

DYNAMIKA SZTYWNEJ PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM
PODŁOŻU ZE ZMIENNĄ GRANICĄ PLASTYCZNOŚCI. CZĘŚĆ I. SZTYWNE ODCIĄŻENIE

JERZY BAUER, EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problem propagacji jednowymiarowych fal naprężenia w stałych ośrodkach niejednorodnych był przedmiotem badań wielu autorów. Dość obszerny przegląd literatury z tej dziedziny podany jest w [1]. W pracach tych rozwiązywano zagadnienia graniczne dla warunków brzegowych danych w naprężeniach (odkształceniach) i prędkościach (przemieszczeniach). Brak jest jednak rozwiązań podobnych problemów dla mieszanych warunków brzegowych wyrażonych za pomocą równań różniczkowych (np. obciążenie zewnętrzne przyłożone na masę skupioną leżąca na niejednorodnym ośrodku), generujących fale słabej nieciągłości. Ten rodzaj warunków brzegowych jest często spotykany w praktyce inżynierskiej, szczególnie w problemach fortyfikacyjnych.

W niniejszej pracy zbadamy dynamikę nieodkształcalnej płyty, spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu (gruncie) ze zmienną granicą plastyczności.

Praca ta jest kontynuacją publikacji [2], [3], w których zbadano analogiczny problem dla ośrodka jednorodnego. Uzyskane tam wyniki stanowią tło porównawcze dla zbadania wpływu niejednorodności ośrodka (zmiennej granicy plastyczności) na dynamikę płyty.

Praca składa się z dwóch części. W pierwszej części rozwiązujemy problem dla ośrodka ze sztywnym odcieżeniem, natomiast w drugiej skonstruujemy rozwiązanie dla ośrodka z liniowo-sprężystym odcieżeniem i zbadamy jego wpływ na dynamikę płyty.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy ruch następującego układu. Na sprężysto-plastycznym niejednorodnym gruncie wypełniającym dolną półprzestrzeń, spoczywa nieodkształcalna, nieograniczona płyta o jednostkowej masie m (masa odniesiona do jednostki powierzchni). Płyta obciążona jest równomiernie rozłożonym ciśnieniem nagle przyłożonym i następnie malejącym do zera. Tego typu schemat obciążenia może być modelowym przedstawieniem obiektu znajdującego się pod działaniem powietrznej fali uderzeniowej w bliskim otoczeniu epicentrum wybuchu ładunku jądowego.

Fizyko-mechaniczne własności gruntu aproksymujemy modelem Prandtla ze zmienną (monotonicznie rosnącą) wraz z głębokością granicą plastyczności. Przyjmujemy, że na

gałęzi odciążenia odkształcenie nie ulega zmianie — sztywne odciążenie. Do matematycznego opisu użyjemy współrzędnej Lagrange'a, przy czym dodatnią półoś Ox kierujemy w głąb ośrodka.

Sformułowany wyżej problem wraz z przyjętymi założeniami w języku matematycznym przyjmuje następującą postać:

równanie równowagi

$$(2.1) \quad \rho_0 v_{,t} = \sigma_{,x};$$

związki geometryczne

$$(2.2) \quad v = u_{,t}; \quad \varepsilon = u_{,x};$$

związki fizyczne

a) w strefie obciążenia

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= E_0 \varepsilon, & \text{dla } |\sigma(\varepsilon)| &\leq \sigma_s^0 + f(x), \\ \sigma(\varepsilon, x) &= E_1 \varepsilon + [\sigma_s^0 + f(x)] \frac{E_1 - E_0}{E_0}, & \text{dla } |\sigma(\varepsilon, x)| &> \sigma_s^0 + f(x); \end{aligned}$$

b) w strefie odciążenia

$$(2.4) \quad \varepsilon(x, t) = \varepsilon(x);$$

warunki początkowe

$$(2.5) \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0;$$

warunek brzegowy

$$(2.6) \quad \sigma(0, t) = m v_{,t}(0, t) - p(t),$$

gdzie $p(t)$ jest ciśnieniem zewnętrznym obciążającym płytę, natomiast funkcja $f(x)$ charakteryzuje zmianę granicy plastyczności gruntu. O funkcji tej zakładamy, że:

$$(2.7) \quad f(0) = 0, \quad f'_{(x)} \geq 0, \quad \sigma_s(x) = -\sigma_s^0 - f(x).$$

Wymienione wyżej równanie, związki geometryczne i fizyczne oraz warunki graniczne jednoznacznie określają dany problem.

3. Konstrukcja rozwiązania problemu

Przy założeniach sformułowanych w poprzednim paragrafie obraz falowy rozwiązania przyjmuje jedną z postaci pokazanych na rys. 1. Analityczne rozwiązanie problemu kształtuje się następująco.

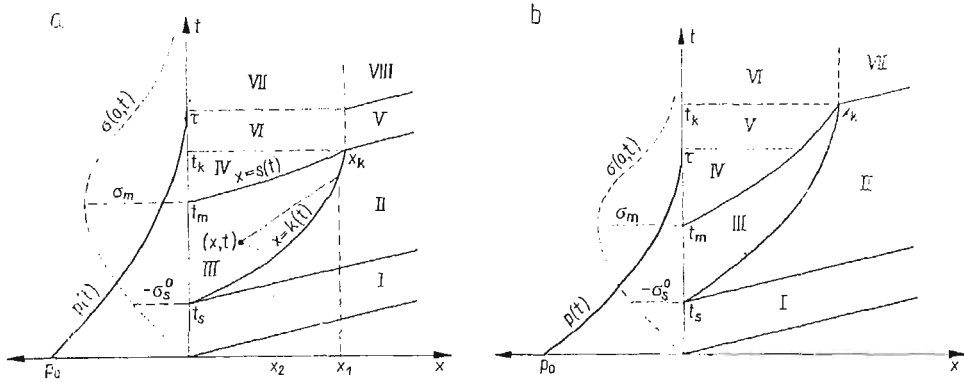
Strefa obciążenia (obszary I, II i III). W strefie obciążenia zgodnie z (2.1), (2.2) i (2.3) ruchem ośrodka rządzą następujące równania:

$$(3.1) \quad u_{,tt} - a_0^2 u_{,xx} = 0 \quad (\text{obszary I i II}),$$

$$(3.2) \quad u_{,tt} - a_1^2 u_{,xx} = \frac{E_1 - E_0}{\rho_0 E_0} f'(x) \quad (\text{obszar III}),$$

gdzie $a_0 = \sqrt{E_0/\rho_0}$, $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$.

