(3)} = 0,24581(1+i),$$

$$D_6^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2^4} = D_6^{(3)} = 0,16664, \quad D_7^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2^3} = -D_7^{(3)} = 0,08332(1-i),$$

$$D_8^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2^2} = D_8^{(3)} = -0,08332i, \quad D_9^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2} = -D_9^{(3)} = -0,04166(1+i).$$

Wprowadźmy oznaczenie: $R_j = \frac{\omega(1/\bar{\zeta}_j) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)}$. Wtedy $R_2 = -R_3 = 1,35206(1+i)$.

Współczynniki A_k , obliczone według wzoru (2.7), wynoszą

$$A_1 = \frac{2,00000\kappa - 2,30408}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \quad A_3 = \frac{-0,33333\kappa - 0,73764}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i,$$

$$A_5 = \frac{-0,10000\kappa - 0,36882}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \quad A_7 = \frac{0,03571\kappa + 0,34275}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i,$$

$$A_9 = \frac{0,01389\kappa + 0,17137}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \quad A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = 0.$$

Układ równań (1.12) przybierze postać:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 \bar{a}_1 + 5b_5 \bar{a}_5 + 9b_9 \bar{a}_9 &= A_1, \\ a_2 + 4b_5 \bar{a}_4 + 8b_9 \bar{a}_8 &= 0, \\ a_3 + 3b_5 \bar{a}_3 + 7b_9 \bar{a}_7 &= A_3, \\ a_4 + 2b_5 \bar{a}_2 + 6b_9 \bar{a}_6 &= 0, \\ a_5 + b_5 \bar{a}_1 + 5b_9 \bar{a}_5 &= A_5, \\ a_6 + 4b_9 \bar{a}_4 &= 0, \\ a_7 + 3b_9 \bar{a}_3 &= A_7, \\ a_8 + 2b_9 \bar{a}_2 &= 0, \\ a_9 + b_9 \bar{a}_1 &= A_9. \end{aligned}$$

Powyższy układ da się rozseparować na dwa układy niezależne — jeden z nieparzystymi wskaźnikami przy niewiadomych i drugi z parzystymi posiadający jedynie rozwiązanie zerowe, tzn. $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$. Natomiast z układu równań posiadającego nieparzyste wskaźniki przy niewiadomych tworzymy dwa układy równań poprzez rozdzielenie części rzeczywistych i urojonych, stosując dla współczynników a_k zapis (1.11). Z rozwiązania układów równań otrzymamy

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1,03087\kappa - 1,30782}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & a_3 &= \frac{-0,26926\kappa - 0,53173}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ a_5 &= \frac{-0,01522\kappa - 0,39093}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & a_7 &= \frac{0,00206\kappa + 0,27630}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ a_9 &= \frac{-0,02905\kappa + 0,22585}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & a_2 &= a_4 = a_6 = a_8 = 0. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (1.9) obliczamy współczynniki K_k

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{0,96913\kappa - 0,99626}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & K_3 &= \frac{-0,06407\kappa - 0,20591}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ K_5 &= \frac{-0,08478\kappa + 0,02211}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & K_7 &= \frac{0,03365\kappa + 0,06645}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ K_9 &= \frac{0,04294\kappa - 0,05448}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & K_2 &= K_4 = K_6 = K_8 = 0. \end{aligned}$$

Współczynniki g_k oraz h_k , obliczone według wzorów (2.16) i (2.19), wynoszą

$$\begin{aligned} g_3 &= 5c_5b_1 + 9c_9b_5 = -0,39002a, & g_7 &= 9c_9b_1 = 0,19107a, \\ h_1 &= 3b_1a_3 + 7b_5a_7 = \frac{-0,76436\kappa - 1,66032}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ h_3 &= 5b_1a_5 + 9b_5a_9 = \frac{-0,05120\kappa - 2,00775}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \\ h_5 &= 7b_1a_7 = \frac{0,01362\kappa + 1,82741}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ h_7 &= 9b_1a_9 = \frac{-0,24703\kappa + 1,92053}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}. \end{aligned}$$

Mamy zatem wszystkie dane, aby móc napisać wzory (2.12), (2.23) i (2.24):