W dalszym ciągu rozważań parametry należące do danego obszaru będziemy oznaczać dolnym indeksem liczbowym zgodnym z numerem danego obszaru.



Rys. 1

Ogólne rozwiązania równań (3.1) i (3.2) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \Phi_1 \left(t - \frac{x}{a_0} \right) + \Psi_1 \left(t + \frac{x}{a_0} \right), \\
 u_2 &= \Phi_2 \left(t - \frac{x}{a_0} \right) + \Psi_2 \left(t + \frac{x}{a_0} \right), \\
 u_3 &= \Phi_3 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \Psi_3 \left(t + \frac{x}{a_1} \right) - \frac{E_1 - E_0}{E_0 E_1} \int_0^x f(\xi) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Z jednorodnych warunków początkowych (2.5) wynika, że

$$\Psi_1 \left(t + \frac{x}{a_0} \right) = \Psi_2 \left(t + \frac{x}{a_0} \right) \equiv 0.
 \tag{3.4}$$

Fizycznie oznacza to, że w obszarach I i II brak jest zaburzeń wędrujących w ujemnym kierunku osi x .

Na podstawie (2.2), (2.3) i (3.3) oraz (3.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -\frac{E_0}{a_0} \Phi_1' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \quad \sigma_2 = -\frac{E_0}{a_0} \Phi_2' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \\
 \sigma_3 &= -\frac{E_1}{a_1} \Phi_3' \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \frac{E_1}{a_1} \Psi_3' \left(t + \frac{x}{a_1} \right) + \sigma_s^0 \frac{E_1 - E_0}{E_0}, \\
 v_1 &= \Phi_1' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \quad v_2 = \Phi_2' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \\
 v_3 &= \Phi_3' \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \Psi_3' \left(t + \frac{x}{a_1} \right),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

gdzie Φ' i Ψ' oznaczają pochodne funkcji Φ i Ψ względem argumentów.

Pozostałe parametry ruchu ośrodka, tj. przyspieszenie w i przemieszczenie u otrzymujemy dokonując odpowiednio operacji różniczkowania i całkowania pola prędkości względem czasu. Mając to na uwadze w dalszym ciągu będziemy podawać tylko wzory na naprężenia i prędkości.

Podstawiając (3.5)₁ i (3.5)₄ do (2.6) oraz całkując otrzymane równanie różniczkowe dostajemy jawną postać funkcji Φ_1 , a stąd wyrażenia na pole naprężeń i prędkości

$$(3.6) \quad \sigma_1(x, t) = -h_0 e^{-h_0 \left(t - \frac{x}{a_0}\right)} \int_0^{t - \frac{x}{a_0}} p(\xi) e^{h_0 \xi} d\xi,$$

$$v_1(x, t) = -\frac{1}{\rho_0 a_0} \sigma_1(x, t), \quad h_0 = \frac{E_0}{m a_0} = \frac{\rho_0 a_0}{m}.$$

Obszary II i III są rozdzielone frontem plastycznej fali obciążenia $x = k(t)$ (rys. 1). Na froncie tym następuje odbicie i załamanie plastycznych fal naprężenia wywołane niejednorodnością ośrodka. Aby rozwiązać problem w obszarach II i III należy określić następujące funkcje: Φ'_2 , Φ'_3 i Ψ'_3 oraz front fali plastycznej $x = k(t)$.

Wykorzystując warunki ciągłości pola naprężeń i prędkości na granicy obszarów II i III, wartość naprężenia równą granicy plastyczności na krzywej $x = k(t)$ oraz warunek brzegowy (2.6), otrzymujemy następujący układ równań na wymienione wyżej funkcje:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Phi'_2 \left[t - \frac{k(t)}{a_0} \right] &= \Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_1} \right] + \Psi' \left[t + \frac{k(t)}{a_1} \right], \\ -\frac{E_0}{a_0} \Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_0} \right] &= -\sigma_s^0 - f[k(t)], \\ -\frac{E_1}{a_1} \Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_1} \right] + \frac{E_1}{a_1} \Psi'_3 \left[t + \frac{k(t)}{a_1} \right] + \sigma_s^0 \frac{E_1 - E_0}{E_0} &= -\sigma_s^0 - f[k(t)], \\ -\frac{E_1}{a_1} \Phi'_3(t) + \frac{E_1}{a_1} \Psi'_3(t) + \sigma_s^0 \frac{E_1 - E_0}{E_0} &= m[\Phi''_3(t) + \Psi''_3(t)] - p(t). \end{aligned}$$

Z pierwszego i trzeciego równania po rozwikłaniu otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} -\Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_1} \right] &= -\sigma_s^0 \frac{a_1 + a_0}{2E_0} + Lf[k(t)], \\ \Psi'_3 \left[t + \frac{k(t)}{a_1} \right] &= \sigma_s^0 \frac{a_0 - a_1}{2E_0} + Nf[k(t)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.9) \quad L = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{E_0} + \frac{a_1}{E_1} \right), \quad N = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{E_0} - \frac{a_1}{E_1} \right).$$

Załóżmy chwilowo, że znamy funkcję $x = k(t)$. Wówczas wartości funkcji Φ'_3 i Ψ'_3 w dowolnym punkcie (x, t) obszaru III wyrażą się następującymi wzorami:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} -\Phi'_3 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) &= -\sigma_s^0 \frac{a_1 + a_0}{2E_0} + Lf(x_1), \\ \Psi'_3 \left(t + \frac{x}{a_1} \right) &= \sigma_s^0 \frac{a_0 - a_1}{2E_0} + Nf(x_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.11) \quad x_1 = k \left(t + \frac{x_1 - x}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left(t - \frac{x_2 - x}{a_1} \right).$$

Wielkości x_1 i x_2 są odcięzami punktów przecięcia się charakterystyk odpowiednio dodatniej i ujemnej z frontem fali $x = k(t)$, przechodzących przez wspólny punkt (x, t) , położony wewnątrz obszaru III (rys. 1a). Stosowane w dalszym ciągu rozważań oznaczenia $x_1(x, t)$ i $x_2(x, t)$ należy rozumieć jako rozwiązania równań (3.11).

Analityczne rozwiązanie problemu wewnątrz obszarów II i III po wykorzystaniu (3.10), (3.7)₂ i (3.5) kształtuje się następująco:

$$(3.12) \quad \sigma_2(x, t) = -\sigma_s^0 - f[k(t_1)], \quad v_2(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 + \frac{a_0}{E_0} f[k(t_1)]$$

oraz

$$(3.13) \quad \sigma_3(x, t) = -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2), \quad v_3(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2),$$

gdzie

$$(3.14) \quad t_1 = t - \frac{x - k(t_1)}{a_0}.$$

Wróćmy obecnie do określenia frontu plastycznej fali obciążenia $x = k(t)$. Żądając spełnienia przez wyrażenia (3.13) warunku brzegowego (2.6) na granicy obszaru III, otrzymamy

$$(3.15) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) = \\ = m \left[-L \frac{a_1 k'(t + x_1/a_1)}{a_1 - k'(t + x_1/a_1)} f'(x_1) + N \frac{a_1 k'(t - x_2/a_1)}{a_1 + k'(t - x_2/a_1)} f'(x_2) \right] - p(t),$$

gdzie obecnie

$$(3.16) \quad x_1 = k \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left(t - \frac{x_2}{a_1} \right).$$

Równanie powyższe obowiązuje dla czasów $t_s \leq t \leq t_m$ (patrz rys. 1a). Jest to nieliniowe równanie różniczkowe z przesuniętym argumentem. Analizę tego równania i konstrukcją rozwiązania zajmujemy się w rozdziale 4. Obecnie przejdziemy do strefy odciążenia.

Strefa odciążenia. W strefie sztywnego odciążenia mamy $v(x, t) \approx v(t)$ i wobec tego z równania równowagi (2.1) po scałkowaniu względem x i wykorzystaniu warunku brzegowego (2.6) otrzymujemy

$$(3.17) \quad \sigma(x, t) = (\rho_0 x + m)v'(t) - p(t).$$

Front fali odciążenia $x = s(t)$ w rozpatrywanych warunkach granicznych jest frontem słabej nieciągłości. Mając to na uwadze wprowadzamy do (3.17), przy $x = s(t)$, pole

naprężeń i prędkości z obszaru III wyrażone wzorami (3.13). W konsekwencji otrzymujemy następujące równanie na front fali odciążenia $x = s(t)$

$$(3.18) \quad -\sigma_s^0 + f(x_1) \frac{E_1}{a_1} L + f(x_2) \frac{E_1}{a_1} N = [\varrho_0 s(t) + m] \left\{ -Lf'(x_1) \frac{k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right] [a_1 - s'(t)]}{a_1 - k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]} + \right. \\ \left. + Nf'(x_2) \frac{k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right] [a_1 + s'(t)]}{a_1 + k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]} \right\} - p(t),$$

gdzie

$$(3.19) \quad x_1 = k \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right], \quad x_2 = k \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right].$$

Równanie powyższe całkujemy numerycznie w przykładzie liczbowym za pomocą metody Runge-Kutta.

Przejdziemy obecnie do określenia pól naprężeń i prędkości w poszczególnych obszarach strefy odciążenia. Rozpatrzmy dwa możliwe układy obszarów na płaszczyźnie fazowej x, t (patrz rys. 1a, b).

Przypadek I — $t_K < \tau$ (rys. 1a).

O b s z a r I V:

Na podstawie (3.17) i (3.13) otrzymujemy

$$(3.20) \quad \sigma_4(x, t) = (\varrho_0 x + m) [-Lf'(x_1) \dot{x}_1 + Nf'(x_2) \dot{x}_2] - p(t), \\ v_4(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 określają wzory (3.19), natomiast ich pochodne przyjmują postać

$$(3.21) \quad \dot{x}_1 = \frac{k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]}{a_1 - k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]} [a_1 - s'(t)], \\ \dot{x}_2 = \frac{k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]}{a_1 + k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]} [a_1 + s'(t)].$$

O b s z a r V:

$$(3.22) \quad \sigma_5(x, t) = -[\sigma_s^0 + f(x_K)] e^{-h_1 \left(t - t_K - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} - h_1 e^{-h_1 \left(t - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} \int_{t_K}^{\frac{x - x_K}{a_0}} p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi,$$

$$v_5(x, t) = -\frac{a_0}{E_0} \sigma_5(x, t), \quad h_1 = \frac{E_0}{a_0(m + \varrho_0 x_K)},$$

gdzie x_K i t_K są współrzędnymi końca fali odciążenia (rys. 1). Określamy je z przecięcia się frontu plastycznej fali obciążenia z falą odciążenia.