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)} \left[\frac{4\kappa}{2+i\zeta^2} - \frac{4i}{2\zeta^2-i} + 10,81648 \frac{2-i\zeta^2}{(2+i\zeta^2)^2} - 6,71606 + \right. \\ &\quad \left. + 6,51717i\zeta^2 + 4,80565\zeta^4 - 2,79811i\zeta^6 - 1,00944\zeta^8 + \kappa(-0,96913 + \right. \\ &\quad \left. + 0,19221i\zeta^2 + 0,42390\zeta^4 - 0,23555i\zeta^6 - 0,38646\zeta^8) \right], \end{aligned}$$

Таблица 1

ζ	$\frac{1}{a} \omega(\zeta)$	$\frac{1}{a} \omega''(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi'(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi''(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi'(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\sigma_r$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\sigma_p$
0	0,53935	0	2,69218 + +1,03087 <i>z</i>	0	(8,26848 + +4,76436 <i>z</i>) <i>i</i>	25,31349 + +12,15616 <i>z</i>	-5,34741 - -4,51088 <i>z</i>	
0,30788 (1+i)	0,54930	0,06635 (1-i)	5,52404 + +1,18653 <i>z</i>	(14,39008 + +0,26512 <i>z</i>) (1-i)	(18,44067 + +6,71795 <i>z</i>) <i>i</i>	38,52439 + +16,41562 <i>z</i>	1,70165 - -7,77534 <i>z</i>	
0,58370 (1+i)	0,70814	0,72774 (1-i)	-8,83537 + +1,57878 <i>z</i>	(86,45993 - -1,34526 <i>z</i>) (1-i)	(63,86835 - -11,79679 <i>z</i>) <i>i</i>	-61,77580 - -8,25449 <i>z</i>	11,86832 + +17,17237 <i>z</i>	
0,70711 (1+i)	1,01123	1,90668 (1-i)	6,60301 + +1,79275 <i>z</i>				26,11872 + +7,09136 <i>z</i>	
0,30788 (i-1)	0,54930	-0,06635 (1+i)	1,34934 + +0,88001 <i>z</i>	(3,21664 + +0,70951 <i>z</i>) (1+i)	(4,36848 + +3,95094 <i>z</i>) <i>i</i>	0,69366 - -3,08733 <i>z</i>	9,13222 + +9,49557 <i>z</i>	
0,58370 (i-1)	0,70814	-0,72774 (1+i)	-0,16229 + +0,44799 <i>z</i>	(2,13493 + +2,73629 <i>z</i>) (1+i)	(-2,63498 + +1,98436 <i>z</i>) <i>i</i>	5,96436 + +2,71281 <i>z</i>	-6,88108 - -0,18229 <i>z</i>	
0,70711 (i-1)	1,01123	-1,90668 (1+i)	-0,68071 - -0,01840 <i>z</i>				-2,69260 - -0,07276 <i>z</i>	

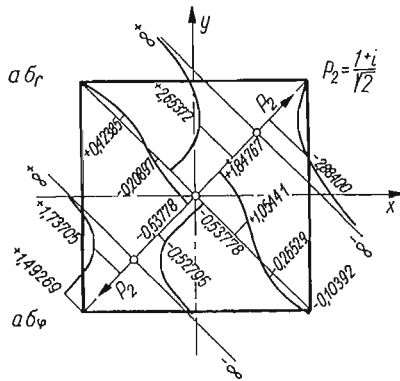
Tablica 2

ξ	$\alpha\sigma_r$			$\alpha\sigma_\varphi$		
	$\nu = 0$	$\nu = 0,5$	δ [%]	$\nu = 0$	$\nu = 0,5$	δ [%]
	0	1,73823	1,92333	10,65	-0,53119	-0,54296
0,30788 (1+i)	2,46944	2,78046	12,59	-0,60814	-0,47508	28,00
0,58370 (1+i)	-2,43478	-3,18770	30,92	1,78335	1,70873	4,37
0,70711 (1+i)	0	0		1,33340	1,60106	20,07
0,30788 (i-1)	-0,24107	-0,18788	28,31	1,05841	1,05330	0,48
0,58370 (i-1)	0,39678	-0,44252	11,53	-0,20898	-0,30322	45,09
0,70711 (i-1)	0	0		-0,08190	-0,11875	44,99