Obszar VI:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \sigma_6(x, t) &= \frac{m + \varrho_0 x}{m + \varrho_0 x_K} [\sigma_s(x_K, t) + p(t)] - p(t), \\ v_6(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_s(x, t). \end{aligned}$$

Obszar VII:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \sigma_7(x, t) &= \frac{m + \varrho_0 x}{m + \varrho_0 x_K} \left\{ -[\sigma_s^0 + f(x_K)] e^{-h_1(t-t_K)} - h_1 e^{-h_1 t} \int_{t_K}^t p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi \right\}, \\ v_7(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_7(x_K, t). \end{aligned}$$

Obszar VIII:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \sigma_8(x, t) &= -[\sigma_s^0 + f(x_K)] e^{-h_1 \left(t - t_K - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} - h_1 e^{-h_1 \left(t - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} \int_{t_K}^t p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi, \\ v_8(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_8(x, t). \end{aligned}$$

Przypadek II — $t_K > \tau$ (rys. 1b). W tym wariancie rozwiązanie w obszarze IV pokrywa się z rozwiązaniem w obszarze IV poprzedniego przypadku. W pozostałych obszarach otrzymujemy

Obszar V:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \sigma_5(x, t) &= (\varrho_0 x + m) [-Lf'(x_1) \dot{x}_1 + Nf'(x_2) \dot{x}_2], \\ v_5(x, t) &= \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2). \end{aligned}$$

Obszar VI:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \sigma_6(x, t) &= \frac{m + \varrho_0 x}{m + \varrho_0 x_K} [-\sigma_s^0 - f(x_K)] e^{-h_1(t-t_K)}, \\ v_6(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_6(x, t). \end{aligned}$$

Obszar VII:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \sigma_7(x, t) &= [-\sigma_s^0 - f(x_K)] e^{-h_1 \left(t - t_K - \frac{x - x_K}{a_0} \right)}, \\ v_7(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_7(x, t). \end{aligned}$$

4. Analiza frontów fal obciążenia i odciążenia

W pierwszej kolejności zbadamy front plastycznej fali obciążenia. Front tej fali zaczyna propagować się od płyty w głąb osrodka w chwili $t = t_s$, dla której naprężenie pod płytą osiąga wartość $\sigma = -\sigma_s^0$.

Równanie (3.15), po uwzględnieniu faktu, że dla $t = t_s$ zachodzi $x_1 = x_2 = 0$ i $f(0) = 0$, redukuje się do równania kwadratowego, po rozwiązaniu którego otrzymujemy zamknięty wzór na początkową prędkość fali o postaci

$$(4.1) \quad c_s = k'(t_s) = a_1 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{a_0}{a_1} + A \right) A}}{2 \left(\frac{a_0}{a_1} + A \right)},$$

gdzie

$$A = \frac{[p(t_s) - \sigma_s^0] E_0}{m f''(0) a_0 a_1}.$$

Warunkiem istnienia frontu plastycznej fali obciążenia w badanym przypadku niejednorodności jest $k'(t_s) > 0$. Ze wzoru (4.1) wynika, że warunek ten będzie spełniony gdy

$$(4.2) \quad p(t_s) - \sigma_s^0 > 0.$$

Dla $p(t_s) - \sigma_s^0 < 0$ w ośrodku pod płytą wytwarza się tylko sprężysty stan odkształcenia.

Poza tym z (4.1) wynika, że początkowa prędkość propagacji plastycznej fali obciążenia może zmieniać się w przedziale $0 \leq c_s \leq a_1$.

Przejdziemy obecnie do konstrukcji rozwiązania równania frontu fali (3.15). Jest to nieliniowe równanie różniczkowe z przesuniętym argumentem typu neutralnego. Dla skonstruowania rozwiązania tego równania, początkowy (dostatecznie mały) odcinek frontu fali aproksymujemy odcinkiem stycznej do tegoż frontu o współczynniku kierunkowym wyliczonym z wzoru (4.1). Odcinek ten ma postać

$$(4.3) \quad k(t) = c_s(t - t_s), \quad t_s \leq t \leq t_s + \Delta t.$$

Dalej na podstawie (3.11) i (4.3) otrzymujemy

$$(4.4) \quad x_2 = \frac{c_s a_1}{a_1 + c_s} (t - t_s).$$

Podstawiając z kolei (4.3) i (4.4) do równania frontu fali (3.15), otrzymamy

$$\frac{d}{dt} f(x_1) + l f(x_1) = Q(t),$$

a stąd

$$(4.5) \quad f(x_1) = e^{-l(t-t_s)} \int_{t_s}^t Q(\xi) e^{l(\xi-t_s)} d\xi,$$

gdzie

$$(4.6) \quad Q(t) = \frac{\sigma_s^0 - p(t)}{mL} - \frac{E_1 N}{m a_1 L} f \left[\frac{a_1 c_s}{a_1 + c_s} (t - t_s) \right] + \frac{N}{L} \frac{d}{dt} f \left[\frac{a_1 c_s}{a_1 + c_s} (t - t_s) \right],$$

$$l = \frac{E_1}{a_1 m}.$$

Mając znaną postać funkcji $f(x_1)$ z równania (4.5) możemy określić dla poszczególnych chwil czasu wartość nieznanego argumentu $x_1(t)$, który zgodnie z (3.16) w przedziale $t_s \leq t \leq t_s + \Delta t - x_1/a_1$ poprawia założony początkowo liniowy odcinek frontu fali, natomiast dla $t > t_s + \Delta t - x_1/a_1$ określa kolejny odcinek frontu fali potrzebny do realizowania następnego kroku obliczeń. Dalej proces obliczeń powtarza się.

Przejdziemy obecnie do analizy frontu fali sztywnego odciążenia. W pierwszej kolejności zbadamy zachowanie się frontu fali w otoczeniu punktu «startowego» $(0, t_m)$. Czas t_m jest chwilą, w której naprężenie pod płytą osiąga maksymalną wartość (w sensie wartości bezwzględnej). Określamy go z równania

$$(4.7) \quad \sigma_{3,t}(0, t_m) = 0.$$

Równość ta, po wykorzystaniu (3.13)₁ przyjmuje postać

$$(4.8) \quad Lf'_{(x_1)}\dot{x}_1 + Nf'_{(x_2)}\dot{x}_2 = 0.$$

Różniczkując z kolei równanie frontu fali $x = k(t)$ i uwzględniając (4.8) dla $t = t_m$ otrzymamy

$$(4.9) \quad m[-Lf''_{(x_1)}(\dot{x}_1)^2 - Lf'_{(x_1)}\ddot{x}_1 + Nf''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + Nf'_{(x_2)}\ddot{x}_2] - p'(t_m) = 0.$$

Poza tym równanie (3.15) można zapisać w następującej skróconej formie

$$(4.10) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) + mLf'_{(x_1)}\dot{x}_1 - mNf'_{(x_2)}\dot{x}_2 + p(t_m) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_1 &= k\left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right), & x_2 &= k\left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right), \\ \dot{x}_1 &= \frac{a_1 k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}{a_1 - k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}, & \dot{x}_2 &= \frac{a_1 k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}{a_1 + k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy trzy tożsamości, które wykorzystamy przy badaniu frontu fali odciążenia.

Z równania (3.18), po rozwikłaniu względem $s'(t)$, otrzymujemy

$$(4.11) \quad s'(t) = a_1 \frac{W(s, t)}{G(s, t)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} W(s, t) &= \frac{1}{\rho_0 s(t) + m} \left[-\sigma_s^0 + f(x_1) \frac{E_1}{a_1} L + f(x_2) \frac{E_1}{a_1} N + p(t) \right] + \\ &\quad + Lf'_{(x_1)}\dot{x}_1 - Nf'_{(x_2)}\dot{x}_2, \\ G(s, t) &= Lf'_{(x_1)}\dot{x}_1 + Nf'_{(x_2)}\dot{x}_2, \\ (4.12) \quad x_1 &= k \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right], & x_2 &= k \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right], \\ \dot{x}_1 &= \frac{a_1 k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]}{a_1 - k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]}, & \dot{x}_2 &= \frac{a_1 k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]}{a_1 + k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]}. \end{aligned}$$

Na podstawie tożsamości (4.8) i (4.10) wynika, że $W(0, t_m) = G(0, t_m) = 0$. Oznacza to, że równanie (4.11) posiada w punkcie $(0, t_m)$ izolowany punkt osobliwy. Zbadamy zachowanie się frontu fali w otoczeniu punktu osobliwego.

Zgodnie z metodą Frommera [4] równanie (4.11) zapiszemy w postaci

$$(4.13) \quad s'(t_m) = a_1 \frac{W_{,t} dt + W_{,s} ds}{G_{,t} dt + G_{,s} ds} = a_1 \frac{a + b \frac{ds}{dt}}{c + d \frac{ds}{dt}},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \begin{aligned} a &= W_{,t}|_{t=t_m, s=0} = 0, \\ b &= W_{,s}|_{t=t_m, s=0} = -2T_1, \\ c &= G_{,t}|_{t=t_m, s=0} = 2T_1, \\ d &= G_{,s}|_{t=t_m, s=0} = 2T_2, \\ T_1 &= \frac{m}{2a_1} [Lf''_{(x_1)}(\dot{x}_1)^2 + Lf'_{(x_1)}\ddot{x}_1 + Nf''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + Nf'_{(x_2)}\ddot{x}_2], \\ T_2 &= \frac{m}{2a_1} [-Lf''_{(x_1)}(\dot{x}_1)^2 - Lf'_{(x_1)}\ddot{x}_1 + Nf''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + Nf'_{(x_2)}\ddot{x}_2]. \end{aligned}$$

Kładąc w (4.13) $ds/dt = s'(t_m)$ otrzymamy wzór na początkową prędkość frontu fali odciążenia

$$(4.15) \quad c_0 = s'(t_m) = 2a_1 \left[1 - 2mN \frac{f''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + f'_{(x_2)}\ddot{x}_2}{p'(t_m)} \right].$$

W szczególnym przypadku dla ośrodka jednorodnego mamy

$$(4.16) \quad c_0 = 2a_1.$$

W ten sposób określiliśmy współczynnik stycznej do krzywej całkowej w punkcie osobliwym $(0, t_m)$. Powstaje pytanie, czy tylko jedna krzywa całkowa przechodzi przez ten punkt, czy też pęk krzywych o wspólnej stycznej, wyżej określonej. Na to pytanie znajdziemy odpowiedź badając rodzaj punktu osobliwego. Zgodnie z metodą Frommera [4], o rodzaju punktu osobliwego decydują pierwiastki λ_1 i λ_2 równania charakterystycznego

$$(4.17) \quad \lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0.$$

Dla wartości współczynników a, b, c i d określonych wzorami (4.14), równanie (4.17) ma dwa pierwiastki rzeczywiste o następujących wartościach:

$$(4.18) \quad \lambda_1 = 2T_1, \quad \lambda_2 = -2T_1.$$

Zatem punkt osobliwy jest punktem siodłowym i przechodzą przez niego dwie krzywe całkowe. Krzywa całkowa o stycznej $s'_0(t_m) = 0$ nie spełnia warunków ciągłości w otoczeniu punktu $(0, t_m)$ i została wyłączona z rozważań. W ten sposób udowodniliśmy jednoznaczność badanego problemu. Krzywą $s(t)$ określamy z równania (4.11) rozwiązując go metodą Runge-Kutta.