$$\varphi''(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)} \left\{ \frac{16i\zeta}{(2\zeta^2-i)^2} - 21,63296 \frac{6i\zeta + \zeta^3}{(2+i\zeta^2)^3} + \right. \\ \left. + 13,03434i\zeta + 19,22260\zeta^3 - 16,78866i\zeta^5 - 8,07552\zeta^7 + \right. \\ \left. + \kappa \left[\frac{-8i\zeta}{(2+i\zeta^2)^2} + 0,38442i\zeta + 1,69560\zeta^3 - 1,41330i\zeta^5 - 3,09168\zeta^7 \right] \right\},$$

$$\psi'(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)} \left\{ \frac{4\kappa}{2\zeta^2-i} + \frac{4i}{2+i\zeta^2} - 4,60816 \frac{2\zeta^2+i}{(2\zeta^2-i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} (-1,17006\zeta^2 + 1,33749\zeta^6) + (-0,39002\zeta^3 + \right. \\ \left. + 0,19107\zeta^7) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} a + 1,66032i + 6,02325\zeta^2 - 9,13705i\zeta^4 - \right. \\ \left. - 13,44371\zeta^6 + \kappa(0,76436i + 0,15360\zeta^2 - 0,06810i\zeta^4 + 1,72921\zeta^6) \right\}.$$

Дла седмиу выбраних пунктѝ: $z = 0, (\pm 1+i)a/6, (\pm 1+i)a/3$ и $(\pm 1+i)a/2$, котѝрм одповидају пунктѝ $\zeta = 0, 0,30788(\pm 1+i), 0,58370(\pm 1+i), 0,70711(\pm 1+i)$, обличено вартѝсти $\omega'(\zeta), \omega''(\zeta), \varphi'(\zeta), \varphi''(\zeta)$ и $\psi'(\zeta)$. Вартѝсти те zestawiono в таблицѝ 1. В дву остатних котумнах теѝже таблицѝ замещено вартѝсти напруѝен σ_r и σ_φ . В таблицѝ 2 замещено вартѝсти напруѝен в тих пунктѝх дла тарцѝх posiadajuцих вспѝлчзнын-



Рѝс. 6

нику Poissona $\nu = 0$ ораз $\nu = 0,5$, јак рѝвниѝе процентѝе рѝзнице мѝжду теми напруѝениами, личѝне вгљѝдем материалу о $\nu = 0$.

Выкресѝ напруѝен нормалних в розпатрѝваних прѝкрѝојах дла тарцѝх выконанѝеј з материалу о вспѝлчзнынѝу Poissona $\nu = 0,3$ показано на рѝс. 6.

Лѝтература цѝтована в текѝциѝ

1. А. Г. Угодчикѝв, М. И. Длутач, А. Е. Степанѝв, *Рѝшение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах*, Высшѝяя школа, Москва 1970.
2. Н. И. Мусхелишвили, *Некѝторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, Москва 1966.

3. F. LEJA, *Teoria funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa 1957.
4. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, t. 3, PWN, Warszawa 1967.
5. K. RYKALUK, *Tarcza kwadratowa obciążona na konturze siłami skupionymi*, Rozprawy Inżynierskie, 19, 2 (1971).
6. П. Ф. Фильчаков, *Приближенные методы конформных отображений*, Наукова Думка, Киев 1964.

Резюме

ПОЛЕЗНЫЙ ВИД ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОСВЯЗНОМ ДИСКЕ

Общее (комплексное) решение задачи об односвязном диске, нагруженном произвольным образом (непрерывная нагрузка и сосредоточенные силы на контуре, а также сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты внутри диска), предложенное А. Г. Угодчиковым [1], приведено удобному для использования, при анализе напряжённого и деформированного состояний в любой точке диска (за исключением точек приложения сосредоточенных нагрузок).

Способ приведения проиллюстрирован двумя числовыми примерами.

Summary

PRACTICAL FORM OF GENERAL SOLUTION OF A SIMPLY-CONNECTED DISK

A general (complex) solution of a simply-connected disk, loaded in an arbitrary manner (continuous loading and concentrated forces on the contour, and concentrated forces and concentrated couples within the disk region), presented by A. G. Ugodčikow [1] has been brought to a form enabling an analysis of the strain and stress state at its arbitrary point (except the points of application of the concentrated loads).

The procedure has been illustrated by two numerical examples.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1971 r.