5. Przykład liczbowy

Na podstawie wyprowadzonych w poprzednich paragrafach wzorów przeprowadzono ilościową analizę ruchu płyty nagle obciążonej przyłożonym ciśnieniem zmieniającym się w czasie wg prawa

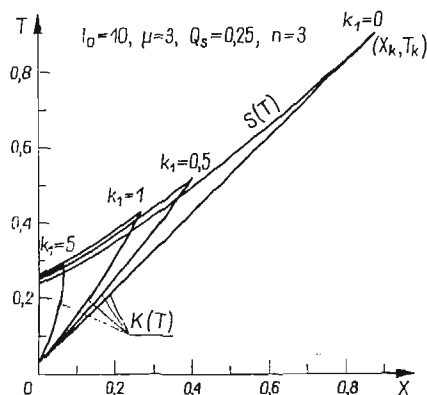
$$(5.1) \quad p(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n,$$

przy liniowej zmianie granicy plastyczności ośrodka

$$(5.2) \quad f(x) = Ax.$$

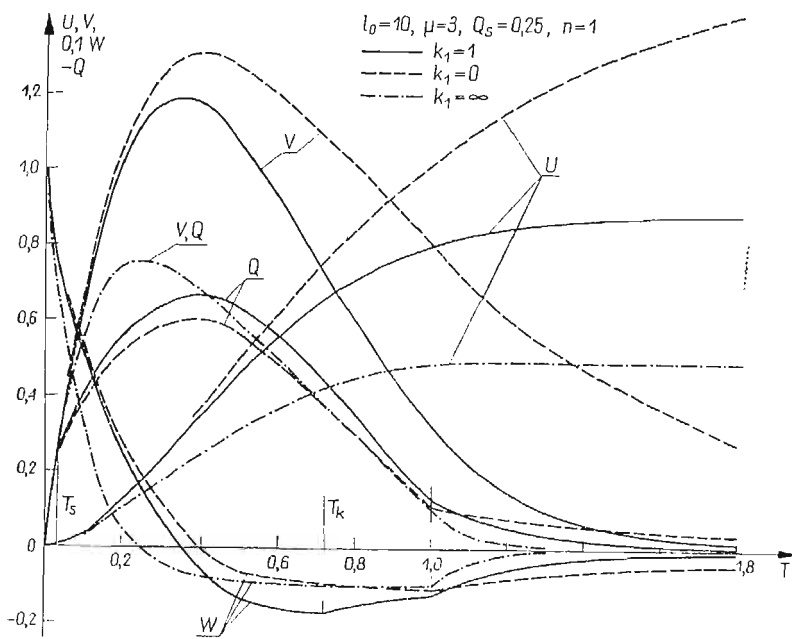
Dla wykonania obliczeń numerycznych wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} T &= \frac{t}{\tau}, & X &= \frac{x}{a_1 \tau}, & P(T) &= \frac{p(t)}{p_0}, & Q &= \frac{\sigma}{p_0}, \\ U &= \frac{\rho_0 a_0}{p_0 \tau} u, & V &= \frac{\rho_0 a_0}{p_0} v, & W &= \frac{\rho_0 a_0 \tau}{p_0} w, \\ K(T) &= \frac{k(t)}{a_1 \tau}, & S(T) &= \frac{s(t)}{a_1 \tau}, & F(X) &= \frac{f(x)}{p_0}, \\ K'(T) &= \frac{k'(t)}{a_1}, & S'(T) &= \frac{s'(t)}{a_1}, & F'(X) &= \frac{f'(x)}{p_0} a_1 \tau, \\ \mu &= \frac{a_0}{a_1}, & k_1 &= \frac{A a_1 \tau}{p_0}, & k_0 &= \frac{\rho_0 a_1 \tau}{m}, \\ k_2 &= \frac{mA}{\rho_0 p_0}, & L_0 &= \frac{\rho_0 a_0 \tau}{m}, & L_1 &= \frac{\mu l_0}{\mu + l_0 X_k}. \end{aligned}$$

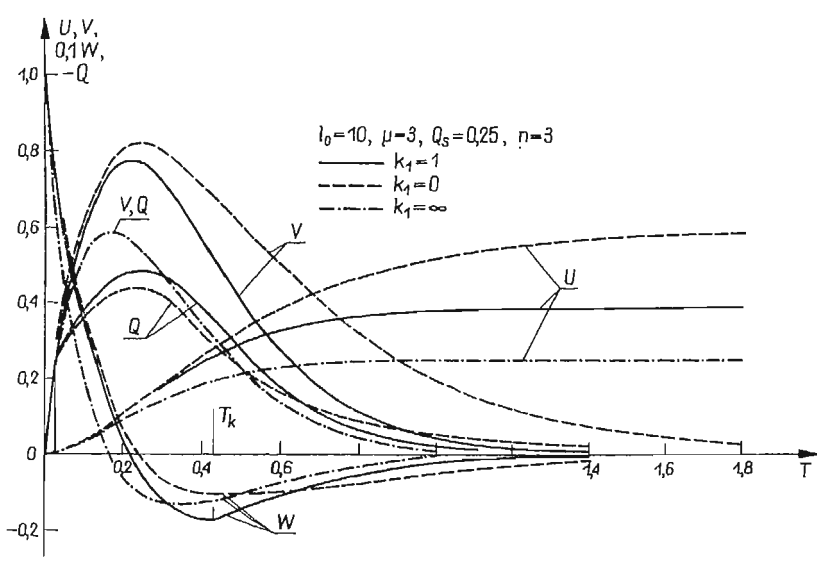


Rys. 2.

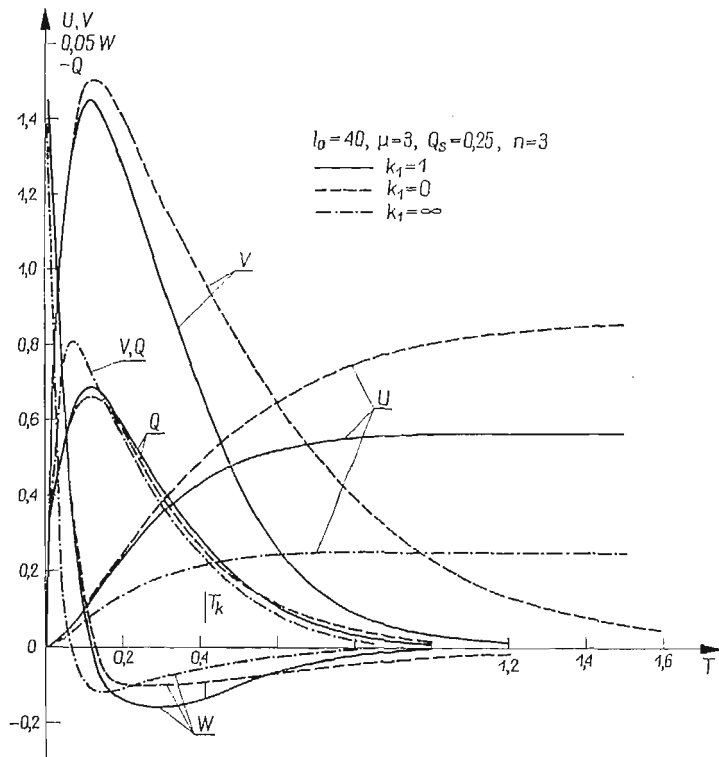
Wyniki obliczeń liczbowych wykonanych na EMC zamieszczamy w postaci graficznej na rys. 2-4.



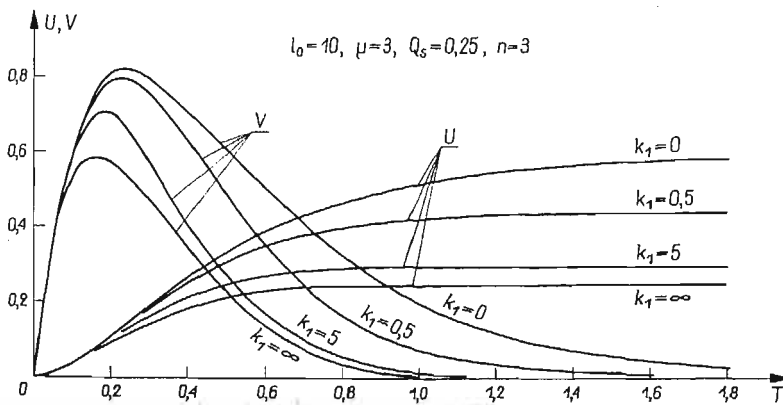
Rys. 3a



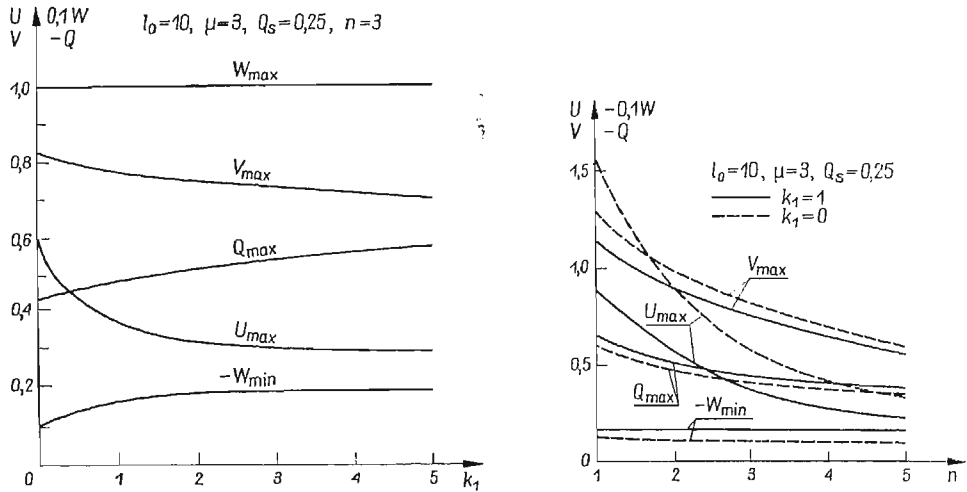
Rys. 3b



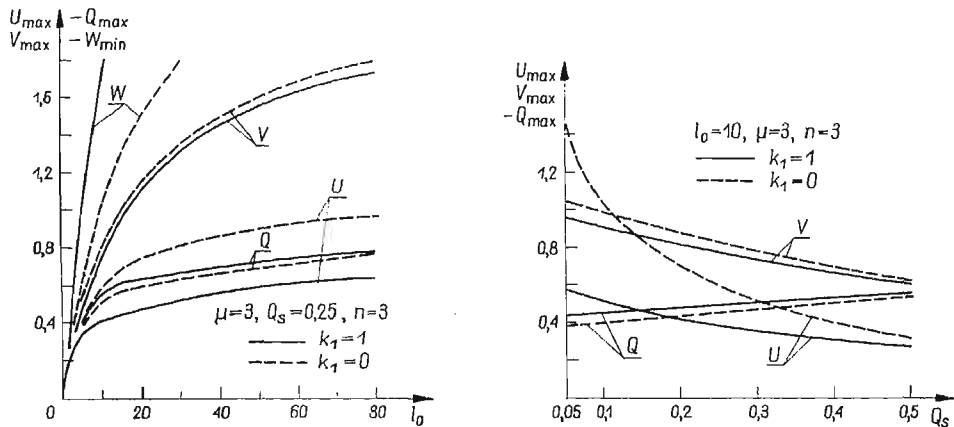
Rys. 3c



Rys. 3d



Rys. 4a, b



Rys. 4c, d

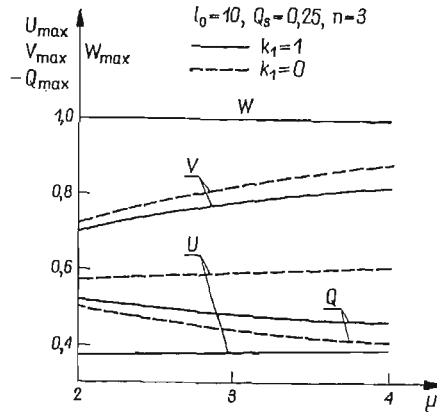
Dla obciążenia przyjętego w postaci (5.1) ruch płyty i stan naprężenia w ośrodku pod płytą zależy od pięciu parametrów: l_0 , μ , Q_s , n i k_1 . Charakter wpływu tych parametrów obrazują zamieszczone wykresy.

Na rys. 2 pokazujemy fronty fal plastycznych $K(T)$ i fronty fal sztywnego odciążenia $S(T)$ dla kilku wartości współczynnika k_1 , który jest odpowiedzialny za zmianę granicy plastyczności ośrodka.

Jak należało oczekiwać, ze wzrostem gradientu wzrostu granicy plastyczności (k_1) intensywnie maleje głębokość przenikania strefy odkształceń plastycznych. Proces ten przebiega nieliniowo. Taki rodzaj przebiegu zjawiska wynika z okoliczności, że wraz z powiększeniem gradientu wzrostu granicy plastyczności maleją nadwyżki ciśnienia

powodujące uplastycznienie ośrodka. W konsekwencji maleje strefa odkształceń plastycznych.

Na rysunkach 3a–d zamieszczone są przebiegi zmian w czasie bezwymiarowych współczynników przemieszczenia płyty U , prędkości V , przyspieszenia W i naprężenia pod płytą Q dla kilku wielkości współczynnika k_1 . Charakter zmian w czasie wymienionych parametrów jest podobny, jak dla ośrodka jednorodnego $k_1 = 0$ [2], z tym, że wielkości U i V wraz ze wzrostem k_1 — maleją, a wartość Q_{\max} rośnie. Dla realnych wielkości współczynnika k_1 (np. $k_1 = 5$) różnice dochodzą do kilkudziesięciu procent. Fakt ten ma



Rys. 4c

istotne znaczenie w praktyce inżynierskiej. Malenie wielkości U i V oraz wzrost Q_{\max} jest wynikiem oddziaływania fal odbitych od niejednorodności, które działają hamująco na ruch płyty i spiętrzają naprężenia pod nią.

Na rysunkach 4a–e pokazano zmiany maksymalnych wartości poszczególnych współczynników w funkcji parametrów l_0 , μ , Q_s , n i k_1 . Jako tło porównawcze zamieszczono również wyniki dla ośrodka jednorodnego. Z zamieszczonych wykresów wynika, że szczególnie wrażliwe na niejednorodność ośrodka jest przemieszczenie płyty. Różnice dochodzą tutaj nawet do 100%.

Reasumując należy stwierdzić, że zaniedbywanie w dynamicznych obliczeniach obiektów fortyfikacyjnych (często spotykane w literaturze technicznej) wpływu niejednorodności ośrodka może prowadzić w niektórych przypadkach do poważnych błędów.

Literatura cytowana w tekście

1. E. WŁODARCZYK, *Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych*, Dodatek do Biul. WAT, 2 (198) (1969). (Rozprawa habilitacyjna).
2. E. WŁODARCZYK, *Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu*, Biul. WAT, 4 (188), (1968).
3. E. WŁODARCZYK, *Wpływ liniowo-sprężystego odciążenia na parametry ruchu sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie*, Biul. WAT, 7 (203) (1969).
4. W. W. СТЕПАНОВ, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1956.

Р е з ю м е

ДИНАМИКА ЖЕСТКОЙ ПЛИТЫ НАХОДЯЩЕЙСЯ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ. ЧАСТЬ I.

В работе исследованы параметры движения жесткой плиты находящейся на упруго-пластическом основании с переменным пределом пластичности. Исследования проведены для жесткой разгрузки. Плита нагружена равномерно распределенным давлением, приложенным внезапно, а затем монотонно убывающем к нулю. При таких условиях, при соответственно подобранной нагрузке, плита генерирует в основании пластические волны нагрузки, за которыми следует процесс разгрузки. Для фронтов пластической волны нагрузки и волны разгрузки получены нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения со сдвинутыми аргументами содержащими искомые функции (фронты волн). Эти уравнения решены на электронной вычислительной математической машине. Выведены замкнутые формулы для начальных скоростей распространения пластической волны и волны разгрузки. Численно исследована зависимость параметров движения плиты и реакции передаваемой ею на основание от неоднородности предела пластичности основания.

S u m m a r y

DYNAMICS OF A RIGID PLATE RESTING ON ELASTIC-PLASTIC NONHOMOGENEOUS MEDIUM. PART I.

In the paper the parameters of motion of a rigid plate resting on elastic-plastic medium with varying plastic yield limit was investigated. The investigations were carried out for rigid unloading. The plate was loaded with uniformly distributed pressure which at first was suddenly applied and next was allowed to decrease monotonically up to the zero value. Under these conditions and for the respectively chosen load the plate generates in the medium the plastic loading waves, which are followed by unloading process. For the fronts of plastic loading and unloading waves the usual nonlinear differential equations with shifted arguments containing the sought functions (wave fronts) were obtained. The equations were solved with the help of a digital computer. The closed formulae for initial velocities of propagation of plastic loading and unloading wave were derived. The motion parameters of the plate and its reaction transmitted to the medium depending on the nonhomogeneity of the plastic yield limit were numerically investigated.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1970 r.
